

Compromissos da Modulação e da Codificação

Edmar José do Nascimento
(Tópicos Avançados em Engenharia Elétrica I)
<http://www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento>

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

Roteiro

- 1 Compromissos em Sistemas Digitais
- 2 Avaliação de Sistemas Digitais

Introdução

- O projetista de um sistema de comunicação digital tem que lidar com uma série de objetivos conflitantes, como por exemplo:
 - Maximizar a taxa de transmissão de bit R
 - Minimizar a probabilidade de erro P_B
 - Minimizar a potência requerida ou de modo equivalente, minimizar E_b/N_0
 - Minimizar a largura de banda do sistema W
 - Maximizar a utilização do sistema
 - Minimizar a complexidade do sistema, a carga computacional e o seu custo

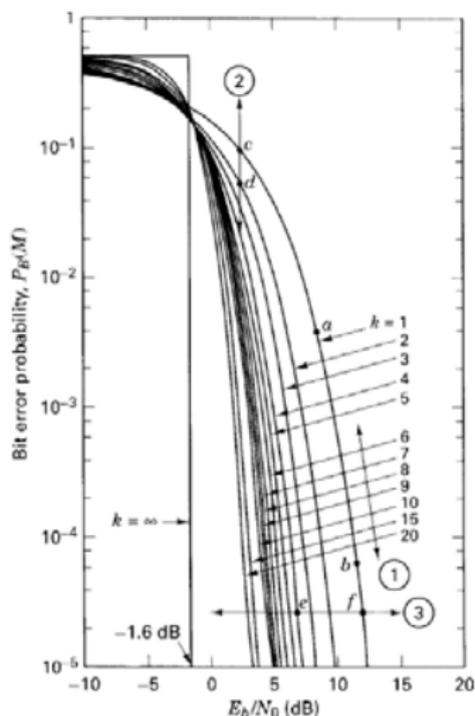
Introdução

- Além disso, há uma série de restrições e limitações teóricas que devem ser levadas em conta quando se procuram alcançar os objetivos do projeto
 - A largura de banda mínima teórica de Nyquist
 - O teorema da capacidade de canal de Shannon-Hartley
 - As regulamentações governamentais como as políticas de alocação de frequências
 - Limitações tecnológicas dos componentes utilizados
 - Outros requisitos dos sistemas (órbitas dos satélites, etc.)
- Com o auxílio de gráficos (plano da probabilidade de erro e o plano da eficiência de largura de banda) pode-se visualizar as possíveis escolhas de um projeto

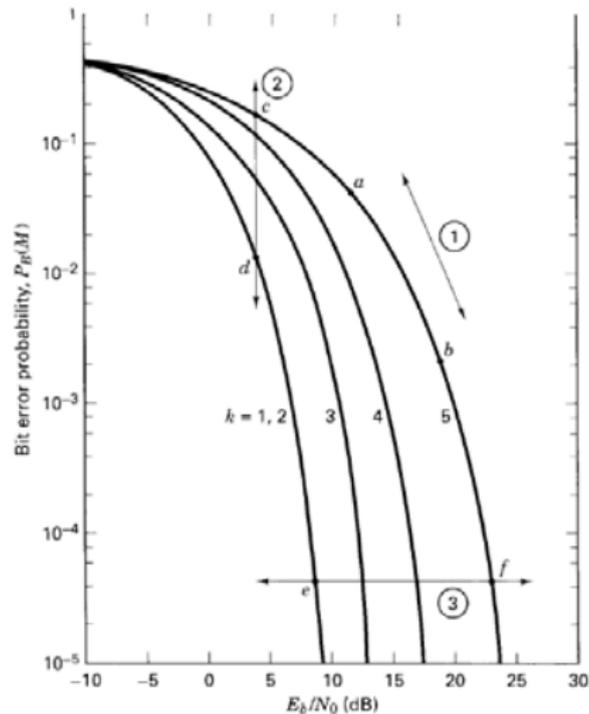
Plano de Probabilidade de Erro

- O gráfico de P_B versus E_b/N_0 é conhecido como uma *curva de desempenho da probabilidade de erro*
- Um plano de probabilidade de erro descreve o local dos pontos de operação para um tipo particular de modulação e codificação
- Uma vez que se escolhe o tipo de modulação e codificação, determina-se um ponto específico no plano da probabilidade de erro
- Nas curvas mostradas a seguir:
 - Um movimento ao longo da seta 1 significa um compromisso entre P_B e E_b/N_0 com W fixo
 - Um movimento ao longo da seta 2 significa um compromisso entre P_B e W com E_b/N_0 fixo
 - Um movimento ao longo da seta 3 significa um compromisso entre W e E_b/N_0 com P_B fixo

Plano de Probabilidade de Erro (Ortogonal)



Plano de Probabilidade de Erro



Limitações Teóricas

- Para que não haja ISI, Nyquist mostrou que a largura de banda teórica mínima para a transmissão em banda básica de R_s símbolos por segundo é de $R_s/2$ Hertz
- Na prática, essa largura de banda é em torno de 10 a 40% superior em razão dos filtros
- Em uma modulação M-ária, $k = \log_2 M$ bits são associados a uma dentre M formas de onda
- A taxa de bit R pode ser escrita como

$$R = kR_s \text{ ou } R_s = \frac{R}{k} = \frac{R}{\log_2 M}$$

- Com um aumento em k , a taxa de dados R é aumentada
- No caso do MPSK, a eficiência R/W aumenta com o aumento de k

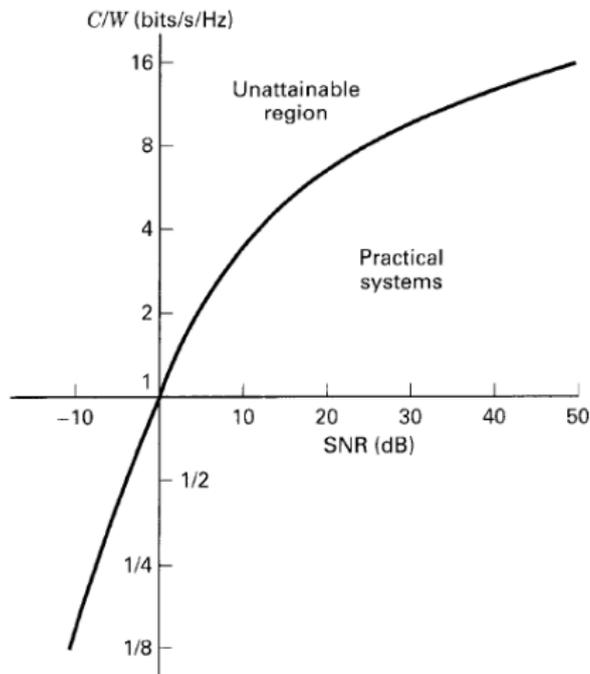
Limitações Teóricas

- Shannon mostrou que a capacidade de um canal com ruído AWGN é dada por

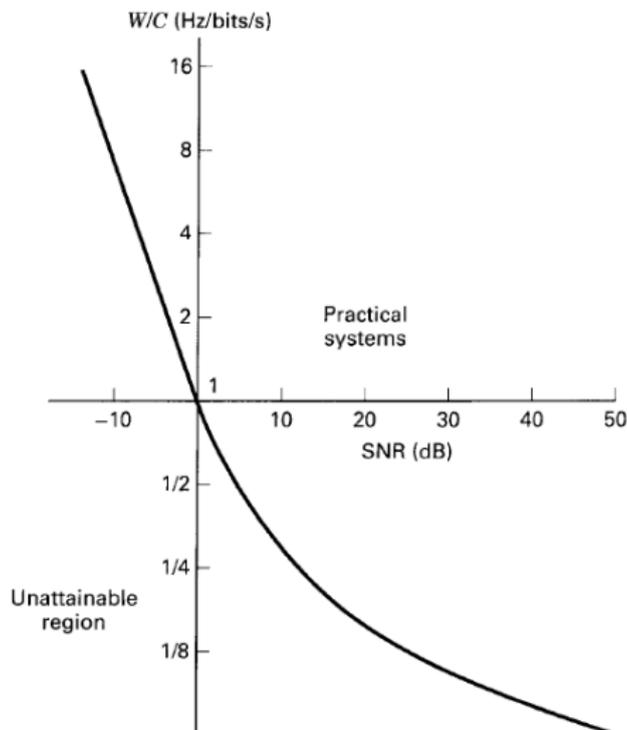
$$C = W \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) \text{ bits/s}$$

- A capacidade é um limite superior para a taxa de bit R
- O que Shannon mostrou foi que é possível transmitir informação sobre um canal com taxa R , $R \leq C$, com uma probabilidade de erro arbitrariamente pequena usando algum esquema de codificação
- Se $R > C$, não é possível obter um código que permita que a probabilidade de erro seja arbitrariamente pequena

Capacidade Normalizada versus SNR do canal



Largura de Banda Normalizada versus SNR do canal



Limitações Teóricas

- A equação da capacidade pode ser reescrita em termos de E_b/N_0 , resultando em

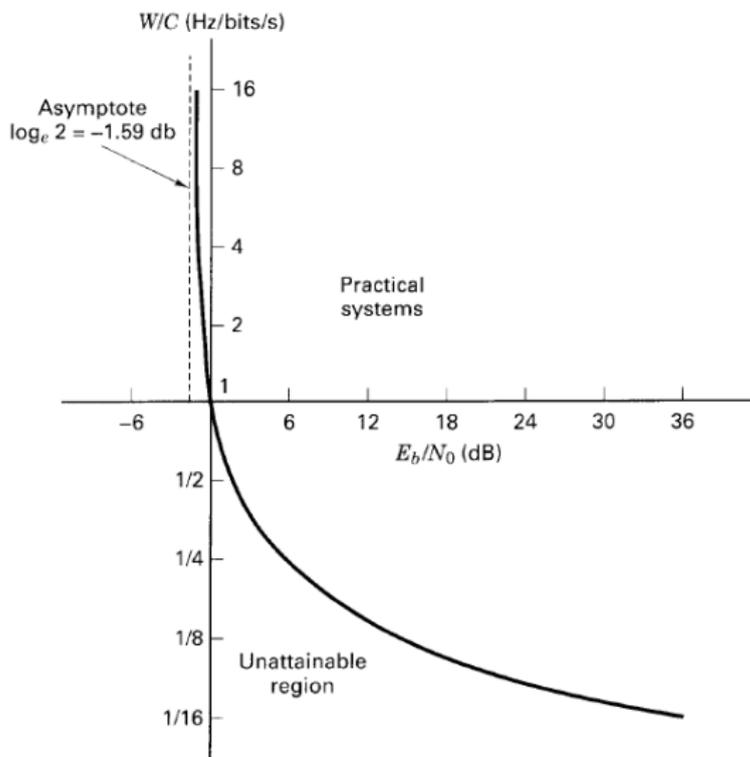
$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{W}{C} (2^{C/W} - 1)$$

- No limite, quando $C/W \rightarrow 0$ ou $W/C \rightarrow \infty$, obtém-se o limite de Shannon

$$\frac{E_b}{N_0} = -1,6dB$$

- A importância do limite de Shannon é que ele estabelece os limites do ganho que pode ser alcançado com a codificação
 - Os códigos turbo hoje em dia são os que melhor se aproximam do limite de Shannon

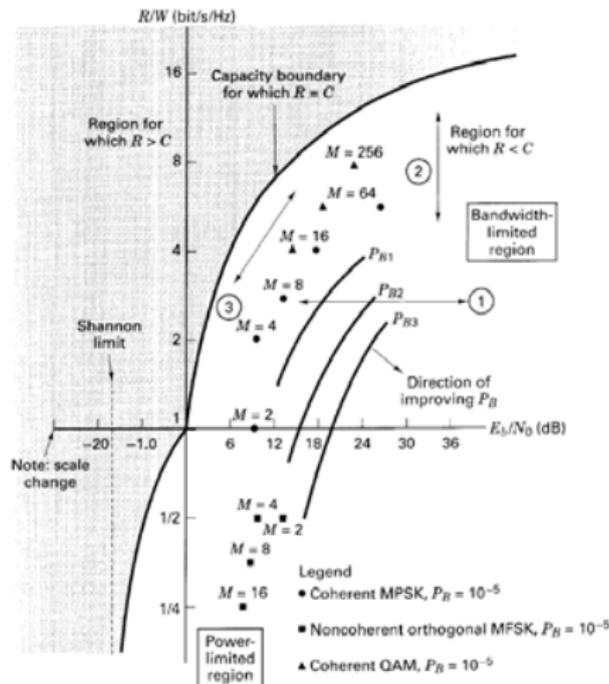
Largura de Banda Normalizada versus SNR do canal



Plano de Eficiência de Largura de Banda

- Similarmente ao gráfico de C/W versus E_b/N_0 , pode-se plotar um gráfico de R/W versus E_b/N_0
- Este gráfico é chamado de plano de eficiência de largura de banda
- R/W é uma medida da quantidade de dados transmitidos em uma banda especificada em um certo intervalo de tempo
- A curva $R = C$ separa a região dos sistemas de comunicações práticos da região dos sistemas que não são teoricamente possíveis

Plano da Eficiência de Largura de Banda

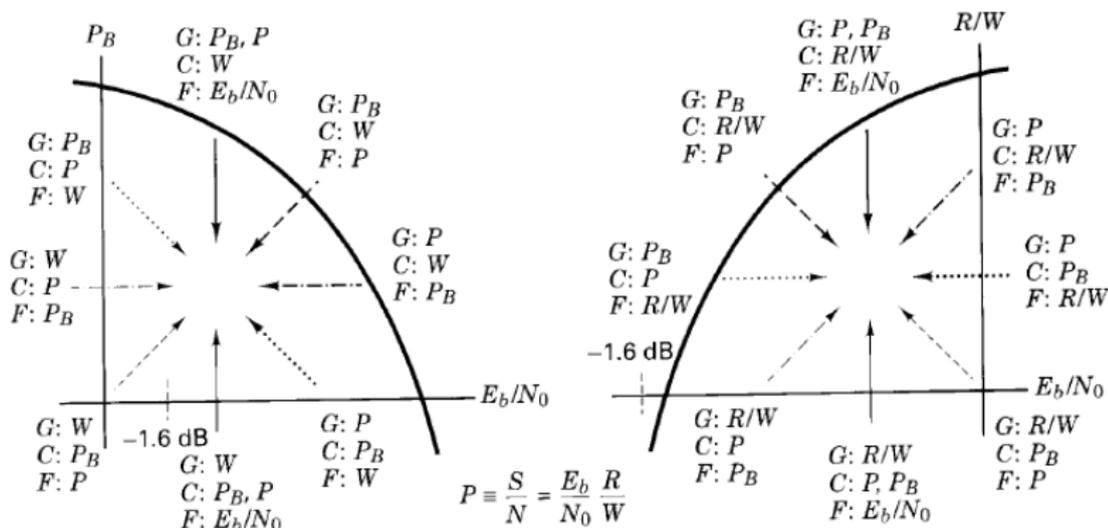


Compromissos da Modulação e Codificação

- Os compromissos entre as variáveis P_B , P , W , R/W e E_b/N_0 podem ser ilustrados por setas indicando movimentações nos planos P_B versus E_b/N_0 e R/W versus E_b/N_0
- O movimento nesses planos se dá por meio da escolha das técnicas de modulação e codificação apropriadas
- O plano da probabilidade de erro é mais útil em sistemas limitados em potência e o plano da eficiência da largura de banda é mais útil para sistemas limitados em banda
- Em geral é de interesse se observar os casos em que P_B é mantida fixa
 - Nesse caso, observa-se por exemplo que um ganho em potência (menos potência transmitida) ocorre ao custo de um maior gasto de largura de banda

Compromissos da Modulação e Codificação

- Na figura abaixo, G se refere ao ganho alcançado, C ao custo da operação e F se refere ao parâmetro fixado



Projeto de Sistemas de Comunicações Digitais

- O projeto de qualquer sistema de comunicação digital começa com uma descrição do canal (potência recebida, largura de banda disponível, estatísticas do ruído e outras imperfeições como o desvanecimento) e uma definição dos requisitos (taxa de dados e desempenho do erro)
- A partir da descrição, é preciso determinar as escolhas de projeto que melhor casam com o canal e com os requisitos de desempenho
- Os dois principais recursos de um sistema de comunicação são a potência recebida e a largura de banda disponível para transmissão
- De acordo com a abundância ou escassez, os sistemas podem ser classificados como limitados em potência ou limitados em banda

Sinalização M-ária

- Na sinalização M-ária, tem-se que

$$M = 2^k \text{ ou } k = \log_2 M$$

- A taxa de dados pode ser expressada como

$$R = \frac{k}{T_S} = \frac{\log_2 M}{T_S} \text{ bits/s}$$

- A duração efetiva de cada bit T_b é dada por

$$T_b = \frac{1}{R} = \frac{T_S}{k} = \frac{1}{kR_S}$$

Sinalização M-ária

- Assim, a taxa de símbolos pode ser escrita como

$$R_S = \frac{R}{\log_2 M}$$

- A relação R/W pode ser então escrita como

$$\frac{R}{W} = \frac{\log_2 M}{WT_S} = \frac{1}{WT_b} \text{ bits/s/Hz}$$

Sistemas Limitados em Banda

- Um sistema é eficiente em banda se o produto WT_b é pequeno
- O objetivo nesse tipo de sistema é aumentar a taxa dentro da banda permitida ao custo de um aumento de E_b/N_0 (mantendo também uma P_B especificada)
- Os sistemas que atendem esse compromisso empregam a modulação MPSK, como pode ser visto no plano da eficiência
- A largura de banda para a modulação MPSK pode ser calculada usando a banda mínima de Nyquist como

$$W = \frac{1}{T_S} = R_S \text{ (duas vezes a da banda básica)}$$

Sistemas Limitados em Banda

- Com essa banda, a eficiência para a modulação MPSK é dada por

$$\frac{R}{W} = \log_2 M \text{ bits/s/Hz}$$

- Observa-se que a eficiência em banda cresce com o aumento da quantidade de símbolos (M)
- Observa-se também que o preço a ser pago é o aumento de E_b/N_0 a medida que M aumenta

Sistemas Limitados em Potência

- Os sistemas limitados em potência são aqueles em que a potência é escassa, mas a largura de banda não apresenta restrições consideráveis, como por exemplo, nos enlaces de satélite
- Uma modulação adequada para esse tipo de sistema é a MFSK
- Para o MFSK não coerente, a largura de banda pode ser aproximada por

$$W = \frac{M}{T_S} = MR_S$$

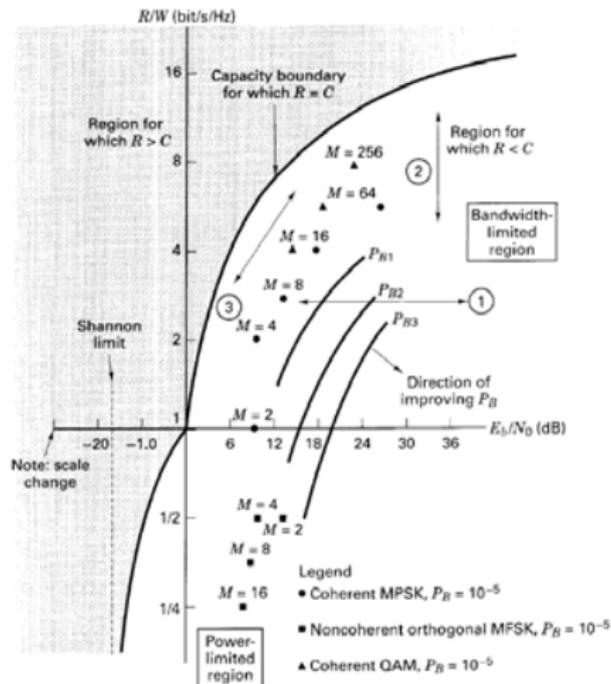
- De modo que a eficiência para MFSK é dada por

$$\frac{R}{W} = \frac{\log_2 M}{M} \text{ bits/s/Hz}$$

Sistemas Limitados em Potência

- Observa-se que a eficiência em banda decresce com o aumento da quantidade de símbolos (M)
- Observa-se também que E_b/N_0 pode ser reduzido ao custo de um aumento na banda

Plano da Eficiência de Largura de Banda



Comparação entre MPSK e MFSK

- Na figura abaixo, é feita uma comparação entre as modulações MPSK e MFSK para $P_B = 10^{-5}$ e $R = 9600 \text{ bits/s}$

TABLE 9.1 Symbol Rate, Minimum Bandwidth, Bandwidth Efficiency, and Required E_b/N_0 for MPSK and Noncoherent Orthogonal MFSK Signaling at 9600 bit/s

M	k	R (bit/s)	R_s (symp/s)	MPSK Minimum Bandwidth (Hz)	MPSK R/W	MPSK E_b/N_0 (dB) $P_B = 10^{-5}$	Noncoherent Orthog MFSK Min Bandwidth (Hz)	MFSK R/W	MFSK E_b/N_0 (dB) $P_B = 10^{-5}$
2	1	9600	9600	9600	1	9.6	19,200	1/2	13.4
4	2	9600	4800	4800	2	9.6	19,200	1/2	10.6
8	3	9600	3200	3200	3	13.0	25,600	1/3	9.1
16	4	9600	2400	2400	4	17.5	38,400	1/4	8.1
32	5	9600	1920	1920	5	22.4	61,440	5/32	7.4

Exemplo de um Sistema Não-codificado Limitado em Banda

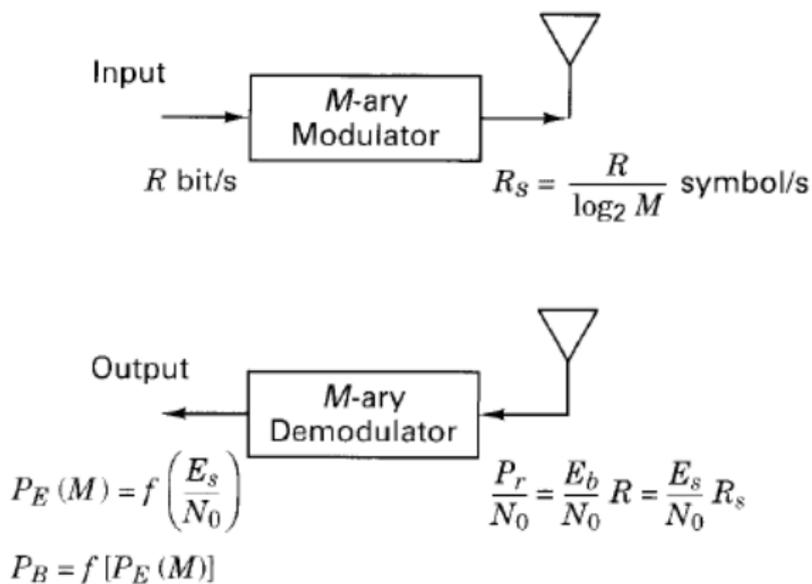
- Admite-se que se dispõe de um canal de rádio AWGN com largura de banda $W = 4000\text{Hz}$
- Admite-se também que, devido às limitações do sistema, a relação $P_r/N_0 = 53\text{dB} - \text{Hz}$
- Além disso, a taxa requerida é de $R = 9600\text{bits/s}$ e que a probabilidade de erro é de no máximo $P_B = 10^{-5}$
- A relação E_b/N_0 disponível em dBs é calculada como

$$\begin{aligned}\frac{P_r}{N_0} &= \frac{E_b}{N_0} R \\ \frac{E_b}{N_0}(\text{dB}) &= \frac{P_r}{N_0}(\text{dB} - \text{Hz}) - R(\text{dB} - \text{bit/s}) \\ &= 53 - (10 \times \log_{10} 9600) = 13,2\text{dB}\end{aligned}$$

Exemplo de um Sistema Não-codificado Limitado em Banda

- Como a taxa de dados requerida de 9600 bits/s é bem maior que a largura de banda de 4000Hz, o canal pode ser descrito como limitado em banda e se utilizará a modulação MPSK
- Pode-se observar na tabela que o MPSK com $M = 8$ (sem nenhuma codificação adicional) satisfaz os requisitos, pois para $M = 8$, $E_b/N_0 = 13dB < 13,2dB$ e a banda utilizada é de apenas 3200Hz
- Sem a disponibilidade da tabela utilizada, pode-se calcular os valores de E_b/N_0 e P_B a partir das expressões mostradas no capítulo 4

Exemplo de um Sistema Não-codificado Limitado em Banda



Exemplo de um Sistema Não-codificado Limitado em Potência

- Admite-se que se dispõe de um canal de rádio AWGN com largura de banda $W = 45\text{kHz}$
- Admite-se também que, devido às limitações do sistema, a relação $P_r/N_0 = 48\text{dB} - \text{Hz}$
- Além disso, a taxa requerida é de $R = 9600\text{bits/s}$ e que a probabilidade de erro é de no máximo $P_B = 10^{-5}$
- A relação E_b/N_0 disponível em dBs é calculada como

$$\begin{aligned}\frac{P_r}{N_0} &= \frac{E_b}{N_0} R \\ \frac{E_b}{N_0}(\text{dB}) &= \frac{P_r}{N_0}(\text{dB} - \text{Hz}) - R(\text{dB} - \text{bit/s}) \\ &= 48 - (10 \times \log_{10} 9600) = 8,2\text{dB}\end{aligned}$$

Exemplo de um Sistema Não-codificado Limitado em Potência

- Como a largura de banda de 45kHz é abundante em relação à taxa de transmissão, mas E_b/N_0 é relativamente baixo para essa P_B , o canal pode ser descrito como limitado em potência e se utilizará a modulação MFSK
- Pode-se observar na tabela que o MFSK com $M = 16$ (sem nenhuma codificação adicional) satisfaz os requisitos, pois para $M = 16$, $W = 38,4\text{kHz} < 45\text{kHz}$ e o E_b/N_0 requerido é de apenas 8, 1 dB
- Sem a disponibilidade da tabela utilizada, pode-se calcular os valores de E_b/N_0 e P_B a partir das expressões mostradas no capítulo 4

Exemplo de um Sistema Codificado Limitado em Potência e em Banda

- Admite-se que se dispõe de um canal de rádio AWGN com largura de banda $W = 4000\text{Hz}$
- Admite-se também que, devido às limitações do sistema, a relação $P_r/N_0 = 53\text{db} - \text{Hz}$
- Além disso, a taxa requerida é de $R = 9600\text{bits/s}$ e que a probabilidade de erro é de no máximo $P_B = 10^{-9}$
- A relação E_b/N_0 disponível em dBs foi calculada anteriormente e vale $13,2\text{dB}$
- Com $13,2\text{dB}$ o sistema alcança apenas uma probabilidade de erro em torno de 10^{-5} e portanto, ele pode ser considerado limitado em banda e em potência

Exemplo de um Sistema Codificado Limitado em Potência e em Banda

- A solução é utilizar um código corretor de erros para melhorar a probabilidade de erro sem aumentar E_b/N_0 e a banda de modo significativo (dentro dos limites especificados)
- Nesse problema, serão utilizados os códigos BCH mostrados na tabela a seguir
- O ganho de codificação proporcionado pelo código para uma dada P_B é dado por

$$G(\text{db}) = \left(\frac{E_b}{N_0} \right)_{\text{não codificado}} (\text{dB}) - \left(\frac{E_b}{N_0} \right)_{\text{codificado}} (\text{dB})$$

Exemplo de um Sistema Codificado Limitado em Potência e em Banda

TABLE 9.2 BCH Codes (Partial Catalog)

n	k	t
7	4	1
15	11	1
	7	2
	5	3
31	26	1
	21	2
	16	3
	11	5
63	57	1
	51	2
	45	3
	39	4
	36	5
	30	6
	127	120
113		2
106		3
99		4
92		5
85		6
78		7
71		9
64		10
57		11
50		13
43		14
36		15
29	21	
22	23	
15	27	
8	31	

Exemplo de um Sistema Codificado Limitado em Potência e em Banda

TABLE 9.3 Bandwidth-Compatible BCH Codes

n	k	t	Coding Gain, G (dB), with MPSK	
			$P_B = 10^{-5}$	$P_B = 10^{-9}$
31	26	1	1.8	2.0
63	57	1	1.8	2.2
	51	2	2.6	3.2
127	120	1	1.7	2.2
	113	2	2.6	3.4
	106	3	3.1	4.0

Exemplo de um Sistema Codificado Limitado em Potência e em Banda

- Escolhendo-se a modulação 8 PSK, a largura de banda sem codificação é de 3200 Hz e o código só pode introduzir um aumento de 800 Hz (25% na banda), ou seja, $n/k \leq 1,25$
- Pode-se assim descartar os códigos que não se enquadram nessa limitação de banda
- Utilizando as fórmulas apropriadas para $P_B = 10^{-9}$, o ganho de codificação requerido para atender esses requisitos é de 2,8dB
- O código BCH mais simples que permite alcançar esse objetivo é o (63,51,2), que tem um ganho de codificação de 3,2dB