

Fundamentos

E J Nascimento

Universidade Federal do Vale do São Francisco

www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento

May 8, 2019

- 1 Sinais Passa-Faixa
- 2 Espaço de Sinais
- 3 Distribuições de Probabilidade

Sinais Passa-Faixa

- Sinais analógicos ou digitais oriundos de uma fonte de informação são sinais em **banda base** (baseband)
 - Espectro concentrado geralmente em baixas frequências
 - Não adequado para propagação
- Sinais cujo espectro se concentra em torno de uma frequência mais alta são chamados de **passa-faixa**
 - Sinais analógicos modulados (AM, FM, PM, etc.)
 - Sinais digitais modulados (ASK, PSK, FSK, etc.)

Equivalente Passa-Baixa

- Método usado para representar sinais passa-faixa em função de um envelope complexo passa-baixa
 - Representação mais compacta
 - Adequada ao processamento digital de sinais em razão da menor taxa de amostragem requerida
 - Usado em derivações de expressões em princípios de comunicação (banda do FM banda estreita, expressão no tempo de um sinal SSB, etc.)

Equivalente Passa-Baixa

- O espectro $X(f)$ de um sinal passa-faixa $x(t)$ pode ser representado como

$$\begin{aligned} X(f) &= X_+(f) + X_-(f) = X_+(f) + X_+^*(-f), \\ X_+(f) &= X(f)u(f), \quad X_-(f) = X(f)u(-f) \end{aligned}$$

- Apenas o conhecimento de $X_+(f)$ é necessário para reconstruir $X(f)$
- Sendo $x_+(t)$ o sinal analítico (pré-envelope) de $x(t)$, tem-se

$$\begin{aligned} x_+(t) &= \mathcal{F}^{-1}[X_+(f)] = \mathcal{F}^{-1}[X(f)u(f)] \\ &= x(t) * \left(\frac{1}{2}\delta(t) + j\frac{1}{2\pi t}\right) = \frac{1}{2}x(t) + \frac{j}{2}\hat{x}(t) \end{aligned}$$

Equivalente Passa-Baixa

- Sendo $\hat{x}(t)$ a transformada de Hilbert de $x(t)$
 - Uma operação de defasamento de $-\pi/2$ nas componentes de frequência positiva e $\pi/2$ nas componentes de frequência negativa de $x(t)$
- O **equivalente passa-baixa** (envelope complexo) de $x(t)$ é definido por

$$x_I(t) \Leftrightarrow X_I(f) = 2X_+(f + f_0) = 2X(f + f_0)u(f + f_0)$$

- Assim,

$$\begin{aligned} x_I(t) &= 2x_+(t)e^{-j2\pi f_0 t} = (x(t) + j\hat{x}(t))e^{-j2\pi f_0 t} \\ &= (x(t) \cos 2\pi f_0 t + \hat{x}(t) \sin 2\pi f_0 t) \\ &\quad + j(\hat{x}(t) \cos 2\pi f_0 t - x(t) \sin 2\pi f_0 t) \end{aligned}$$

Equivalente Passa-Baixa

- A relação entre o sinal passa-faixa e o equivalente passa-baixa é dada por

$$x(t) = \mathbf{Re}[x_I(t)e^{j2\pi f_0 t}]$$

$$X(f) = \frac{1}{2}[X_I(f - f_0) + X_I^*(-f - f_0)]$$

- $x_I(t)$ pode ser expressado em função das suas componentes (passa-baixa) em fase $x_i(t)$ e quadratura $x_q(t)$ como

$$x_I(t) = x_i(t) + jx_q(t)$$

$$x_i(t) = x(t) \cos 2\pi f_0 t + \hat{x}(t) \sin 2\pi f_0 t$$

$$x_q(t) = \hat{x}(t) \cos 2\pi f_0 t - x(t) \sin 2\pi f_0 t$$

Equivalente Passa-Baixa

- Ou ainda,

$$x(t) = x_i(t) \cos 2\pi f_0 t - x_q(t) \sin 2\pi f_0 t$$

$$\hat{x}(t) = x_q(t) \cos 2\pi f_0 t + x_i(t) \sin 2\pi f_0 t$$

- Na forma polar, $x_I(t)$ pode ser expressado em função do envelope $r_x(t)$ e da fase $\theta_x(t)$ de $x(t)$ como

$$x_I(t) = r_x(t) e^{j\theta_x(t)}$$

$$r_x(t) = \sqrt{x_i^2(t) + x_q^2(t)}$$

$$\theta_x(t) = \arctan \frac{x_q(t)}{x_i(t)}$$

Equivalente Passa-Baixa

- Logo,

$$x(t) = \mathbf{Re}[r_x(t)e^{j(2\pi f_0 t + \theta_x(t))}]$$

$$x(t) = r_x(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_x(t))$$

- O equivalente passa-baixa depende da frequência f_0
- Pode-se ainda mostrar que

$$E_x = 2E_{x+} = \frac{1}{2}E_{xI}$$

Espaços Vetoriais

- Um vetor \mathbf{v} em um espaço n -dimensional pode ser representado em função de suas n componentes como $\mathbf{v} = [v_1, \dots, v_n]^t$
- Nesse espaço vetorial, o produto interno entre dois vetores \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 é definido por

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \sum_{i=1}^n v_{1i} v_{2i}^* = \mathbf{v}_2^H \mathbf{v}_1$$

- Dois vetores são ortogonais se $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$
- A norma de um vetor é definida como

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2}$$

Espaços Vetoriais

- Se os vetores forem ortogonais e tiverem a norma unitária, os vetores são ditos ortonormais
- Em uma base ortonormal $\mathbf{e}_i, 1 \leq i \leq n$, \mathbf{v} pode ser expressado como

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{e}_i$$

- Em que $v_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_i \rangle$
- Para dois vetores \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 , tem-se

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\| &\leq \|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\| \\ |\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle| &\leq \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\| \end{aligned}$$

Espaços Vetoriais

- Uma base ortonormal para um conjunto de vetores $\mathbf{v}_i, 1 \leq i \leq m$, pode ser obtida através do procedimento de Gram-Schmidt

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}$$

$$\mathbf{u}'_2 = \mathbf{v}_2 - (\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle) \mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{u}'_2}{\|\mathbf{u}'_2\|}$$

$$\mathbf{u}'_3 = \mathbf{v}_3 - (\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle) \mathbf{u}_1 - (\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle) \mathbf{u}_2$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{u}'_3}{\|\mathbf{u}'_3\|}$$

Espaço de Sinais

- Pode-se fazer um paralelo entre sinais e vetores
- O produto interno entre dois sinais complexos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ é definido por

$$\langle x_1(t), x_2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2^*(t)dt$$

- Dois sinais são ortogonais se $\langle x_1(t), x_2(t) \rangle = 0$
- A norma de um sinal é definida como

$$\|x(t)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt} = \sqrt{E_x}$$

Espaço de Sinais

- Se os sinais forem ortogonais e tiverem a norma unitária, os sinais são ditos ortonormais
- Um conjunto de m sinais é linearmente independente se nenhum sinal puder ser representado como uma combinação linear dos demais
- Para dois sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$, tem-se

$$\begin{aligned} \|x_1(t) + x_2(t)\| &\leq \|x_1(t)\| + \|x_2(t)\| \\ |\langle x_1(t), x_2(t) \rangle| &\leq \|x_1(t)\| \cdot \|x_2(t)\| = \sqrt{E_{x_1} E_{x_2}} \end{aligned}$$

Espaço de Sinais

- Seja $s(t)$ um sinal de energia finita
- Considerando um conjunto de funções ortonormais $\{\phi_n(t), n = 1, 2, \dots, K\}$
- O sinal $s(t)$ pode ser aproximado por

$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=1}^K s_k \phi_k(t)$$

- O erro dessa aproximação é dado por $e(t) = s(t) - \tilde{s}(t)$, cuja energia vale

$$E_e = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t) - \tilde{s}(t)|^2 dt$$

Espaço de Sinais

- A energia do erro é minimizada se

$$s_n = \langle s(t), \phi_n(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \phi_n^*(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots, K$$

- O erro mínimo da aproximação vale

$$E_{min} = E_s - \sum_{k=1}^K |s_k|^2$$

- Se o erro mínimo vale zero, então

$$E_s = \sum_{k=1}^K |s_k|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt$$

Espaço de Sinais

- Nesse caso, $s(t)$ pode ser expressado como

$$s(t) = \sum_{k=1}^K s_k \phi_k(t)$$

- Quando $E_{min} = 0$, o conjunto de funções ortonormais $\{\phi_n(t), n = 1, 2, \dots, K\}$ é dito ser completo
- Séries de Fourier são exemplos de expansões em um conjunto infinito de funções ortonormais

Procedimento de Gram-Schmidt

- Considerando um conjunto de sinais com energia finita $s_m(t)$, $1 \leq m \leq M$, então

$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}}$$

$$c_{21} = \langle s_2(t), \phi_1(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t) \phi_1^*(t) dt$$

$$\gamma_2(t) = s_2(t) - c_{21} \phi_1(t)$$

$$E_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_2^2(t) dt$$

$$\phi_2(t) = \frac{\gamma_2(t)}{\sqrt{E_2}}$$

Procedimento de Gram-Schmidt

- Continuando o procedimento

$$\phi_k(t) = \frac{\gamma_k(t)}{\sqrt{E_k}}$$

$$\gamma_k(t) = s_k(t) - \sum_{i=1}^{k-1} c_{ki} \phi_i(t)$$

$$c_{ki} = \langle s_k(t), \phi_i(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s_k(t) \phi_i^*(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, k-1$$

$$E_k = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_k^2(t) dt$$

- A dimensão do espaço é $N \leq M$

Representação no Espaço de Sinais

- Os M sinais $\{s_m(t)\}$ podem ser expressados como combinações lineares de funções ortonormais $\{\phi_n(t)\}$

$$s_m(t) = \sum_{n=1}^N s_{mn} \phi_n(t), \quad m = 1, 2, \dots, M$$

- Cada sinal pode ser representado pelo vetor $\mathbf{s}_m = [s_{m1}, s_{m2}, \dots, s_{mN}]^t$
- M sinais são representados por M vetores em um espaço de dimensão N , com $N \leq M$
- O conjunto de vetores representa uma constelação de sinais

Representação no Espaço de Sinais

- Da ortonormalidade da base de sinais $\{\phi_n(t)\}$, tem-se que

$$E_m = \int_{-\infty}^{\infty} |s_m(t)|^2 dt = \sum_{n=1}^N |s_{mn}|^2 = \|\mathbf{s}_m\|^2$$

$$\langle s_k(t), s_l(t) \rangle = \langle \mathbf{s}_k, \mathbf{s}_l \rangle$$

- A base de sinais não é única, entretanto a dimensão do espaço de sinais não muda
- Os vetores mantém a sua configuração geométrica, ou seja, o comprimento e o produto interno são invariantes em relação à base

Distribuições de Probabilidade

- Vários modelos para distribuições de variáveis aleatórias são empregados nas comunicações digitais
- Variável aleatória de Bernoulli
 - Variável aleatória discreta que assume os valores 0 e 1

$$P[X = 1] = p, P[X = 0] = 1 - p$$

$$E[X] = p, \sigma_X^2 = \text{VAR}[X] = p(1 - p)$$

- Variável aleatória binomial
 - Modela a soma de n variáveis aleatórias independentes de Bernoulli
 - Número de erros em n bits com probabilidade de erro de bit p

$$P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n$$

$$E[X] = np, \sigma_X^2 = \text{VAR}[X] = np(1 - p)$$

Distribuições de Probabilidade

- Variável aleatória uniforme

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{b-a}{2}, \quad \sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- Variável aleatória normal (Gaussiana) ($X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$)

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$E[X] = m, \quad \text{VAR}[X] = \sigma^2$$

Distribuições de Probabilidade

- Relacionado à distribuição normal, tem-se:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$F(x) = 1 - Q\left(\frac{x - m}{\sigma}\right)$$

$$P[X > \alpha] = Q\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right)$$

$$P[X < \alpha] = Q\left(\frac{m - \alpha}{\sigma}\right)$$

$$Q(0) = 1/2, \quad Q(\infty) = 0, \quad Q(-\infty) = 1$$

$$Q(-x) = 1 - Q(x)$$

Distribuições de Probabilidade

- Ainda relacionado à distribuição normal, pode-se usar a função de erro complementar definida como

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$Q(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\operatorname{erfc}(x) = 2Q(\sqrt{2}x)$$

Distribuições de Probabilidade

- Variável aleatória qui-quadrada (χ^2)
 - Se $\{X_i, i = 1, \dots, n\}$ variáveis gaussianas de média nula e variância σ^2 e iid (independentes e identicamente distribuídas), então

$$X = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

- é uma variável aleatória qui-quadrada (χ^2) com n graus de liberdade

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})\sigma^n} x^{n/2-1} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}} & x > 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$E[X] = n\sigma^2, \quad \text{VAR}[X] = 2n\sigma^4$$

Distribuições de Probabilidade

- Variável aleatória de Rayleigh
 - Se X_1 e X_2 são variáveis gaussianas $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ iid, então

$$X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$$

- é uma variável aleatória de Rayleigh

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & x > 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$E[X] = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \text{VAR}[X] = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \sigma^2$$

Distribuições de Probabilidade

- Variável aleatória de Ricean

- Se $X_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma^2)$ e $X_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma^2)$ são independentes, então

$$X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$$

- é uma variável aleatória de Ricean

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} I_0\left(\frac{sx}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{x^2+s^2}{2\sigma^2}} & x > 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$s = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$$

Distribuições de Probabilidade

- Variáveis aleatórias conjuntamente gaussianas
 - Um vetor \mathbf{X} ($n \times 1$) com componentes $\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$ é chamado de vetor gaussiano e suas componentes são chamadas de variáveis aleatórias conjuntamente gaussianas se a fdp conjunta dos X_i puder ser escrita como

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det \mathbf{C})^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^t \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})}$$

$$\mathbf{m} = E[\mathbf{X}]$$

$$\mathbf{C} = E[(\mathbf{X} - \mathbf{m})(\mathbf{X} - \mathbf{m})^t]$$

$$C_{ij} = COV[X_i, X_j]$$

Distribuições de Probabilidade

- Em se tratando de variáveis aleatórias conjuntamente gaussianas
 - Descorrelação é equivalente a independência
 - Combinações lineares são conjuntamente gaussianas

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}, \mathbf{m}_Y = \mathbf{A}\mathbf{m}_X, \mathbf{C}_Y = \mathbf{A}\mathbf{C}_X\mathbf{A}^t$$

Representação do Ruído no Espaço de Sinais

- Sinais determinísticos podem ser representados em uma base de funções ortonormal (Gram-Schmidt)
- Entretanto, a obtenção de uma base para um processo aleatório não é tão evidente
 - O erro da aproximação não é nulo em geral
- Para que uma base $\{\varphi_k(t)\}$ possa representar um processo aleatório $x(t)$, é necessário que ela verifique a expansão de *Karhunen-Löeve* dada por

$$\lambda_i \cdot \varphi_i(t) = \int_0^{T_0} R_x(t, t_1) \cdot \varphi_i(t_1) dt_1, \quad 0 \leq t \leq T_0$$

Representação Vetorial do Ruído Branco

- Essa equação é similar a equação linear que define os autovalores de uma matriz
- Quando $x(t)$ é um processo de ruído branco estacionário no sentido amplo, então

$$R_x(t, t_1) = \frac{\mathcal{N}}{2} \delta(t - t_1)$$

- Assim,

$$\lambda_i \cdot \varphi_i(t) = \frac{\mathcal{N}}{2} \varphi_i(t), \quad 0 \leq t \leq T_o$$

- Assim, qualquer conjunto completo de funções de base satisfaz essa equação com $\lambda_i = \mathcal{N}/2$

Representação Vetorial do Ruído Branco

- Para M sinais representados em uma base $\varphi_k(t)$, tem-se que

$$s_i(t) = \sum_k s_{i,k} \varphi_k(t), \quad i = 1, \dots, M$$

- Nesta base, o ruído branco do canal é representado como

$$n_w(t) = \sum_k n_k \varphi_k(t), \quad 0 \leq t \leq T_o$$

- Se $s_i(t)$ é enviado, o sinal recebido (canal AWGN) pode ser decomposto como

$$r(t) = s_i(t) + n_w(t) = \sum_k s_{i,k} \varphi_k(t) + \sum_k n_k \varphi_k(t) = \sum_k r_k \varphi_k(t)$$

Representação Vetorial do Ruído Branco

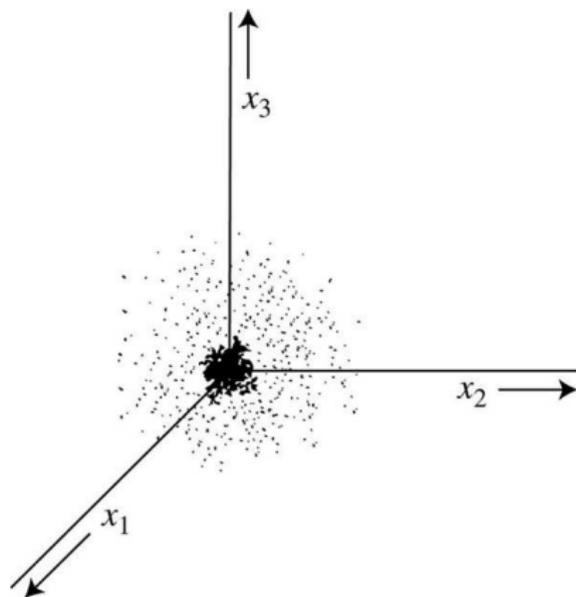
- Em que

$$r_k = \int_0^{T_o} r(t)\varphi_k^*(t)dt = s_{i,k} + n_k$$

- Assim, o sinal recebido é representado por um vetor de variáveis aleatórias $\{r_k\}$
- O receptor ótimo deve decidir qual sinal foi transmitido dado o vetor $\{r_k\}$ recebido

Representação Vetorial do Ruído Branco

- Representação geométrica de um processo aleatório (cada ponto representa uma função amostra do processo)



Representação Vetorial do Ruído Branco

- Se o ruído for gaussiano, as componentes n_k são conjuntamente gaussianas
- As variáveis aleatórias n_k são independentes e com variância $\mathcal{N}/2$
- A fdp conjunta para o vetor de ruído \mathbf{n} em um espaço de N dimensões é dada por

$$\begin{aligned} p(\mathbf{n}) &= \frac{1}{(\pi\mathcal{N})^{N/2}} e^{-(n_1^2+n_2^2+\dots+n_N^2)/\mathcal{N}} \\ &= \frac{1}{(\pi\mathcal{N})^{N/2}} e^{-\|\mathbf{n}\|^2/\mathcal{N}} \end{aligned}$$

- A fdp do ruído depende apenas da norma do vetor de ruído no hiperespaço de N dimensões