

Receptores Ótimos para Canais AWGN

E J Nascimento

Universidade Federal do Vale do São Francisco

www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento

May 29, 2019

Roteiro

- 1 Regras de Decisão
- 2 Cálculo da Probabilidade de Erro
- 3 Extras

Introdução

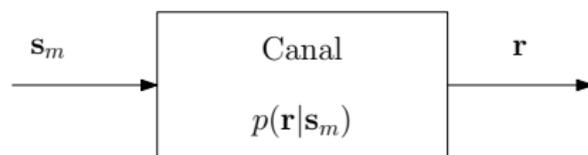
- O modelo AWGN (Additive white Gaussian noise) consiste em adicionar ruído ao sinal modulado
 - O ruído é branco - DEP constante ($\mathcal{N}/2$)
 - O ruído é um processo aleatório gaussiano $n(t)$ ESA de média nula
- Se o sinal modulado $s_m(t)$ foi transmitido, a forma de onda recebida é dada por

$$r(t) = s_m(t) + n(t)$$

- O receptor observa $r(t)$ e toma uma decisão ótima
 - Decisão que minimiza a probabilidade de erro
 - Escolhe um \hat{m} que minimiza $P_e = P[\hat{m} \neq m]$, $1 \leq m \leq M$

Representação Vetorial

- Considerando que os M sinais podem ser representados por vetores N -dimensionais \mathbf{s}_m
 - P_m representa a probabilidade *a priori*
 - A fdp condicionada $p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)$ caracteriza o canal



- O receptor decide por uma mensagem \hat{m} a partir de \mathbf{r}
 - $\hat{m} = g(\mathbf{r}), g(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^N \rightarrow \{1, 2, \dots, M\}$

Representação Vetorial

- Definem-se as probabilidades

$$\begin{aligned}
 P[\text{decisão correta}|\mathbf{r}] &= P[\hat{m} \text{ enviada}|\mathbf{r}] \\
 P[\text{decisão correta}] &= \int P[\text{decisão correta}|\mathbf{r}]p(\mathbf{r})d\mathbf{r} \\
 &= \int P[\hat{m} \text{ enviada}|\mathbf{r}]p(\mathbf{r})d\mathbf{r}
 \end{aligned}$$

- O objetivo é projetar um detector que maximize a probabilidade de decisão correta
- Como $p(\mathbf{r})$ é não negativa, essa operação equivale a maximizar $P[\hat{m}|\mathbf{r}]$

Regra MAP

- A regra MAP (*Maximum a posteriori probability*) é definida como

$$\begin{aligned}
 \hat{m} &= g_{opt}(\mathbf{r}) = \underset{1 \leq m \leq M}{\operatorname{argmax}} P[m|\mathbf{r}] \\
 &= \underset{1 \leq m \leq M}{\operatorname{argmax}} P[\mathbf{s}_m|\mathbf{r}] \\
 &= \underset{1 \leq m \leq M}{\operatorname{argmax}} \frac{P_m p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)}{p(\mathbf{r})} \\
 &= \underset{1 \leq m \leq M}{\operatorname{argmax}} P_m p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)
 \end{aligned}$$

- Na última igualdade foi usado o fato que $p(\mathbf{r})$ é independente de m
- Assim, a decisão ótima depende das probabilidades a priori e do canal

Regra ML

- Quando todas as mensagens possuem a mesma probabilidade a priori ($P_m = 1/M$), a regra de decisão ótima é simplificada para

$$\hat{m} = \underset{1 \leq m \leq M}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)$$

- O receptor que implementa essa regra é chamado de receptor de máxima verossimilhança (ML - maximum-likelihood)
- O termo $p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)$ representa a verossimilhança da mensagem m
- O receptor ML só é ótimo se todas as mensagens forem equiprováveis

Regiões de Decisão

- A regra de decisão implementada por um detector particiona o \mathbb{R}^N em M regiões denotadas por D_1, D_2, \dots, D_M
- Se $\mathbf{r} \in D_m$, então $\hat{m} = g(\mathbf{r}) = m$, ou seja, o detector decide por m
- D_m é a região de decisão da mensagem m
- Em um detector MAP,

$$D_m = \{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^N : P[m|\mathbf{r}] > P[m'|\mathbf{r}], \forall 1 \leq m' \leq M, m' \neq m \}$$

Probabilidade de Erro

- Quando \mathbf{s}_m é transmitido, um erro ocorre quando \mathbf{r} não está em D_m
- A probabilidade de erro de símbolo é dada por

$$P_e = \sum_{m=1}^M P_m P[\mathbf{r} \notin D_m | \mathbf{s}_m \text{ foi enviado}] = \sum_{m=1}^M P_m P_{e|m}$$

$$P_{e|m} = \int_{D_m^c} p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) d\mathbf{r} = \sum_{1 \leq m' \leq M, m' \neq m} \int_{D_{m'}} p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) d\mathbf{r}$$

$$P_e = \sum_{m=1}^M P_m \sum_{1 \leq m' \leq M, m' \neq m} \int_{D_{m'}} p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) d\mathbf{r}$$

Probabilidade de Erro

- A probabilidade de erro definida anteriormente se refere a símbolos ou mensagens
- Como cada símbolo corresponde a $k = \log_2 M$ bits, um símbolo errado pode resultar no máximo em k bits errados
- O cálculo da probabilidade de erro de bit P_b depende do mapeamento realizado e pode não ser trivial
- Apesar disso, tem-se que

$$P_b \leq P_e \leq kP_b$$

$$\frac{P_e}{\log_2 M} \leq P_b \leq P_e$$

Formas de Ondas e Vetores

- No modelo AWGN, a forma de onda recebida é dada por

$$r(t) = s_m(t) + n(t)$$

- Os sinais $s_m(t)$ podem ser representados em uma base $\{\phi_j(t), 1 \leq j \leq N\}$
- O ruído possui duas partes $n(t) = n_1(t) + n_2(t)$
 - $n_1(t)$ é a parte que pode ser expandida na base $\{\phi_j(t), 1 \leq j \leq N\}$

$$n_1(t) = \sum_{j=1}^N n_j \phi_j(t), \quad n_j = \langle n(t), \phi_j(t) \rangle$$

- Pode-se mostrar que a parte $n_2(t)$ é decorrelacionada das componentes n_j e portanto não influencia no processo de decisão

Formas de Ondas e Vetores

- Assim o canal AWGN é equivalente ao canal vetorial N -dimensional

$$\mathbf{r} = \mathbf{s}_m + \mathbf{n}$$

- Em que o vetor $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N)$
- Além disso, as componentes n_j são variáveis aleatórias gaussianas, decorrelacionadas (independentes) e de variância $\mathcal{N}/2$ cada
- O vetor \mathbf{n} pode ser caracterizado por uma fdp gaussiana N -dimensional

Detecção Ótima

- O detector MAP é dado por

$$\begin{aligned}
 \hat{m} &= \operatorname{argmax}_{1 \leq m \leq M} P_m p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) = \operatorname{argmax}_{1 \leq m \leq M} P_m p_n(\mathbf{r} - \mathbf{s}_m) \\
 &= \operatorname{argmax}_{1 \leq m \leq M} P_m \left(\frac{1}{\sqrt{\pi \mathcal{N}}} \right)^N e^{-\frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_m\|^2}{\mathcal{N}}} \\
 &= \operatorname{argmax}_{1 \leq m \leq M} P_m e^{-\frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_m\|^2}{\mathcal{N}}} \\
 &= \operatorname{argmax}_{1 \leq m \leq M} \ln P_m - \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_m\|^2}{\mathcal{N}} \\
 &= \operatorname{argmax}_{1 \leq m \leq M} \frac{\mathcal{N}}{2} \ln P_m - \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_m\|^2}{2}
 \end{aligned}$$

Detecção Ótima

- Continuando

$$\begin{aligned}
 \hat{m} &= \operatorname{argmax}_{1 \leq m \leq M} \frac{\mathcal{N}}{2} \ln P_m - \frac{1}{2} (\|\mathbf{r}\|^2 + \|\mathbf{s}_m\|^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m) \\
 &= \operatorname{argmax}_{1 \leq m \leq M} \frac{\mathcal{N}}{2} \ln P_m - \frac{1}{2} E_m + \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m \\
 &= \operatorname{argmax}_{1 \leq m \leq M} \eta_m + \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m
 \end{aligned}$$

- Em que

$$\eta_m = \frac{\mathcal{N}}{2} \ln P_m - \frac{1}{2} E_m$$

- É chamado de termo de viés (*bias*)

Detecção Ótima (MAP)

- Assim a regra MAP é dada por

$$\hat{m} = \operatorname{argmax}_{1 \leq m \leq M} (\eta_m + \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m)$$

$$\eta_m = \frac{\mathcal{N}}{2} \ln P_m - \frac{1}{2} E_m$$

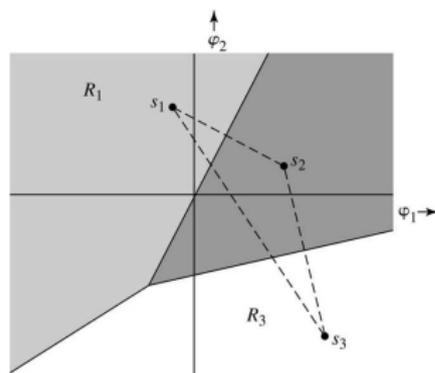
- Se os sinais forem equiprováveis, a regra é simplificada para

$$\hat{m} = \operatorname{argmax}_{1 \leq m \leq M} \frac{\mathcal{N}}{2} \ln P_m - \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_m\|^2}{2}$$

$$= \operatorname{argmax}_{1 \leq m \leq M} (-\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_m\|^2) = \operatorname{argmin}_{1 \leq m \leq M} \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_m\|$$

Detecção Ótima (MAP)

- Nesse caso, o receptor decide pelo sinal mais próximo do vetor recebido (detector de distância mínima)
- Região de decisão delimitadas pelas mediatrizes dos segmentos de reta que ligam os vetores da constelação



Detecção Ótima (MAP)

- Se ainda os sinais forem equiprováveis e de mesma energia, a regra se reduz a

$$\hat{m} = \underset{1 \leq m \leq M}{\operatorname{argmax}}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m)$$

- No caso geral, as regiões de decisão são computadas como

$$D_m = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^N : \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m + \eta_m > \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_{m'} + \eta_{m'}, \forall 1 \leq m' \leq M, m \neq m'\}$$

Detecção Ótima (MAP)

- No caso da sinalização binária antipodal: $s_1(t) = -s_2(t) = s(t)$, com probabilidades a priori p e $1 - p$ e $E_{s_1} = E_{s_2} = E_s = E_b$, tem-se que

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{ r : r\sqrt{E_b} + \frac{\mathcal{N}}{2} \ln p - \frac{E_b}{2} > -r\sqrt{E_b} + \frac{\mathcal{N}}{2} \ln(1 - p) - \frac{E_b}{2} \right\} \\ &= \left\{ r : r > \frac{\mathcal{N}}{4\sqrt{E_b}} \ln \frac{1 - p}{p} \right\} = \{ r : r > r_{lim} \} \end{aligned}$$

- Em que r_{lim} representa o limiar de decisão ($r_{lim} = 0$ para sinais equiprováveis)

Detecção Ótima (MAP)

- A probabilidade de erro é dada por

$$\begin{aligned}
 P_e &= \sum_{m=1}^2 P_m \sum_{1 \leq m' \leq 2, m' \neq m} \int_{D_{m'}} p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m) d\mathbf{r} \\
 &= pQ\left(\frac{\sqrt{E_b} - r_{lim}}{\sqrt{\mathcal{N}/2}}\right) + (1-p)Q\left(\frac{\sqrt{E_b} + r_{lim}}{\sqrt{\mathcal{N}/2}}\right)
 \end{aligned}$$

- Se os sinais são equiprováveis, então

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\mathcal{N}}}\right) = P_b$$

Detecção Ótima (MAP)

- Em geral, pode-se mostrar que para sinais binários equiprováveis

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{d_{12}^2}{2\mathcal{N}}}\right)$$

- Em que $d_{12} = \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1\|$
- Assim, para sinais binários ortogonais

$$\mathbf{s}_1 = (\sqrt{E_b}, 0), \quad \mathbf{s}_2 = (0, \sqrt{E_b})$$

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{\mathcal{N}}}\right)$$

Implementação do Receptor Ótimo para Canais AWGN

- O receptor ótimo pode ser implementado de modos equivalentes: correlador e filtro casado
- A regra MAP é implementada

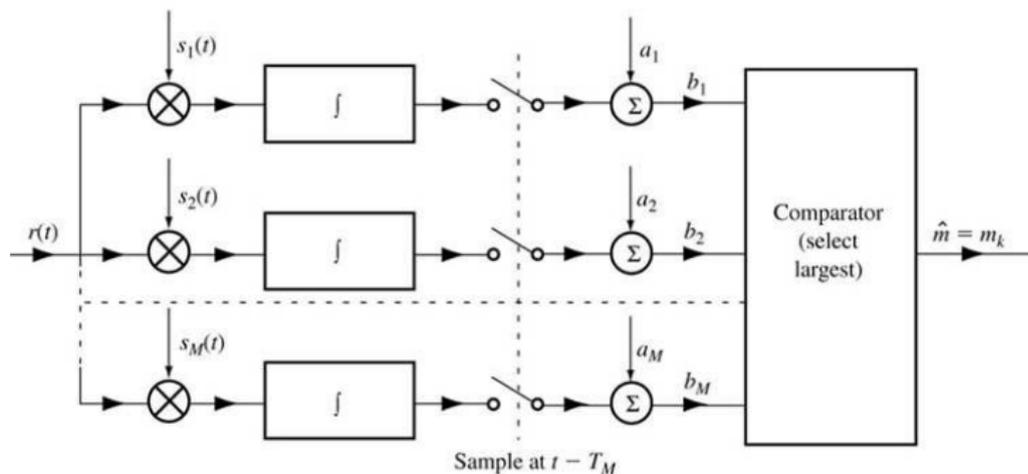
$$\hat{m} = \underset{1 \leq m \leq M}{\operatorname{argmax}} (\eta_m + \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m)$$

$$\eta_m = \frac{\mathcal{N}}{2} \ln P_m - \frac{1}{2} E_m$$

- O receptor de correlação pode ser implementado com N ou M correladores

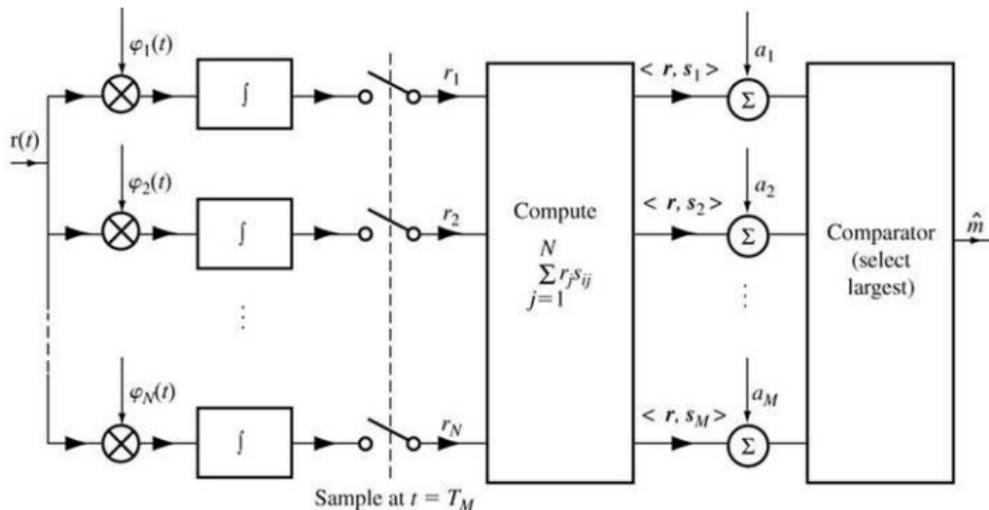
Implementação do Receptor Ótimo para Canais AWGN

- Com M correladores



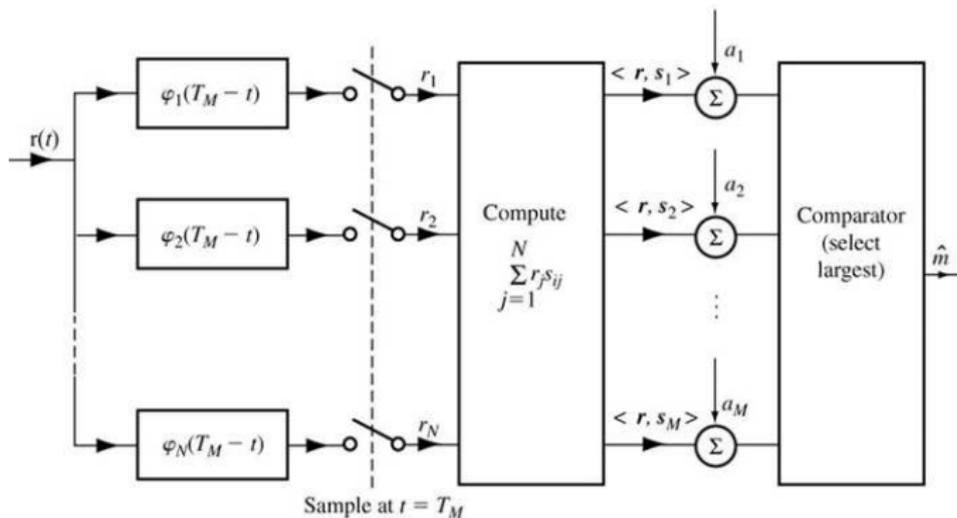
Implementação do Receptor Ótimo para Canais AWGN

- Com N correladores



Implementação do Receptor Ótimo para Canais AWGN

- Com N filtros casados



Probabilidade de Erro (Limitantes)

- Calcular a probabilidade de erro de símbolo consiste em resolver

$$P_e = \sum_{m=1}^M P_m \sum_{1 \leq m' \leq M, m' \neq m} \int_{D_{m'}} p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m) d\mathbf{r}$$

- Para muitas constelações, não é possível obter uma expressão definida para P_e
- Uma maneira de se ter um valor aproximado para P_e é através da derivação de limitantes (*bounds*)
 - Limitantes inferiores (*lower bounds*) e limitantes superiores (*upper bounds*)
 - Limitantes podem ser frouxos (*loose*) ou apertados (*tight*)

Probabilidade de Erro (Limitantes)

- O limitante da união é um limitante superior para o canal AWGN dado por

$$\begin{aligned}
 P_e &\leq \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{1 \leq m' \leq M, m' \neq m} Q\left(\sqrt{\frac{d_{mm'}^2}{2\mathcal{N}}}\right) \\
 &\leq \frac{1}{2M} \sum_{m=1}^M \sum_{1 \leq m' \leq M, m' \neq m} e^{-\frac{d_{mm'}^2}{4\mathcal{N}}}
 \end{aligned}$$

- Na última desigualdade foi usada a aproximação $Q(x) \leq 1/2e^{-x^2/2}$
- Verifica-se que essa última expressão depende apenas do perfil das distâncias da constelação

Probabilidade de Erro (Limitantes)

- Definindo-se a distância mínima da constelação como

$$d_{min} = \min_{1 \leq m, m' \leq M, m' \neq m} \| \mathbf{s}_m - \mathbf{s}_{m'} \|$$

- Uma versão mais frouxa do limitante da união é dada por

$$\begin{aligned} P_e &\leq (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{d_{min}^2}{2\mathcal{N}}}\right) \\ &\leq \frac{M-1}{2}e^{-\frac{d_{min}^2}{4\mathcal{N}}} \end{aligned}$$

- Assim, pode-se notar que a distância mínima em uma constelação é um fator que afeta o desempenho de um sistema de comunicação digital

Probabilidade de Erro (Limitantes)

- Derivações similares podem ser utilizadas para se obter um limitante inferior para P_e
- Pode-se mostrar que

$$P_e \geq \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M Q\left(\frac{d_{mm'}}{\sqrt{2N}}\right)$$

- Em que um limitante mais apertado é dado por

$$P_e \geq \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \max_{m' \neq m} Q\left(\frac{d_{mm'}}{\sqrt{2N}}\right)$$

Probabilidade de Erro (Limitantes)

- Definido-se N_{min} como o número de pontos na constelação que estão a uma distância de d_{min} de no mínimo outro ponto da constelação, tem-se

$$P_e \geq \frac{N_{min}}{M} Q\left(\frac{d_{min}}{\sqrt{2\mathcal{N}}}\right)$$

- Assim,

$$\frac{N_{min}}{M} Q\left(\frac{d_{min}}{\sqrt{2\mathcal{N}}}\right) \leq P_e \leq (M-1) Q\left(\frac{d_{min}}{\sqrt{2\mathcal{N}}}\right)$$

Sinalizações Limitadas em Banda

- As sinalizações PAM (ASK), PSK e QAM possuem dimensão de no máximo $N = 2$, independentemente do número de sinais M
 - Possuem baixos requisitos de largura de banda
 - A eficiência de potência (energia) diminui com o aumento de M
- No caso do ASK, foi visto que d_{min} é dado por

$$d_{min} = \sqrt{2E_g} = \sqrt{\frac{12 \log_2 M}{M^2 - 1} E_{(b)MED}}$$

- Com os vetores dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_m &= A_m \sqrt{\frac{E_g}{2}}, \quad A_m = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1) \\ &= \pm \frac{d_{min}}{2}, \pm 3 \frac{d_{min}}{2}, \dots, \pm(M-1) \frac{d_{min}}{2} \end{aligned}$$

Sinalizações Limitadas em Banda (ASK)

- Nessa constelação, há $M - 2$ pontos internos e 2 pontos externos
- Sendo P_{ei} e P_{ee} as probabilidades de erro dos pontos internos e externos, respectivamente, tem-se que

$$P_{ei} = P[|n| > \frac{1}{2}d_{min}] = 2Q\left(\frac{d_{min}}{\sqrt{2\mathcal{N}}}\right)$$

$$P_{ee} = \frac{1}{2}P_{ei} = Q\left(\frac{d_{min}}{\sqrt{2\mathcal{N}}}\right)$$

- Se os símbolos são equiprováveis, P_e é dada por

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M P[\text{erro} | m \text{ enviado}] \\ &= \frac{1}{M} \left[2(M - 2)Q\left(\frac{d_{min}}{\sqrt{2\mathcal{N}}}\right) + 2Q\left(\frac{d_{min}}{\sqrt{2\mathcal{N}}}\right) \right] \end{aligned}$$

Sinalizações Limitadas em Banda (ASK)

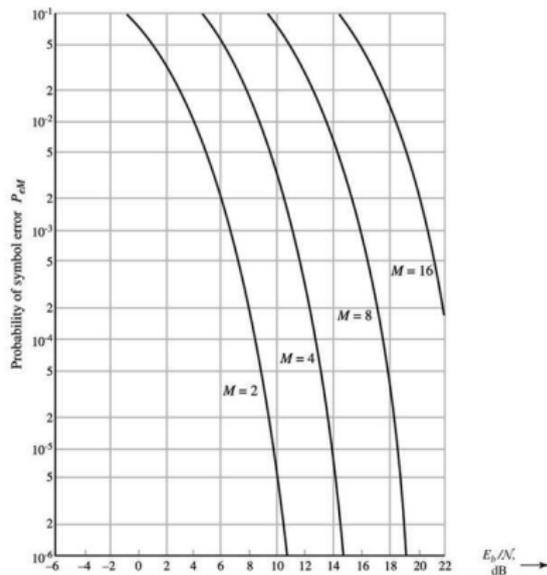
- Ou seja,

$$\begin{aligned}
 P_e &= \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\frac{d_{min}}{\sqrt{2\mathcal{N}}}\right) \\
 &= 2\left(1 - \frac{1}{M}\right) Q\left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M}{M^2 - 1} \frac{E_{(b)MED}}{\mathcal{N}}}\right) \\
 &\approx 2Q\left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M}{M^2 - 1} \frac{E_{(b)MED}}{\mathcal{N}}}\right), \quad M \text{ grande}
 \end{aligned}$$

- O termo $\frac{6 \log_2 M}{M^2 - 1}$ vai para 0 quando $M \rightarrow \infty$
 - A SNR por bit ($E_{(b)MED}/\mathcal{N}$) deve crescer para manter a mesma P_e
 - Para M grande, dobrar M requer 6 dB a mais na SNR para manter o mesmo desempenho

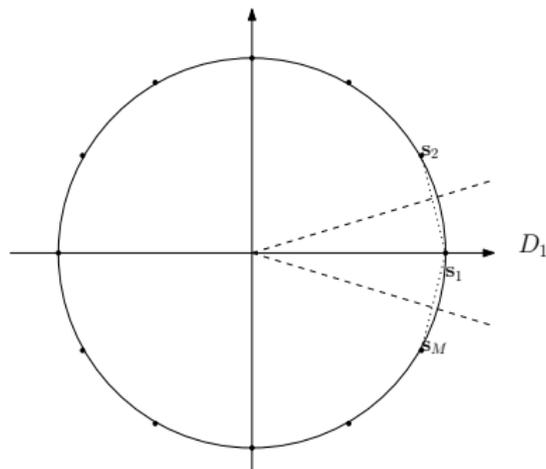
Sinalizações Limitadas em Banda (ASK)

- Probabilidade de erro de símbolo (ASK)



Sinalizações Limitadas em Banda (PSK)

- Uma constelação M-PSK equiprovável é representada por



- Pela simetria, P_e pode ser calculada considerando que $\mathbf{s}_1 = (\sqrt{E}, 0)$ foi transmitido

Sinalizações Limitadas em Banda (PSK)

- Assim, o sinal recebido é representado por

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2) = (\sqrt{E} + n_1, n_2)$$

- Com fdp conjunta dada por

$$p(r_1, r_2) = \frac{1}{\pi \mathcal{N}} e^{-\frac{(r_1 - \sqrt{E})^2 + r_2^2}{\mathcal{N}}}$$

- Transformando para coordenadas polares, com $V = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ e $\Theta = \arctan r_2/r_1$, tem-se

$$p_{V,\Theta}(v, \theta) = \frac{v}{\pi \mathcal{N}} e^{-\frac{v^2 + E - 2\sqrt{E}v \cos \theta}{\mathcal{N}}}$$

Sinalizações Limitadas em Banda (PSK)

- A distribuição marginal em Θ é dada por

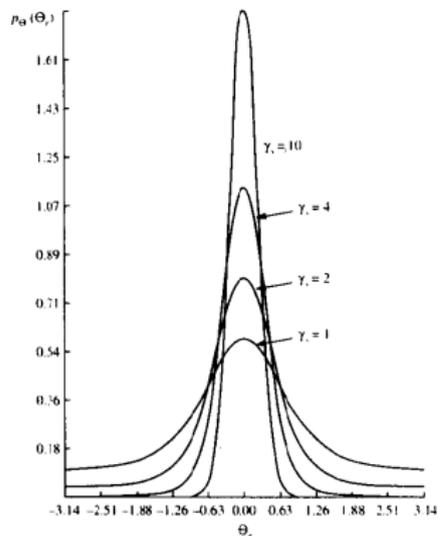
$$\begin{aligned} p_{\Theta}(\theta) &= \int_0^{\infty} p_{V,\Theta}(v, \theta) dv \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\gamma_s \sin^2 \theta} \int_0^{\infty} v e^{-\frac{(v - \sqrt{2\gamma_s} \cos \theta)^2}{2}} dv \end{aligned}$$

- Em que $\gamma_s = E/\mathcal{N}$ é a SNR por símbolo
- Como $D_1 = \{\theta : -\pi/M < \theta \leq \pi/M\}$, P_e é dada por

$$P_e = 1 - \int_{-\pi/M}^{\pi/M} p_{\Theta}(\theta) d\theta$$

Sinalizações Limitadas em Banda (PSK)

- Distribuição $p_{\Theta}(\theta)$



Sinalizações Limitadas em Banda (PSK)

- Uma expressão simples para P_e não é possível de ser obtida para todo M , apenas para casos particulares
- Se $M = 2$ (sinalização binária antipodal)

$$P_e = P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\mathcal{N}}}\right)$$

- Se $M = 4$ (QPSK)

$$P_e = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\mathcal{N}}}\right) \left[1 - \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\mathcal{N}}}\right)\right]$$

- Para $M > 4$, P_e é obtido através de integração numérica

Sinalizações Limitadas em Banda (PSK)

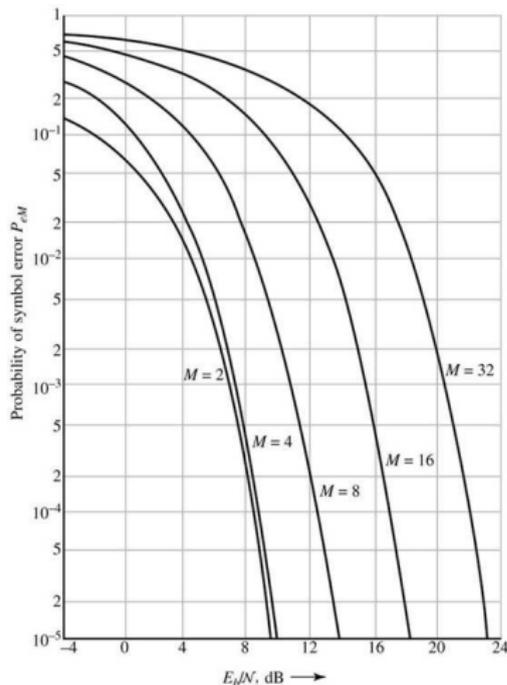
- Entretanto, aproximações podem ser obtidas quando M e a SNR são grandes
- Nesse caso,

$$\begin{aligned}
 P_e &\approx 2Q\left(\sqrt{(2 \log_2 M) \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right) \frac{E_b}{\mathcal{N}}}\right) \\
 &\approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2\pi^2 \log_2 M E_b}{M^2 \mathcal{N}}}\right)
 \end{aligned}$$

- De modo similar ao ASK, pode-se verificar que dobrar M implica em uma penalidade de 6 dB na SNR para se manter o mesmo desempenho
- Se o código Gray for utilizado, $P_b \approx \frac{1}{k} P_e$

Sinalizações Limitadas em Banda (PSK)

- Probabilidade de erro de símbolo (PSK)

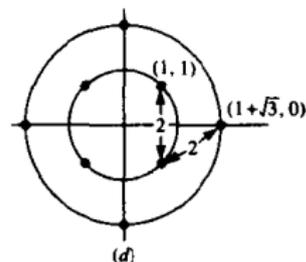
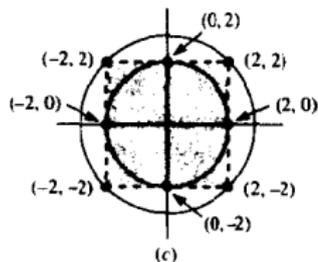
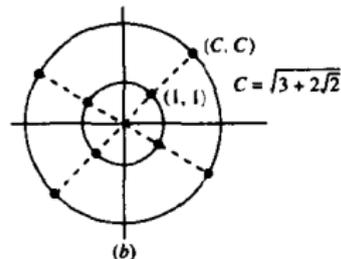
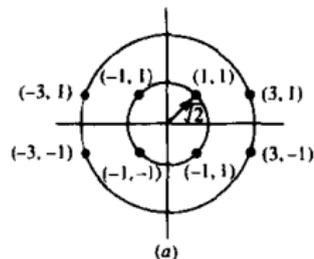


Sinalizações Limitadas em Banda (QAM)

- De modo similar ao PSK, em QAM, a dimensão do espaço é $N = 2$
- Em QAM, a constelação com M pontos não possui uma forma definida
 - A probabilidade de erro não possui uma expressão fechada em geral
 - Para um dado M e uma distância mínima fixada, várias constelações com energias médias diferentes são possíveis
 - A constelação de menor energia média é mais eficiente, porém pode não ser a mais prática de se utilizar

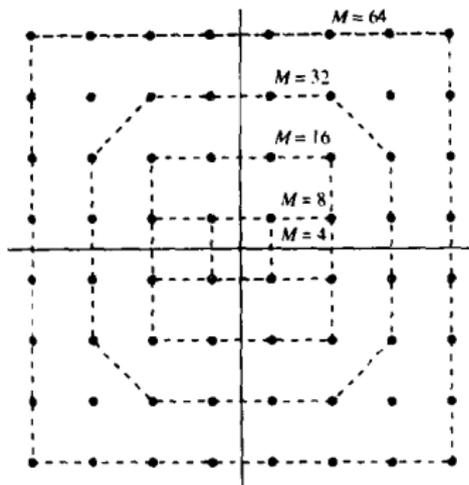
Sinalizações Limitadas em Banda (QAM)

- No exemplo abaixo, $M = 8$ e $d_{min} = 2A$ nas quatro situações
 - (a) e (c) possuem $E_{MED} = 6A^2$; (b) possui $E_{MED} = 6,83A^2$; (d) possui $E_{MED} = 4,73A^2$



Sinalizações Limitadas em Banda (QAM)

- Para $M \geq 16$, o número de constelações possíveis aumenta
- As constelações retangulares são preferíveis pela sua facilidade de geração dos sinais e de demodulação, apesar de não serem ótimas em termos de energia média
 - Quando k é par, a constelação é quadrada



Sinalizações Limitadas em Banda (QAM)

- Para uma constelação quadrada,

$$d_{min} = \sqrt{\frac{6 \log_2 M}{M-1} E_{(b)} MED}$$

- Essa constelação pode ser vista como duas constelações \sqrt{M} -PAM nas direções de fase e quadratura
- O cálculo da probabilidade de erro é feito como

$$\begin{aligned} P_{c,M-QAM} &= P_{c,\sqrt{M}-PAM}^2 = (1 - P_{e,\sqrt{M}-PAM})^2 \\ P_{e,M-QAM} &= 1 - (1 - P_{e,\sqrt{M}-PAM})^2 \\ &= 2P_{e,\sqrt{M}-PAM} \left(1 - \frac{1}{2} P_{e,\sqrt{M}-PAM}\right) \end{aligned}$$

Sinalizações Limitadas em Banda (QAM)

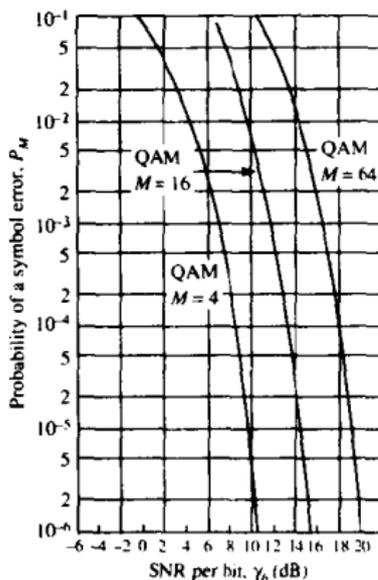
- Assim

$$\begin{aligned}
 P_{e,\sqrt{M}\text{-PAM}} &= 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M}{M-1} \frac{E_{(b)MED}}{\mathcal{N}}}\right) \\
 P_{e,M\text{-QAM}} &= 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M}{M-1} \frac{E_{(b)MED}}{\mathcal{N}}}\right) \\
 &\times \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M}{M-1} \frac{E_{(b)MED}}{\mathcal{N}}}\right)\right) \\
 &\leq 4Q\left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M}{M-1} \frac{E_{(b)MED}}{\mathcal{N}}}\right)
 \end{aligned}$$

- Em que o limitante é apertado para M grande

Sinalizações Limitadas em Banda (QAM)

- QAM é mais eficiente que ASK e PSK, pois a penalidade é de 3 dB/bit
- PSK possui a vantagem de ter um envelope constante



Sinalizações Limitadas em Potência

- As constelações de dimensão mais elevada como as ortogonais (FSK) são mais eficientes em termos de potência
 - São menos eficientes do ponto de vista espectral
- Foi visto anteriormente, que um esquema de sinalização ortogonal com sinais de mesma energia e com $M = N$ é representado por

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}_1 &= (\sqrt{E}, 0, 0, \dots, 0) \\
 \mathbf{s}_2 &= (0, \sqrt{E}, 0, \dots, 0) \\
 &\vdots \\
 \mathbf{s}_M &= (0, 0, 0, \dots, \sqrt{E})
 \end{aligned}$$

Sinalizações Limitadas em Potência

- Como os sinais possuem a mesma energia, se eles forem equiprováveis, a regra de decisão ótima se reduz a

$$\hat{m} = \underset{1 \leq m \leq M}{\operatorname{argmax}}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m)$$

- Pode-se notar que a distância entre dois pontos quaisquer da constelação vale $\sqrt{2E}$
 - A probabilidade de erro independe do sinal transmitido
 - Pode-se supor que \mathbf{s}_1 foi transmitido
- Se \mathbf{s}_1 foi transmitido, o sinal recebido é dado por

$$\mathbf{r} = (\sqrt{E} + n_1, n_2, n_3, \dots, n_M)$$

Sinalizações Limitadas em Potência

- Assim, pode-se definir as variáveis aleatórias R_m , $1 \leq m \leq M$ como

$$R_m = \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m$$

$$R_1 = E + \sqrt{E}n_1$$

$$R_m = \sqrt{E}n_m, \quad 2 \leq m \leq M$$

- Como \mathbf{s}_1 foi transmitido, a decisão é correta se $R_1 > R_m$, $m = 2, \dots, M$
- A probabilidade de decisão correta é

$$\begin{aligned} P_c &= P[R_1 > R_2, R_1 > R_3, \dots, R_1 > R_M | \mathbf{s}_1] \\ &= P[\sqrt{E} + n_1 > n_2, \sqrt{E} + n_1 > n_3, \dots, \sqrt{E} + n_1 > n_M | \mathbf{s}_1] \end{aligned}$$

Sinalizações Limitadas em Potência

- Que leva a

$$\begin{aligned}
 P_c &= \int_{-\infty}^{\infty} P[n_2 < n + \sqrt{E}, n_3 < n + \sqrt{E}, \\
 &\quad \dots, n_M < n + \sqrt{E} | \mathbf{s}_1, n_1 = n] p_{n_1}(n) dn \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (P[n_2 < n + \sqrt{E} | \mathbf{s}_1, n_1 = n])^{M-1} p_{n_1}(n) dn
 \end{aligned}$$

- O último passo se deve ao fato que as componentes de ruído são iid
- Tem-se que

$$P[n_2 < n + \sqrt{E} | \mathbf{s}_1, n_1 = n] = 1 - Q\left(\frac{n + \sqrt{E}}{\sqrt{N/2}}\right)$$

Sinalizações Limitadas em Potência

- Assim

$$P_c = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi\mathcal{N}}} \left[1 - Q\left(\frac{n + \sqrt{E}}{\sqrt{\mathcal{N}/2}}\right) \right]^{M-1} e^{-\frac{n^2}{\mathcal{N}}} dn$$

- E a probabilidade de erro é

$$\begin{aligned} P_e &= 1 - P_c \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - (1 - Q(x))^{M-1} \right] e^{-\frac{(x - \sqrt{\frac{2E}{\mathcal{N}}})^2}{2}} dx \end{aligned}$$

- Em que foi feita a substituição $x = (n + \sqrt{E})/\sqrt{\mathcal{N}/2}$
- A probabilidade de erro pode ser encontrada numericamente

Sinalizações Limitadas em Potência

- A probabilidade de erro de bit é dada por

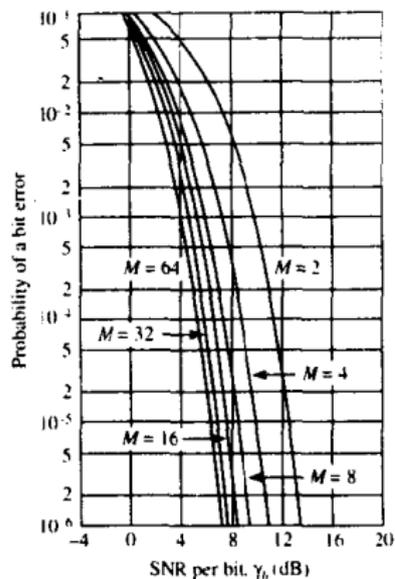
$$P_b = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} P_e$$

$$\approx \frac{1}{2} P_e \quad (k \text{ grande})$$

- Ao contrário das modulações anteriores, aumentar M implica em uma redução na potência necessária para uma probabilidade de erro fixada
 - Esse ganho vem ao custo do aumento da largura de banda
- FSK é um caso especial de sinalização ortogonal quando a separação entre as frequências é um múltiplo inteiro de $\Delta f = 1/(2T)$

Sinalizações Limitadas em Potência

- Sinalização ortogonal



Sinalizações Limitadas em Potência

- Do gráfico anterior, pode-se observar que probabilidades de erro arbitrariamente pequenas podem ser alcançadas para SNRs cada vez menores aumentando-se o tamanho da constelação
- Do limitante da união, tem-se que

$$\begin{aligned}
 P_e &\leq \frac{M-1}{2} e^{-\frac{d_{min}^2}{4\mathcal{N}}} = \frac{M-1}{2} e^{-\frac{E}{2\mathcal{N}}} < M e^{-\frac{E}{2\mathcal{N}}} \\
 &= 2^k e^{-\frac{kE_b}{2\mathcal{N}}} = e^{-\frac{k}{2} \left(\frac{E_b}{\mathcal{N}} - 2 \ln 2 \right)}
 \end{aligned}$$

- Assim, $P_e \rightarrow 0$ se $k \rightarrow \infty$ quando

$$\frac{E_b}{\mathcal{N}} > 2 \ln 2 = 1,39 \sim 1,42 \text{ dB}$$

Sinalizações Limitadas em Potência

- Esse limite de 1,42 dB é frouxo
- Da teoria da informação tem-se que uma condição necessária e suficiente para comunicações confiáveis ($P_e \rightarrow 0$ se $k \rightarrow \infty$) é que

$$\frac{E_b}{\mathcal{N}} > \ln 2 = 0,693 \sim -1,6dB$$

- Esse valor é chamado de **limite de Shannon**
- Não é possível ter comunicações confiáveis para SNRs abaixo do limite de Shannon

Detecção não coerente

- Nos esquemas de detecção vistos (filtro casado e correladores), foi admitido que o receptor tem como gerar os sinais e a base
 - Na prática, essa hipótese significa que deve haver um sincronismo perfeito entre transmissor e receptor
- Em algumas situações, o receptor só pode usar sinais da forma $s_m(t - t_d)$, em que t_d representa um desvio temporal aleatório
- Nesse caso, se os sinais $\{s_m(t), 1 \leq m \leq M\}$ são transmitidos, então

$$r(t) = s_m(t; \theta) + n(t)$$

- Em que θ é uma variável aleatória

Detecção não coerente

- Nesse caso, a regra de decisão ótima é dada por

$$\begin{aligned}
 \hat{m} &= \operatorname{argmax}_{1 \leq m \leq M} P_m p(\mathbf{r}|m) \\
 &= \operatorname{argmax}_{1 \leq m \leq M} P_m \int p(\mathbf{r}|m, \theta) p(\theta) d\theta \\
 &= \operatorname{argmax}_{1 \leq m \leq M} P_m \int p_{\mathbf{n}}(\mathbf{r} - \mathbf{s}_{m, \theta}) p(\theta) d\theta
 \end{aligned}$$

- E a probabilidade de erro é dada por

$$\begin{aligned}
 P_e &= \sum_{m=1}^M P_m \int_{D_m^c} \left(\int p(\mathbf{r}|m, \theta) p(\theta) d\theta \right) d\mathbf{r} \\
 &= \sum_{m=1}^M P_m \sum_{m'=1, m' \neq m}^M \int_{D_{m'}} \left(\int p_{\mathbf{n}}(\mathbf{r} - \mathbf{s}_{m, \theta}) p(\theta) d\theta \right) d\mathbf{r}
 \end{aligned}$$

Detecção não coerente

- A derivação dos receptores não coerentes para as modulações abordadas envolve o uso do formalismo do equivalente passa-baixa de um sinal passa-faixa
 - O equivalente passa-baixa consiste em um envelope complexo (no geral) do sinal passa-faixa
- Se os sinais são equiprováveis e de mesma energia, a regra de decisão ótima se reduz a

$$\hat{m} = \underset{1 \leq m \leq M}{\operatorname{argmax}} |\mathbf{r}_l \cdot \mathbf{s}_{ml}|$$

- Em que \mathbf{r}_l e \mathbf{s}_{ml} são os equivalentes passa-baixa de \mathbf{r} e \mathbf{s}_m , respectivamente
- Este detector é chamado de detector de envelope

Detecção não coerente

- A detecção não coerente é mais simples, mas o desempenho é em geral inferior à detecção coerente
- A diferença no desempenho depende da modulação e do tamanho da constelação
- As expressões para a probabilidade de erro são mais complicadas
- No caso do FSK, a ortogonalidade só pode ser alcançada com separações de frequência múltiplas de $\Delta f = 1/T_s$

Comparação entre Métodos de Sinalização

- Os esquemas de modulação vistos podem ser comparados em relação a sua **eficiência de potência** e a sua **eficiência de largura de banda**
- No critério de eficiência de potência, são comparadas as SNRs por bit para alcançar uma dada probabilidade de erro
 - $P_e = 10^{-5}$ tipicamente
 - Um menor valor de $\gamma_b = \frac{E_b}{N}$ indica que o esquema de modulação é mais eficiente
- A eficiência de largura de banda é definida como

$$r = \frac{R}{W} \text{ bit/s/Hz}$$

- Um r maior significa que o sistema pode transmitir dados a uma taxa maior para um valor de banda fixado

Comparação entre Métodos de Sinalização

- A largura de banda W utilizada por um esquema de modulação digital pode ser relacionada com a dimensão do espaço de sinais N
- Pode-se mostrar que $N = 2WT$ é uma boa aproximação para a dimensão de sinais com duração $T = T_S$ e com a parte relevante do espectro na banda W
- As relações seguintes podem ser derivadas

$$W = \frac{N}{2T_S} = \frac{R_S N}{2} = \frac{RN}{2 \log_2 M}$$
$$r = \frac{R}{W} = \frac{2 \log_2 M}{N}$$

Comparação entre Métodos de Sinalização

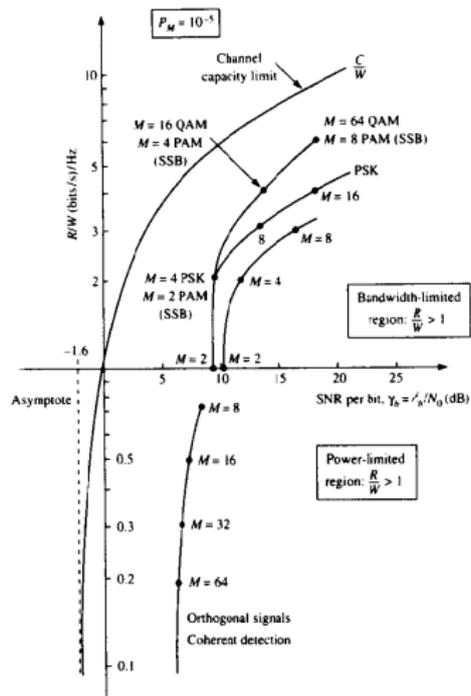
- Para MASK, MPSK e MQAM, a eficiência de largura banda aumenta com M , mas a potência requerida é maior para manter uma dada probabilidade de erro
- Em sinalizações ortogonais, $N = M$, de modo que

$$r = \frac{2 \log_2 M}{M}$$

- Assim, em MFSK por exemplo, a eficiência de largura de banda diminui com o aumento de M , mas a potência requerida é menor para manter uma dada probabilidade de erro
 - Ainda, da teoria da informação, tem-se que para $P_e \rightarrow 0$

$$\frac{E_b}{\mathcal{N}} > \frac{2^r - 1}{r}$$

Comparação entre Métodos de Sinalização



Considerações Finais

- É importante ressaltar que o valor de γ_b considerado se refere ao receptor
- Sabe-se que

$$\frac{E_b}{\mathcal{N}} = \frac{T_b P_R}{\mathcal{N}} = \frac{1}{R} \frac{P_R}{\mathcal{N}}$$

$$\frac{P_R}{\mathcal{N}} = R \left(\frac{E_b}{\mathcal{N}} \right)_{req}$$

- P_R depende de P_T (potência transmitida) e das perdas e ganhos do canal (ganho da antena, perdas do espaço livre, etc.)
- O parâmetro $\mathcal{N} = k_B T_0$ depende da constante de Boltzmann $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ W.s/K}$ e da temperatura T_0 em Kelvin