Comunicações Digitais em Canais Sujeitos à Distorção Linear

E J Nascimento

Universidade Federal do Vale do São Francisco

www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento

July 3, 2019

E J Nascimento (Univasf)

Distorção Linear

July 3, 2019 1/87







E J Nascimento (Univasf)

Distorção Linear

ີ▶ ◀ ≣ ▶ ≣ ∽ິ ຊ ເ July 3, 2019 2 / 87

< □ > < □ > < □ > < □ > < □ >

- Anteriormente, o desempenho dos sistemas de modulação digital foi avaliado para o canal AWGN
- Nesse caso, a única imperfeição era devido ao ruído
 - A forma do pulso não influencia no desempenho
 - A função de transferência do canal era considerada ideal (amplitude constante e fase linear)
- Em situações reais, os canais introduzem vários tipos de distorção
 - Componentes dentro e fora da banda serão atenuadas de maneira diferente
 - As formas de onda podem se propagar por múltiplos percursos
 - Pulsos interferem em seus vizinhos (ISI Intersymbol Interference)
 - O desempenho do sistema é pior que no canal AWGN

イロト イポト イヨト イヨト

- O modelo mais simples para um canal é o de um filtro passa-baixas ideal
- Nesse caso, um trem de pulsos teria as componentes de frequência acima da banda de corte suprimidas
- Para não haver distorção, a solução seria enviar um sinal com espectro limitado
 - Isso não é possível, pois sinais limitados no tempo são ilimitados em frequência
- A solução proposta por Nyquist para ISI nula consiste em se ater apenas aos instantes de decisão
 - Em $t \neq T_S$, os pulsos podem interferir
 - O pulso $p(t) = sinc(\pi R_S t)$ atende esse requisito e possui banda $R_S/2$ Hz (banda teórica mínima)

イロト 不得 トイラト イラト 一日

- Entretanto, o pulso $sinc(\pi R_S t)$ não pode ser gerado na prática
 - Filtro não causal
 - Possui decaimento lento, dificultando aproximações
- Pulsos de Nyquist que podem ser razoavelmente aproximados na prática são conseguidos permitindo-se uma banda de transmissão maior

$$\begin{array}{rcl} \frac{R_S}{2} & \leq & B_T \leq R_S = \frac{1}{T_S} \\ B_T & = & \frac{(1+r)R_S}{2} \\ 0 & \leq & r \leq 1 \end{array}$$

• r é chamado de fator de decaimento (roll-off)

• O pulso cosseno levantado (raised cosine) é um dos que são frequentemente utilizados



• □ > • □ > • □ > •

- Se o canal pudesse ser modelado como um filtro passa-baixas ideal, o problema da ISI estaria resolvido com essa solução
- Entretanto, a ideia de Nyquist ainda pode ser utilizada
 - Transmissor, canal e receptor podem ser encarados como um único sistema
 - O receptor seria projetado de modo que a ISI fosse nula nos instantes de decisão
- Os métodos usados para combater a ISI abordados são a equalização e a OFDM (*orthogonal frequency division multiplexing*)
- Esses métodos são essenciais para combater o efeito de multipercurso, que degrada severamente o desempenho das comunicações sem fio

イロト 不得 トイラト イラト 一日

 Canal de multipercurso com dois feixes: linha de visada e reflexão no solo



Esses dois sinais podem ser representados como

$$s(t) = m(t) \cos \omega_c t$$

$$\alpha_1 s(t - \tau_1) = \alpha_1 m(t - \tau_1) \cos \omega_c (t - \tau_1)$$

• O sinal recebido pode ser representado como

$$r(t) = m(t) \cos \omega_c t + \alpha_1 m(t - \tau_1) \cos \omega_c (t - \tau_1) + n_c(t) \cos \omega_c t + n_s(t) \sin \omega_c t$$

- Em que $n_c(t)$ e $n_s(t)$ representam as componentes (passa-baixa) em fase e quadratura do ruído passa faixa
- Com a detecção coerente, o sinal resultante é dado por

$$y(t) = m(t) + \alpha_1(\cos \omega_c \tau_1)m(t-\tau_1) + n_c(t)$$

A (10) N (10) N (10)

• Se a mensagem m(t) representa uma sequência de pulsos PAM, então

$$m(t) = \sum_{k} a_{k} p(t - kT)$$

$$y(t) = \sum_{k} a_{k} q(t - kT) + n_{c}(t)$$

$$q(t) = p(t) + \alpha_{1} (\cos \omega_{c} \tau_{1}) p(t - \tau_{1})$$

- Pode-se observar que o efeitor do multipercurso foi transformar p(t)em q(t)
- Além disso, se p(t) é projetado para ISI nula, q(t) não verifica esse critério

$$p(nT) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n = \pm 1, \pm 2, \cdots \end{cases}$$

$$q(nT) = p(nT) + \alpha_1(\cos \omega_c \tau_1) p(nT - \tau_1) \neq 0, n = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

• A resposta efetiva do canal q(t) pode ser generalizada para K + 1 percursos como

$$q(t) = p(t) + \sum_{i=1}^{K} \alpha_i [\cos \omega_c \tau_i] p(t - \tau_i)$$

- Nesse caso, o ganho da linha de visada é admitido como um e o seu atraso nulo
- O effeito da ISI depende dos ganhos de multipercurso {α_i} e dos atrasos de multipercurso {τ_i}

• Uma sequência de símbolos QAM $\{s_k\}$ (complexos) pode ser representada pelo sinal

$$s(t) = \left[\sum_{k} Re\{s_k\}p(t-kT)\right] \cos \omega_c t \\ + \left[\sum_{k} Im\{s_k\}p(t-kT)\right] \sin \omega_c t$$

• O efeito de multipercurso pode ser representado pela resposta ao impulso

$$\delta(t) + \sum_{i=1}^{K} \alpha_i \delta(t-\tau_i)$$

• O que resulta no sinal QAM recebido

$$r(t) = s(t) + \sum_{i=1}^{K} \alpha_i s(t - \tau_i) + n_c(t) \cos \omega_c t + n_s(t) \sin \omega_c t$$

• A saída do demodulador QAM pode ser escrita como

$$y(t) = LPF\{2r(t)\cos\omega_{c}t\} + jLPF\{2r(t)\sin\omega_{c}t\}$$
$$= \sum_{k} s_{k} \left[\sum_{i=0}^{K} \alpha_{i}e^{-j\omega_{c}\tau_{i}}p(t-kT-\tau_{i})\right] + n_{c}(t) + jn_{s}(t)$$

E J Nascimento (Univasf)

July 3, 2019 13 / 87

イロト イポト イヨト イヨ

 Pode-se então definir uma resposta ao impulso complexa em banda base como

$$q(t) = \sum_{i=0}^{K} \alpha_i e^{-j\omega_c \tau_i} p(t-\tau_i)$$

• E o ruído complexo em banda base como

$$n_e(t) = n_c(t) + jn_s(t)$$

• De modo que a saída do receptor é dada por

$$y(t) = \sum_{k} s_k q(t-kT) + n_e(t)$$

July 3, 2019 14 / 87

A (10) N (10) N (10)

1

No domínio da frequência

$$Q(f) = \sum_{i=0}^{K} \alpha_i e^{-j(\omega_c + 2\pi f)\tau_i} P(f)$$

 Assim, P(f) é modificado por uma função de transferência do multipercurso que é dependente da frequência e dada por

$$\sum_{i=0}^{K} \alpha_i e^{-j\omega_c \tau_i} e^{-j2\pi f \tau_i}$$

 Canais com distorção dependente da frequência são chamados de canais seletivos em frequência

July 3, 2019 15 / 87

- Canais seletivos em frequência apresentam ISI considerável, o que degrada fortemente o desempenho do sistema de comunicação
- É necessário compensar os efeitos do multipercurso no receptor, pois os transmissores em geral não estão cientes do modelo de propagação
- Os métodos utilizados são a equalização de canal e OFDM
- Um modelo LTI em banda base usado na equalização é dado por



Receptor Equalizador

.

• Seguindo o raciocínio usado no canal AWGN, o receptor ótimo é o filtro casado ao sinal q(t), como indicado na figura abaixo

Nesse caso,

$$z[n] = \sum_{k} s_{k}h(nT - kT) = \sum_{k} s_{k}h[n - k] = h[n] * s[n]$$

$$h(t) = q(t) * q(-t)$$

$$H[z] = \sum_{n} h[n]z^{-n}$$

3

Receptor Equalizador

- Essa representação discreta do sinal QAM é chamada de TSE (*T-spaced equalizer*)
 - ullet Sinais recebidos são processados a uma taxa de 1/T Hertz
- Apesar de ser ótimo, essa construção é difícil de ser realizada pois q(t) depende do ambiente de multipercurso
- O ambiente é em geral dinâmico, o que não justifica projetar um sistema LIT para uma situação estática
- A solução que não é ótima é utilizar um filtro casado a p(t) e um filtro equalizador aplicado a sequência z[n]

< 日 > < 同 > < 回 > < 回 > < 回 > <

Receptor Equalizador

• Usando essa simplificação,

$$h(t) = q(t) * p(-t)$$

$$z(t) = \sum_{k} s_{k} h(t - kT) + w(t)$$

$$w(t) = p(-t) * n_{e}(t)$$

$$S_{w}(f) = |P(f)|^{2} S_{n_{e}}(f)$$

$$z[n] = \sum_{k} s_{k} h[n - k] + w[n] = \sum_{k} s_{n-k} h[n] + w[n]$$

• A partir desse modelo, podem ser usadas duas abordagens para recuperação dos sinais

- MLSE *Maximum Likelihood Sequence Estimation* Baseada no canal e no modelo de ruído
- Equalizadores de canal

イロト イポト イヨト イヨト

Equalizador TSE

• O equalizador TSE consiste no filtro F(z) ilustrado na figura abaixo



Tem-se que

$$F(z) = \sum_{i} f[i]z^{-i}$$

$$d[n] = F(z)z[n] = \underbrace{F(z)H(z)s_{n}}_{\text{termo sinal}} + \underbrace{F(z)w[n]}_{\text{termo ruído}}$$

$$C(z) = F(z)H(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{i}z^{-i}$$

July 3, 2019 20 / 87

э

A (10) N (10) N (10)

Equalizador TSE

• O objetivo limpar a ISI de d[n] para se ter uma decisão livre de erros

$$\hat{s}_n = dec(d[n]) = s_{n-u}$$

Em que u representa um atraso fixo na saída do equalizador
A saída do equalizador pode ser escrita como

$$d[n] = \sum_{i=0}^{\infty} c_i s_{n-i} + \sum_{i=0}^{\infty} f[i]w[n-i]$$

= $c_u s_{n-u} + \underbrace{\sum_{i=0, i \neq u}^{\infty} c_i s_{n-i}}_{\text{termo de ISI}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} f[i]w[n-i]}_{\text{termo de ruído}}$

Equalizador TSE

- Para que a decisão seja correta, o equalizador deve minimizar o termo de ISI e o termo de ruído
- Existem dois métodos principais para construir o equalizador TSE
 - ZF (Zero-forcing) forçamento ao zero
 - MMSE (Minimum mean square error) erro quadrático médio mínimo
- No método ZF, força-se o termo de ISI a zero
- No método MMSE, a distorção entre d[n] e s_{n-u} é minimizada

Equalizador ZF TSE

• No método ZF, tem-se que

i

$$\sum_{i=0,i\neq u}^{\infty} c_i s_{n-i} = 0$$

$$c_i = \begin{cases} 1 & i = u \\ 0 & i \neq u \end{cases}$$

$$C(z) = F(z)H(z) = z^{-u}$$

$$F(z) = \frac{z^{-u}}{H(z)}$$

• Se o filtro for causal e puder ser implementado, a ISI pode ser totalmente eliminada

3

Equalizador ZF TSE

• Nesse caso, a decisão será tomada com base no sinal

$$d[n] = s_{n-u} + F(z)w[n]$$

- Pode-se observar que dependendo de F(z), o termo de ruído pode ter um ganho considerável dificultando o processo de decisão
- O termo de ruído filtrado pode ser escrito como

$$\widetilde{w}[n] = F(z)w[n] = \sum_{i=0}^{\infty} f[i]w[n-i]$$

$$\sigma_{\widetilde{w}[n]}^{2} = \frac{N}{2} \sum_{i=0}^{\infty} |f[i]|^{2}$$

$$f[i] = \frac{1}{2\pi j} \oint F(z)z^{i-1}dz = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{z^{i-1-u}}{H(z)}dz$$

July 3, 2019 24 / 87

Equalizador MMSE TSE

• No projeto MMSE, a distorção total em d[n] é considerada, ou seja,

$$d[n] - s_{n-u} = \sum_{i=0, i \neq u}^{\infty} c_i s_{n-i} + \sum_{i=0}^{\infty} f[i]w[n-i]$$

• O equalizador deve minimizar

$$|d[n] - s_{n-u}|^2$$

• Se, para o modelo de canal considerado,

$$R_{z}[m] = \overline{z[n+m]z^{*}[n]} = E_{s} \sum_{j=0}^{\infty} h_{m+j}h_{j}^{*} + \frac{\mathcal{N}}{2}\delta[m]$$

イロト イポト イヨト イヨ

Equalizador MMSE TSE

O equalizador MMSE é a solução das equações lineares

$$\sum_{i=0}^{\infty} f[i]R_{z}[l-i] = \begin{cases} E_{s}h[u-l]^{*} & l=0,1,\cdots, u\\ 0 & l=u+1,u+2,\cdots, \infty \end{cases}$$

• O atraso *u* na saída do equalizador influencia no desempenho dos equalizadores, sendo o seu valor ótimo calculado como

$$u_0 = \operatorname{argmax}_{u} \sum_{i=0}^{\infty} h_i f[u-i]$$

イロト イポト イヨト イヨト

- Para se obter uma expressão fechada para o equalizador, ainda é necessário admitir restrições para o filtro F(z)
- Os coeficientes do filtro *f*[*i*] podem ser calculados quando o filtro é do tipo FIR (*Finite Impulse Response*)
- O filtro FIR é da forma

$$F(z) = \sum_{i=0}^{M} f[i] z^{-i}$$

Nesse caso

$$\sum_{i=0}^{M} f[i]R_{z}[l-i] = \begin{cases} E_{s}h[u-l]^{*} & l=0,1,\cdots,u\\ 0 & l=u+1,u+2,\cdots,M \end{cases}$$

(I) < (II) < (II) < (II) < (II) < (III) </p>

• Se u < M, a forma matricial é dada por

$$\begin{bmatrix} R_{z}[0] & R_{z}[-1] & \cdots & R_{z}[-M] \\ R_{z}[1] & R_{z}[0] & \cdots & R_{z}[1-M] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{z}[M] & R_{z}[M-1] & \cdots & R_{z}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ \vdots \\ f[M] \end{bmatrix} = E_{s} \begin{bmatrix} n[u] \\ h[u-1]^{*} \\ \vdots \\ h[0]^{*} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

• Em que o vetor da direita tem M + 1 linhas

(日)

L[..]*

• Se u > M, a forma matricial é dada por

$$\begin{bmatrix} R_{z}[0] & R_{z}[-1] & \cdots & R_{z}[-M] \\ R_{z}[1] & R_{z}[0] & \cdots & R_{z}[1-M] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{z}[M] & R_{z}[M-1] & \cdots & R_{z}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ \vdots \\ f[M] \end{bmatrix} = E_{s} \begin{bmatrix} h[u]^{*} \\ h[u-1]^{*} \\ \vdots \\ h[u-M]^{*} \end{bmatrix}$$

- Pode-se verificar que essas equações pressupõem o conhecimento estatístico de $R_z[m]$
- Na prática, essa informação é estimada a partir de uma sequência de treinamento enviada

• Considerando a sequência de treinamento $\{s_n, n = n_1, n_1 + 1, \dots, n_2\}$, o equalizador FIR $F(z) = f[0] + f[1]z^{-1} + \dots + f[M]z^{-M}$ é dado por

$$\begin{bmatrix} \tilde{R}_{z}[0,0] & \tilde{R}_{z}[1,0] & \cdots & \tilde{R}_{z}[M,0] \\ \tilde{R}_{z}[0,1] & \tilde{R}_{z}[1,1] & \cdots & \tilde{R}_{z}[M,1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{R}_{z}[0,M] & \tilde{R}_{z}[1,M] & \cdots & \tilde{R}_{z}[M,M] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ \vdots \\ f[M] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{R}_{sz}[-u] \\ \tilde{R}_{sz}[u-1] \\ \vdots \\ \tilde{R}_{sz}[u-M] \end{bmatrix}$$

Em que

$$\tilde{R}_{z}[i,j] = \frac{1}{n_{2} - n_{1} + 1} \sum_{n=u+n_{1}}^{u+n_{2}} z[n-i]z^{*}[n-j]$$
$$\tilde{R}_{sz}[-u+j] = \frac{1}{n_{2} - n_{1} + 1} \sum_{n=u+n_{1}}^{u+n_{2}} s_{n-u}z^{*}[n-j]$$

Equalizador FSE

- No projeto dos equalizadores TSE, o sinal z(t) é amostrado a cada T segundos
- Na construção FSE (Fractionally Spaced Equalizers), o sinal z(t) é amostrado a cada T/m segundos
- Nesse caso, o equalizador é um banco de filtros



Estimação de Canal

- Em alguns tipos de projeto, como nos equalizadores MLSE, é necessário conhecer os parâmetros do canal {*h*[*k*]}
- Assim como foi feito para o projeto dos equalizadores TSE, é possível estimar esses parâmetros a partir dos dados, assim

$$\begin{bmatrix} \tilde{R}_{z}[0,0] & \tilde{R}_{z}[1,0] & \cdots & \tilde{R}_{z}[L,0] \\ \tilde{R}_{z}[0,1] & \tilde{R}_{z}[1,1] & \cdots & \tilde{R}_{z}[L,1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{R}_{z}[0,L] & \tilde{R}_{z}[1,L] & \cdots & \tilde{R}_{z}[L,L] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[L] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{r}_{sz}[0] \\ \tilde{r}_{sz}[1] \\ \vdots \\ \tilde{r}_{sz}[M] \end{bmatrix}$$

$$\bullet \text{ Em que}$$

$$\tilde{R}_{s}[j,k] \equiv \sum_{n_{1}+L}^{n_{2}} s_{n-k} s_{n-j}^{*}, j = 0, 1, \cdots, L$$
$$\tilde{r}_{sz}[j] \equiv \sum_{n_{1}+L}^{n_{2}} z[n] s^{*}[n-j]$$

(日) (同) (三) (三)

Equalizador com Feedback

- Os projetos anteriores (TSE e FSE) resultam em equalizadores lineares, pois não há memória
- Este tipo de projeto é mais simples e de baixa complexidade computacional
- Entretanto, para se alcançar a equalização sem o risco de amplificação de ruído é preferível usar a estrutura DFE (*Decision Feedback Equalizer*)



Simulação - Equalizador TSE

Considera-se o exercício 12.1 (Lathi)

- Constelação 16-QAM
- Símbolos transmitidos a cada T segundos
- Pulsos do tipo cosseno levantado (r = 0, 5; $B_T = 0, 75/T$) amostrados a cada T/8 segundos
- Multipercurso com dois raios resultando em

$$h(t) = g(t) - 0.65g(t - 3T/8)$$

Simulação - Equalizador TSE

```
    Pulso Root Raised Cosine
```

```
L = 1000000;
f_ovsamp = 8;
delay_rc = 4;
r = 0.5;
prcos = rcosflt([1],1,f_ovsamp,'sqrt',r,delay_rc);
prcos = prcos(1:end-f_ovsamp+1);
prcos = prcos/norm(prcos);
pcmatch = prcos(end:-1:1);
plot((1:length(prcos))/f_ovsamp,prcos)
```

イロト イポト イヨト イヨト 二日

Simulação - Equalizador TSE

• Pulso Root Raised Cosine



э

< /□ > < 三 >
• Pulsos QAM-16 são filtrados e enviados

イロト イポト イヨト イヨト

Densidade espectral de potência

```
% plot_PSD_Comparison
[Pdfx, fp] = pwelch (xrcos, [], [], 1024, 8, 'twosided');
[Pdfy, fq] = pwelch (xchout, [], [], 1024, 8, 'twosided');
figure (1); subplot (211);
semilogy (fp-f_ovsamp/2, fftshift (Pdfx), 'b-');
axis([-4 \ 4 \ 1.e-10 \ 1.2e0]);
xlabel('Frequencia(1/T_s)'); ylabel('Espectro_Potencia');
title('(a) Espectro_entrada_do_filtro_passa - baixas');
subplot (212);
semilogy (fq-f_ovsamp /2, fftshift (Pdfy), 'b-');
axis([-4 \ 4 \ 1.e-10 \ 1.2e0]);
xlabel('Frequencia(1/T_s)'); ylabel('Espectro_Potencia');
title('(b) Espectro_saida_do_filtro_passa - baixas');
```

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ □ ののの

• Densidade espectral de potência

- Filtro simula o efeito de um canal limitado em banda
- O espectro não sofre alterações significativas



• Canal equivalente (efeito de multipercurso)

```
mpath = [1 0 0 -0.65];%delta(t) - 0.65* delta(t - 3T/8)
h = conv(conv(prcos,pcmatch),mpath);
hscale = norm(h);
figure(4)
plot((1:length(h))/f_ovsamp,h);
xlabel('time(in_unit_of_T_s)');
title('Multipath_channel_impulse_response');
```

イロト イポト イヨト イヨト 二日

• Resposta do canal



3

イロト イポト イヨト イヨ

• Sinal e ruído na saída do canal

```
xchout = conv(mpath,xchout);
xrxout = conv(xchout,pcmatch);
delaychb = delayrc + 3;
out_mf = xrxout(delaychb+1:f_ovsamp:delaychb+L*f_ovsamp);
noiseq = randn(L*f_ovsamp,1) + j*randn(L*f_ovsamp,1);
noiseflt = filter(pcmatch,[1],noiseq);
noiseamp = noiseflt(1:f_ovsamp:L*f_ovsamp,1);
Es = 10*hscale;
```

< 日 > < 同 > < 回 > < 回 > < 回 > <

Diagrama do olho após o filtro casado (o ruído não é levado em conta)

```
eyevec = conv(xchout, prcos);
eyevec = eyevec(delaychb+1:(delaychb+800)*f_ovsamp);
eyediagram(real(eyevec),16,2);
title('Eye_diagram_(in-phase_component)')
xlabel('time_(in_unit_of_T_s)');
```

Diagrama do olho após o filtro casado (o ruído não é levado em conta)



э

イロト イポト イヨト イヨ

• Equalizador
$$(M = 8, u = 0)$$

```
Ntrain = 200; Neg = 8; u = 0; SERneg = []; SEReg = [];
for i = 1:13,
    Eb2N(i) = i * 2 - 1; Eb2N_num = 10^{(Eb2N(i)/10)};
    Var_n = Es/(2*Eb2N_num); signois = sqrt(Var_n/2);
    z1 = out_mf + signois * noiseamp;
    Z = toeplitz(z1(Neq+1:Ntrain), z1(Neq+1:-1:1));
    dvec = [s_data(Neq+1-u:Ntrain-u)];
    f = pinv(Z'*Z)*Z'*dvec; dsig = filter(f,1,z1);
    deq=sign(real(dsig(1:L)))+sign(real(dsig(1:L))-2)
       +sign (real (dsig (1:L))+2)+j*(sign (imag (dsig (1:L)))
       +sign (imag(dsig(1:L))-2)+sign (imag(dsig(1:L))+2));
    SERneq = [SERneq; sum(abs(s_data ~= dneq))/L];
    SEReq = [SEReq; sum(abs(s_data = deq))/L];
```

end

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ □ ののの

Resultados (Probabilidade de erro)

```
figure(2)
subplot(111)
figber = semilogy(Eb2Naz,Q, 'k-',Eb2N,SERneq, 'b-o',...
Eb2N,SEReq, 'b-v');
axis([0 26 .99e-5 1]);
legend('Analytical', 'Without_equalizer',...
'With_equalizer');
xlabel('E_b/N_(dB)');
ylabel('Symbol_error_probability');
set(figber, 'Linewidth',2);
```

< ロ > < 同 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 > < 0 >

• Resultados (Probabilidade de erro)



э

Image: A matching of the second se

```
    Resultados (Constelação)
```

```
figure(3)
subplot (121)
plot (real (z1 (1: min(L, 4000))), imag(z1 (1: min(L, 4000)...
   )),',');
axis('square'); xlabel('Real_part');
ylabel('Imaginary_part');
title('(a)_Before_equalization');
subplot (122)
plot (real (dsig (1: min(L, 4000))), imag(dsig (1: min(L, 4000)...
   )),'.');
axis('square'); xlabel('Real_part');
ylabel('Imaginary_part');
title('(b)_After_equalization');
```

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ □ ののの

Resultados (Constelação)



A B A B A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 B
 A
 A
 A
 A
 A

Comunicações com Multiportadoras

- No projeto dos equalizadores, a tarefa de lidar com os efeitos da ISI ficam a cargo do receptor
 - Uma operação de filtragem com ou sem feedback
 - O desempenho final pode não ser satisfatório
 - Uma pequena alteração dos parâmetros pode prejudicar consideravelmente o desempenho
- Considerando um canal de comprimento finito de ordem *L* caracterizado por

$$H(z) = \sum_{k=0}^{L} h[k] z^{-k}$$

• O transmissor em geral conhece *L*, mas os termos {*h*[*k*]} são desconhecidos

July 3, 2019 50 / 87

(I) < ((()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) <

Comunicações com Multiportadoras

- A técnica OFDM (Orthogonal Frequency Division Modulation) permite que o transmissor lide com os efeitos da ISI com esse conhecimento parcial do canal
- Em OFDM, são usadas várias portadoras (multiportadoras) ao invés de uma única
- Os sinais modulados são ortogonais no domínio do tempo
- Se T_s é o intervalo de símbolo com uma portadora, o intervalo de símbolo em OFDM é $T = NT_s$
- A separação entre as frequências é $f_k f_j = n/T, n = 1, 2, \cdots, N-1$
- Essa separação garante que sinais modulados (QAM por exemplo) nessas portadoras sejam ortogonais

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ □ ののの

Multiportadoras

OFDM



July 3, 2019 52 / 87

3

<ロト <問ト < 回ト < 回ト

• Considerando que uma sequência de dados $\{s_k\}$ é transmitida no canal H(z) de ordem L, a resposta em frequência é dada por

$$H(e^{j2\pi fT}) = \sum_{k=0}^{L} h[k]e^{-j2\pi fkT}$$

- Sendo T a duração do símbolo (período de amostragem)
- $H(e^{j2\pi fT})$ é uma função periódica em f com período 1/T
- A transformada discreta de Fourier (DFT) é uma função amostrada de H(e^{j2πfT})

イロト 不得 トイラト イラト 一日

ŀ

• Se N representa o total de amostras de frequência, a sequência da DFT é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[n] &= & \mathcal{H}(e^{j\omega_n T}) = \mathcal{H}(e^{j2\pi \frac{n}{NT}T}) = \sum_{k=0}^{L} h[k]e^{-j2\pi \frac{n}{NT}kT} \\ &= & \sum_{k=0}^{L} h[k]e^{-j2\pi \frac{nk}{N}}, \ n = 0, 1, \cdots, (N-1) \end{aligned}$$

• H[n] é periódica com período N, de modo que H[-n] = H[N - n]



• Como visto anteriormente, a saída do canal discreto pode ser representada como

$$z[k] = \sum_{k=0}^{L} h[i]s_{k-i} + w[k]$$

• Que na forma matricial é dada por

イロト イポト イヨト イヨト



E J Nascimento (Univasf)

July 3, 2019 56 / 87

3

< □ > < □ > < □ > < □ > < □ >

• Em OFDM, é introduzido um prefixo cíclico $\{s_N, s_{N-1}, \cdots, s_{N-L+1}\} \rightarrow \{s_0, s_{-1}, \cdots, s_{-(L-1)}\}$ de modo que



$$imes egin{array}{c|c} S_N & & & \\ S_{N-1} & & \\ \vdots & & \\ S_1 & & \\ S_N & & \\ \vdots & & \\ S_{N-\ell+1} & & \\ \end{array} + egin{array}{c|c} w[N] & & \\ w[N-1] & & \\ \vdots & \\ w[L] & & \\ \vdots & \\ w[1] & & \\ \end{array}$$

▲□ ▶ ▲ □ ▶ ▲ □ ▶ - □ □

Ou

h[0] h[1]h[L]••• 0 . . . z[N]*h*[0] h[1]h[L]0 : 0 . . . z[N - 1]·.. 0 : z[L] 0 *h*[0] h[1]h[L]h[L]h[L - 1]z[1] h[1]h[0]. . . $\begin{bmatrix} s_{N} \\ s_{N-1} \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w[N] \\ w[N-1] \end{bmatrix}$ × w[1]**S**1

3

< □ > < □ > < □ > < □ > < □ >

 Com a introdução do prefixo cíclico, a matriz de convolução de canal é convertida em uma matriz bem estruturada *H_{cp}* de ordem *N* × *N* Para representar a DFT e a DFT inversa na forma matricial, define-se

$$W_N = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}\right)$$

• De modo que $W_N^N = 1$ e $W_N^{-i} = W_N^{N-i}$ • A DFT de um vetor $\mathbf{v} = [v_0 \cdots v_{N-1}]$ é dada por

$$V[n] = \sum_{k=0}^{N-1} v_k e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} v_k W_N^{nk}, \ n = 0, 1, \cdots, (N-1)$$

Verifica-se que

$$V[-n] = \sum_{k=0}^{N-1} v_k e^{j2\pi \frac{nk}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} v_k W_N^{nk}, \ n = 0, 1, \cdots, (N-1)$$

• A DFT inversa é dada por

$$v_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} V[n] e^{j2\pi \frac{nk}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} V[n] W_N^{-nk}, \ k = 0, \cdots, (N-1)$$

Э

< □ > < □ > < □ > < □ > < □ >

• O vetor DFT de v pode ser escrito como

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V[0] \\ V[1] \\ \vdots \\ V[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_N^{0.0} & W_N^{0.1} & \cdots & W_N^{0.(N-1)} \\ W_N^{1.0} & W_N^{1.1} & \cdots & W_N^{1.(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ W_N^{(N-1).0} & W_N^{(N-1).1} & \cdots & W_N^{(N-1).(N-1)} \end{bmatrix} .\mathbf{v}$$

• A matriz de DFT pode ser escrita como

$$\mathbf{W}_{N} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_{N}^{1} & \cdots & W_{N}^{(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_{N}^{(N-1)} & \cdots & W_{N}^{(N-1)^{2}} \end{bmatrix}$$

E J Nascimento (Univasf)

July 3, 2019 61 / 87

크

• A inversa de \mathbf{W}_N é dada por

$$\mathbf{W}_{N}^{-1} \equiv \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_{N}^{-1} & \cdots & W_{N}^{-(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & W_{N}^{-(N-1)} & \cdots & W_{N}^{-(N-1)^{2}} \end{bmatrix}$$

• Assim, $\mathbf{V} = \mathbf{W}_N \cdot \mathbf{v} \in \mathbf{v} = \mathbf{W}_N^{-1} \cdot \mathbf{V}$

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ ● ○○○

• Pode-se verificar que

$$\mathcal{H}_{cp}\mathbf{W}_{N}^{-1} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_{N}^{-1} & \cdots & W_{N}^{-(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & W_{N}^{-(N-1)} & \cdots & W_{N}^{-(N-1)^{2}} \end{bmatrix}$$
$$\cdot \begin{bmatrix} H[0] \\ H[-1] \\ & \ddots \\ & H[-N+1] \end{bmatrix} = \mathbf{W}_{N}^{-1} \cdot \mathbf{D}_{H}$$

<ロト <問ト < 回ト < 回ト

• Pela periodicidade da DFT

$$\mathbf{D}_{H} = \begin{bmatrix} H[N] & & \\ & H[N-1] & \\ & & \ddots & \\ & & & H[1] \end{bmatrix}$$

• Assim,

$$\mathcal{H}_{cp} = \mathbf{W}_{N}^{-1} \cdot \mathbf{D}_{H} \cdot \mathbf{W}_{N}$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{W}_{N}\right)^{-1} \cdot \mathbf{D}_{H} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{W}_{N}\right)$$

3

< □ > < □ > < □ > < □ > < □ >

• A saída do canal pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} z[N] \\ z[N-1] \\ \vdots \\ z[1] \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{W}_N\right)^{-1} \cdot \mathbf{D}_H \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{W}_N\right) \begin{bmatrix} s_N \\ s_{N-1} \\ \vdots \\ s_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w[N] \\ w[N-1] \\ \vdots \\ w[1] \end{bmatrix}$$

• Se a informação for colocada em

$$\tilde{\mathbf{s}} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{s}_{N} \\ \tilde{s}_{N-1} \\ \vdots \\ \tilde{s}_{1} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{W}_{N}\right) \begin{bmatrix} s_{N} \\ s_{N-1} \\ \vdots \\ s_{1} \end{bmatrix}$$

크

Os símbolos OFDM são obtidos por

$$\mathbf{s} \equiv \begin{bmatrix} s_{N} \\ s_{N-1} \\ \vdots \\ s_{1} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{W}_{N}\right)^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{s}_{N} \\ \tilde{s}_{N-1} \\ \vdots \\ \tilde{s}_{1} \end{bmatrix}$$

 Assim, para se obter os símbolos OFDM, deve-se aplicar a IDFT (DFT inversa) na fonte de informação para em seguida se adicionar o prefixo cíclico

イロト イポト イヨト イヨ

Multiportadoras

OFDM



July 3, 2019 67 / 87

3

< □ > < □ > < □ > < □ > < □ >

De modo similar, para a saída do canal e vetor de ruído, tem-se



(I) < (II) < (II) < (II) < (II) < (III) </p>

• Dessa forma, com a aplicação da DFT se chega a seguinte relação

$$\tilde{z} = D_H \tilde{s} + \tilde{w}$$

 Como D_H é uma matriz diagonal, a relação entre cada uma das N componentes do vetor é dada por

$$\tilde{z}[n] = H[n]\tilde{s}_n + \tilde{w}[n], n = 1, \cdots, N$$

 A consequência disso, é que com a aplicação de OFDM se tem N subcanais independentes com um ganho escalar H[n]

- Cada subcanal *H*[*n*] é conhecido como uma subportadora
- Um vetor com *N* símbolos OFDM é chamado de quadro OFDM (OFDM frame)

• N subcanais AWGN independentes sem ISI

• $\tilde{w}[n]$ tem média nula e variância $\mathcal{N}/2$

• Os subcanais não são seletivos em frequência (ganho constante)



- Ao invés da utilização do prefixo cíclico, é possível obter uma matriz de convolução de canal circular com a adição de zeros (zero-padded OFDM)
- Nesse caso, após a aplicação da IFDT, são adicionados L zeros



No receptor, os símbolos z[n] são organizados da forma

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} z[N] \\ z[N-1] \\ \vdots \\ z[L] \\ \vdots \\ z[1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z[N+L] \\ \vdots \\ z[N+1] \end{bmatrix}$$

 Com isso, a mesma relação de independência entre os canais é obtida para

$$\tilde{\mathbf{z}} = \left(\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{W}_N\right)\mathbf{y}$$

E J Nascimento (Univasf)

July 3, 2019 72 / 87

3
OFDM

- Em resumo, a utilização de OFDM transforma um canal com ISI em N subcanais AWGN
- Para empregar a técnica, é necessário conhecer a ordem do canal FIR (o comprimento do prefixo cíclico L
- N símbolos $\{\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_N\}$ são transmitidos no intervalo de duração (N + L)T, resultando em uma taxa efetiva de

$$\frac{N}{N+L}\frac{1}{T}$$

• Se L for superestimado, desperdiça-se largura de banda

(I) < ((()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) <

OFDM

 No receptor OFDM, a tarefa de equalização se reduz a uma compensação do ganho do canal



DMT

- Em OFDM, o transmissor não precisa conhecer o canal, apenas a sua ordem *L*
- A modulação DMT (discrete multitone) é uma variação do OFDM na qual o transmissor possui informação de cada subcanal
 - Essa informação pode ser utilizada para que se empregue uma constelação diferente QAM em cada subportadora
- Com DMT, o desempenho pode ser otimizado através de
 - Alocação de potência (energia) de subportadoras para maximizar a SNR média
 - Alocação de bits nas subportadoras para equalizar a taxa de erro de bit

(I) < ((()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) <

DMT

• Se no *i*-ésimo subcanal, o fluxo $\{s_i[k]\}$ possui potência média $P_i = \overline{|s_i[k]|^2}$ com $\sum P_i = P$, então a distribuição ótima de potência é dada por

$$P_i = \frac{|H[i]|^2}{\sum_{i=1}^N |H[i]|^2} P$$

- Assim, a estratégia ótima é alocar mais potência em subcanais com maior ganho
- A potência não é desperdiçada em subcanais com ganho nulo

イロト イポト イヨト イヨト

DMT

• Com a informação sobre o canal, o transmissor conhece a SNR em cada subportadora

$$SNR_i = \frac{2|H[i]|^2}{\mathcal{N}} \overline{|s_i[k]|^2}$$

- A BER depende da SNR e da constelação utilizada
- Se cada subcanal transporta K_i bits e possui uma BER $P_b[i]$, então

$$P_b = \frac{\sum_{i=1}^N K_i \cdot P_b[i]}{\sum_{i=1}^N K_i}$$

 Subcanais com ganhos menores devem transportar menos bits (constelações menores), enquanto que os melhores subcanais devem transportar mais bits

(I) < ((()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) < (()) <

• Considera-se o exercício 12.3 (Lathi)

- Constelação 16-QAM
- Canal FIR (L = 5)
- OFDM com 32 subportadoras e uso do prefixo cíclico
- Uso da FFT (direta e inversa) para implementar a DFT

• Dados QAM e canal discreto

<ロト <回ト < 回ト < 回ト

• Dados QAM em uma matriz (32xLfr), IFFT, prefixo cíclico, etc.

3

<ロト < 四ト < 回ト < 回ト

Ruído e decisão

```
for ii = 1:31.
    SNR(ii) = ii -1;
    Asig = sqrt(Psig*10^{(-SNR(ii)/10)})*norm(channel);
    x_out = chsout + Asig*noiseq;
    x_para = reshape(x_out, 37, Lfr);
    x_disc = x_para(6:37,:);
    xhat_para = fft(x_disc);
    z_data = inv(diag(hf))*xhat_para;
    deq=sign(real(z_data))+sign(real(z_data)-2) ...
       +sign(real(z_data)+2)+i * (sign(imag(z_data))...
       +sign(imag(z_data)-2)+sign(imag(z_data)+2));
    SEReq = [SEReq sum(p_data^{=}deq, 2)/Lfr];
end
```

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ □ ののの

Comparação com AWGN e resposta em frequência do canal

イロト イポト イヨト イヨト 二日

• Resposta em frequência do canal



E J Nascimento (Univasf)

→ ▲ 重 → 重 → ⊃ < ○ July 3, 2019 83 / 87

```
    Constelação por subportadora

 figure (3):
 subplot (221); plot (z_data (1,1:800), '. ')
 vlabel('Imaginary');
 title('(a)_Subchannel_1_output');
 axis('square');
 subplot (222); plot (z_data (10, 1:800), '. ')
 vlabel('Imaginary');
 title('(b)_Subchannel_10_output');
 subplot(223); plot(z_data(15,1:800), '. ')
 xlabel('Real');
 ylabel('Imaginary');
 title('(c)_Subchannel_15_output');
 subplot (224); plot (z_data (:,1:800), 'b.')
 xlabel('Real');
 ylabel('Imaginary');
 title('(d)_Mixed_OFDM_output');
                                       ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ □ ののの
```

Constelação



। ▶ ◀ ≣ ▶ ≣ • ी ९ ९ July 3, 2019 85 / 87

Probabilidade de erro de símbolo

```
figure (4);
figc = semilogy (SNRa,Q, 'k-',SNR, mean(SEReq),...
        'b-o',SNR,...
        mean([SEReq(1:14,:);SEReq(20:32,:)]), 'b-s');
set(figc, 'LineWidth',2);
legend('Ideal_channel', 'Using_all_subcarriers',...
        'Disabling_5_poor_subcarriers')
title('Average_OFDM_SER');
axis([1 30 1.e-4 1]);
xlabel('SNR_(dB)');
ylabel('Symbol_Error_Rate_(SER)');
```

イロト 不得下 イヨト イヨト 二日

Probabilidade de erro de símbolo

