



Demodulação e Detecção Passa-Faixa

Edmar José do Nascimento

(Tópicos Avançados em Engenharia Elétrica I)

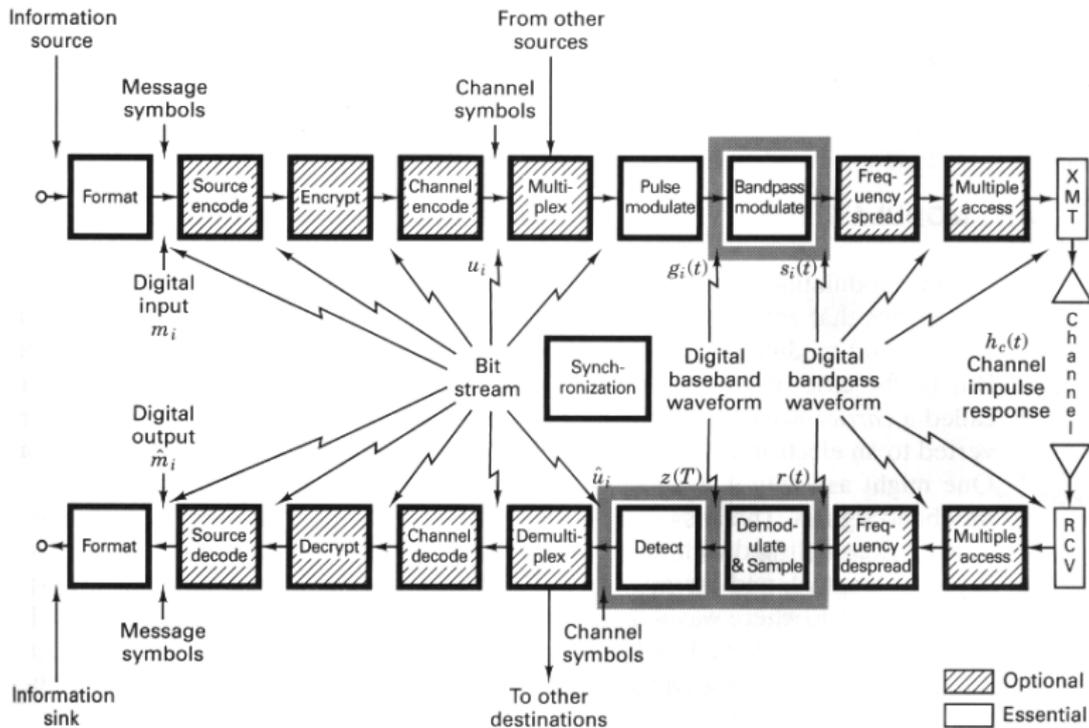
<http://www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento>

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

Roteiro

- 1 Técnicas de Modulação Passa-Faixa
- 2 Detecção de Sinais
 - Detecção Coerente
 - Detecção Não Coerente
 - Implementação em Quadratura
- 3 Desempenho dos Sistemas Modulados
 - Sistemas Binários
 - Sistemas M-ários

Introdução



Tipos de Modulação Passa-Faixa

- Na modulação passa-faixa, a amplitude, a freqüência ou a fase de uma portadora são modificadas de acordo com a informação a ser transmitida
- A forma geral da onda transmitida é dada por

$$s(t) = A(t) \cos \theta(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \phi(t)]$$

- As técnicas de modulação digital passa-faixa podem ser agrupadas em duas categorias
 - Não coerentes - O receptor não utiliza o conhecimento da fase da portadora no processo de detecção/demodulação
 - Coerentes - O receptor explora o conhecimento exato da fase da portadora no processo de detecção/demodulação



Tipos de Modulação Passa-Faixa

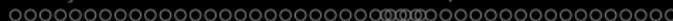
Bandpass Signaling

Coherent

Phase shift keying (PSK)
 Frequency shift keying (FSK)
 Amplitude shift keying (ASK)
 Continuous phase modulation (CPM)
 Hybrids

Noncoherent

Differential phase shift keying (DPSK)
 Frequency shift keying (FSK)
 Amplitude shift keying (ASK)
 Continuous phase modulation (CPM)
 Hybrids



Representações dos Sinais Modulados

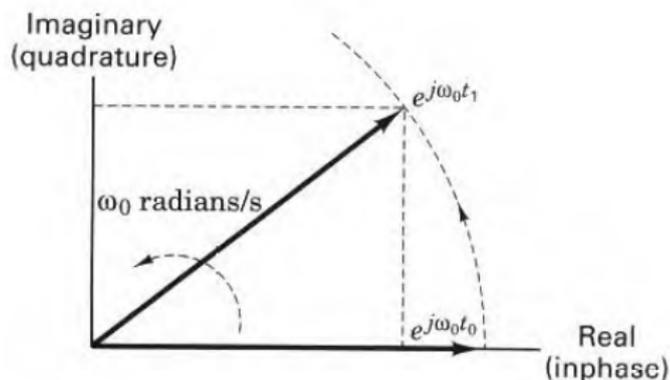
- Senóides podem ser representadas como fasores
- De acordo com a relação de Euler

$$e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t$$

- Uma exponencial complexa contém uma componente real (*inphase* - em fase) e uma componente imaginária (*quadrature* - em quadratura)
- As componentes em fase e em quadratura são ortogonais
- A exponencial $e^{j\omega_0 t}$ pode ser usada para representar portadoras senoidais

Representações dos Sinais Modulados

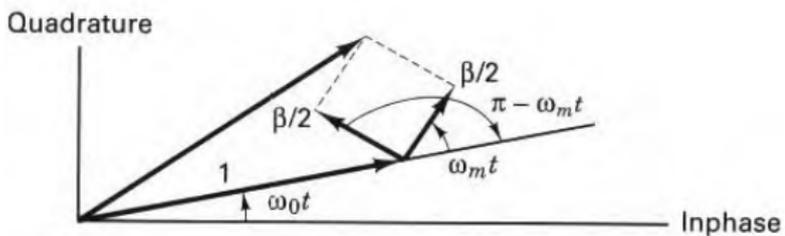
- Na representação vetorial de uma senóide, a portadora pode ser representada como um vetor unitário girando no sentido anti-horário em uma frequência ω_0



Representações dos Sinais Modulados

- No caso de um sinal modulado em frequência, o fasor tem uma frequência de rotação variável

$$s(t) = \operatorname{Re} \left\{ e^{j\omega_0 t} \left(1 - \frac{\beta e^{-j\omega_m t}}{2} + \frac{\beta e^{j\omega_m t}}{2} \right) \right\}$$



PSK - Phase Shift Keying

- A expressão analítica para a modulação PSK é

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos[\omega_0 t + \phi_i(t)], \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, \dots, M$$

- O termo de fase $\phi_i(t)$ é representado geralmente por

$$\phi_i(t) = \frac{2\pi i}{M}, \quad i = 1, \dots, M$$

- E representa a energia e T a duração do símbolo
- No espaço de sinais, os M sinais de uma constelação PSK podem ser representados em uma base com dois sinais $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$
 - Para $M = 2$, apenas um sinal $\psi_1(t)$ é suficiente



FSK - Frequency Shift Keying

- A expressão analítica para a modulação FSK é

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_i t + \phi), \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, \dots, M$$

- O freqüência ω_i pode assumir um dentre M níveis discretos
- No espaço de sinais, os M sinais de uma constelação são vetores ortogonais
 - A base possui M sinais
- A transição entre as freqüências pode ser suave (CPFSK - Continuous-phase FSK) ou brusca
- Há ainda uma restrição no espaçamento entre os tons para que a condição de ortogonalidade seja garantida

ASK - Amplitude Shift Keying

- A expressão analítica para a modulação ASK é

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_i(t)}{T}} \cos(\omega_0 t + \phi), \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, \dots, M$$

- A amplitude $\sqrt{2E_i(t)/T}$ pode assumir um dentre M níveis discretos
- No espaço de sinais, os M sinais de uma constelação são representados em um espaço unidimensional
- ASK foi uma das primeiras técnicas de modulação digital, mas atualmente é pouco utilizada



Representações dos Sinais Modulados

- O termo $\sqrt{2E/T}$ equivale a amplitude da forma de onda
- Isso pode ser observado a partir das expressões

$$\begin{aligned} s(t) &= A \cos \omega t = \sqrt{2} A_{RMS} \cos \omega t = \sqrt{2 A_{RMS}^2} \cos \omega t \\ &= \sqrt{2P} \cos \omega t = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos \omega t \end{aligned}$$

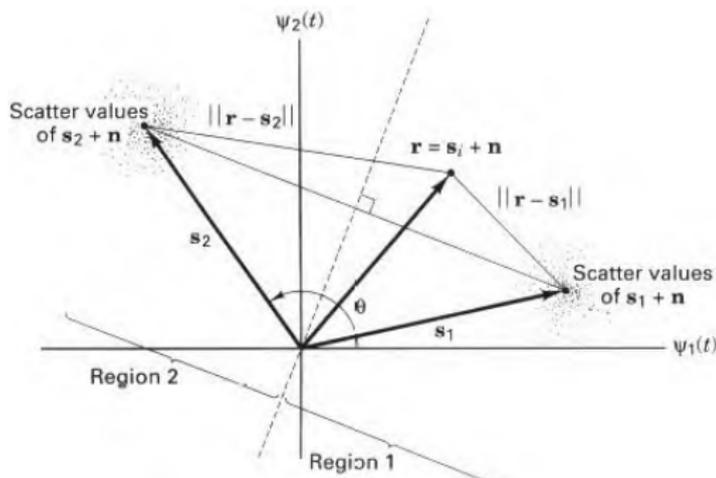
- A representação usando a energia E é muito mais adequada na análise dos sistemas modulados

Detecção de Sinais no Ruído Gaussiano

- Os conceitos utilizados na detecção de sinais em banda básica podem ser utilizados na detecção de sinais passa-faixas
- De acordo com o teorema da equivalência, executar o processamento de um sinal passa-faixas e em seguida deslocá-lo para a banda básica (heterodinagem) é equivalente a deslocar o sinal passa-faixas para a banda básica e em seguida processá-lo em banda básica
- Sendo assim, todo o processamento pode ser realizado em banda básica

Regiões de Decisão

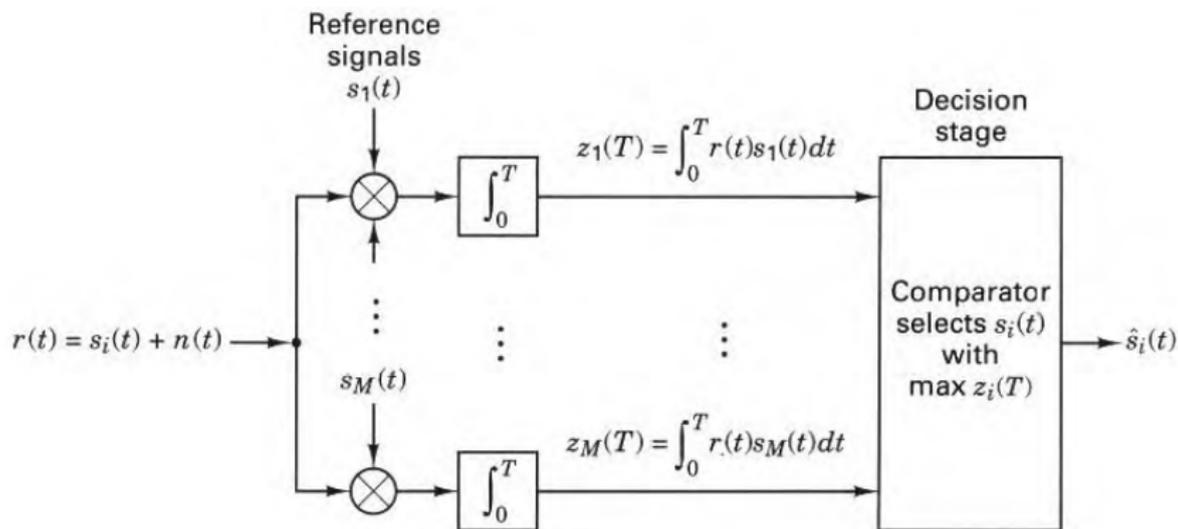
- A minimização da probabilidade de erro de símbolo leva a uma regra de decisão que consiste em escolher o sinal $s_i(t)$ que minimiza a distância $d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i) = \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|$
- A partir dessa regra, traçam-se regiões de decisão



Receptor Correlator

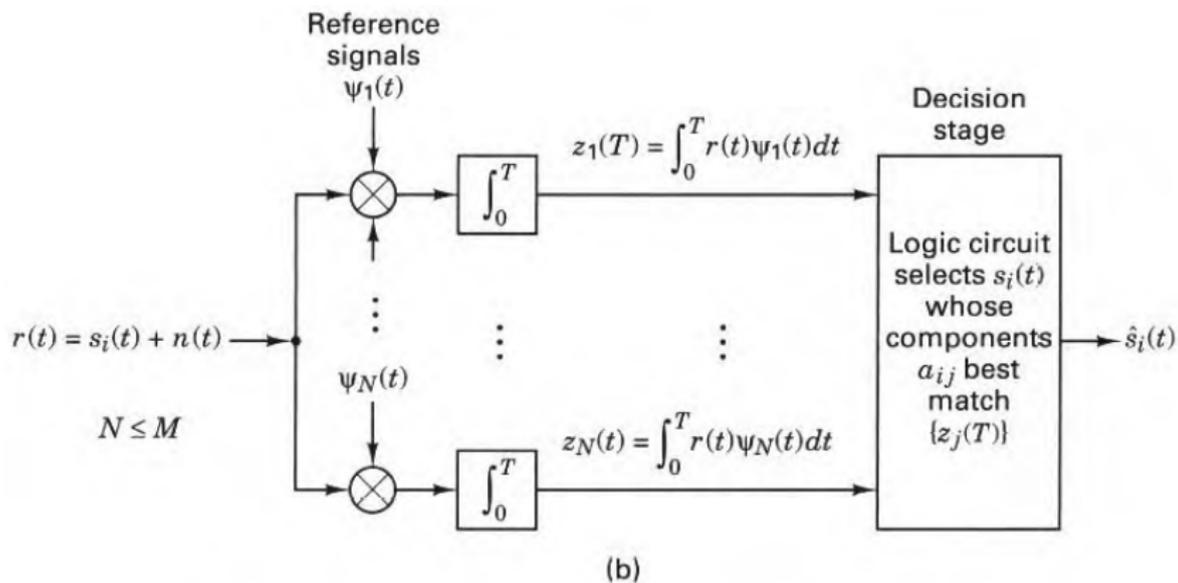
- Vimos que o filtro casado pode ser implementado por correlatores
- A idéia é correlacionar o sinal recebido com o conjunto de sinais transmitidos $\{s_i(t)\}$ e escolher o que mais se aproxima dele, ou seja, o que maximiza $z_i(T)$
- Uma outra opção é correlacionar o sinal recebido com os N sinais de base
- Essa segunda opção é bastante útil na modulação PSK

Receptor Correlator



(a)

Receptor Correlator





Roteiro

- 1 Técnicas de Modulação Passa-Faixa
- 2 **Detecção de Sinais**
 - **Detecção Coerente**
 - Detecção Não Coerente
 - Implementação em Quadratura
- 3 Desempenho dos Sistemas Modulados
 - Sistemas Binários
 - Sistemas M-ários

Detecção Coerente para PSK

- Nos detectores mostrados anteriormente, a geração dos sinais de referência pressupõem o conhecimento preciso da fase da portadora
- No caso do PSK binário, as formas de onda podem ser representadas por

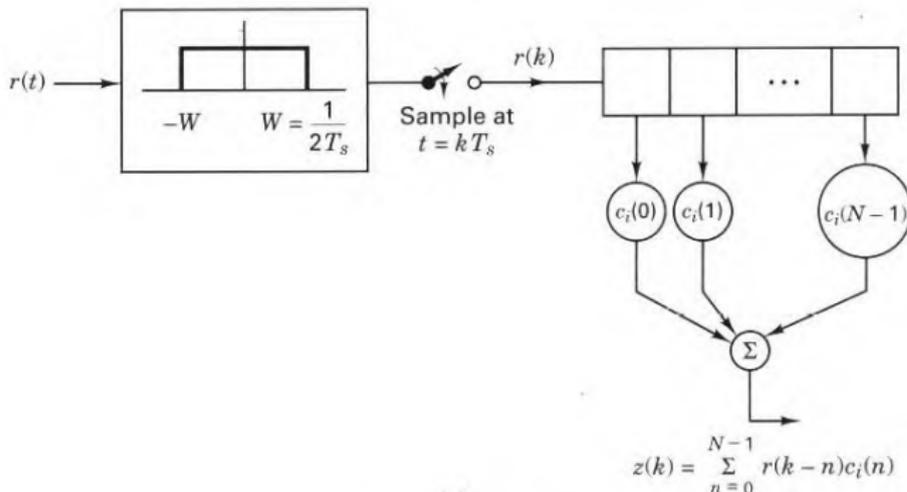
$$s_1(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos[\omega_0 t + \phi], \quad 0 \leq t \leq T$$

$$s_2(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos[\omega_0 t + \phi + \pi] = -\sqrt{\frac{2E}{T}} \cos[\omega_0 t + \phi]$$

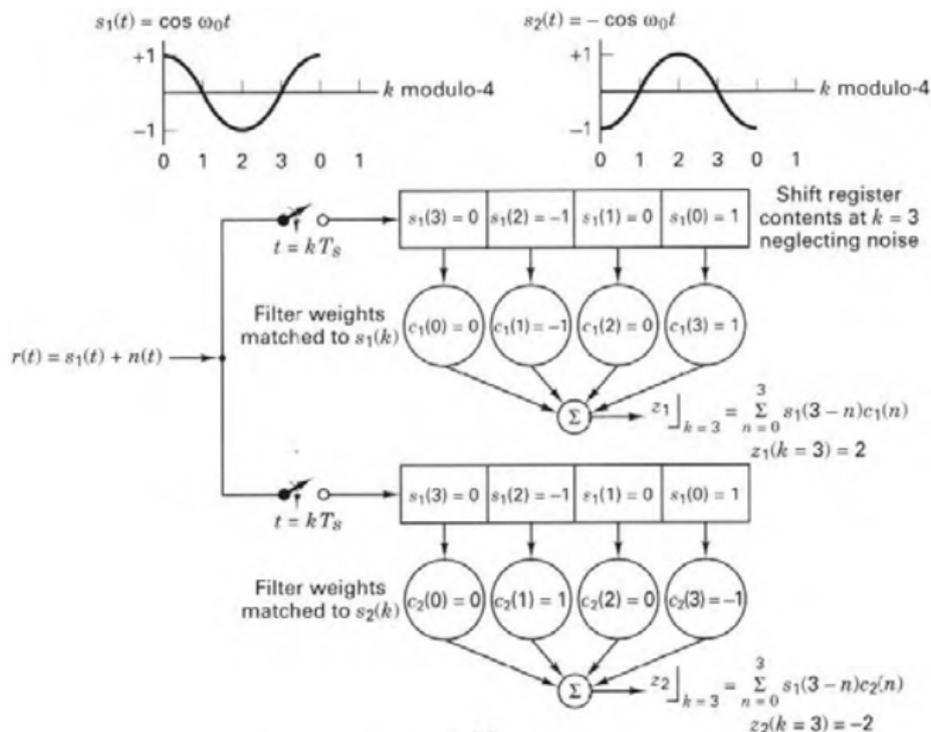
- Como o termo de fase ϕ é constante, pode-se admitir que $\phi = 0$

Implementação Digital do Filtro Casado

- Nas figuras anteriores, é sugerida uma implementação analógica do filtro casado
- Uma outra alternativa é realizar uma implementação usando técnicas digitais



Implementação Digital do Filtro Casado

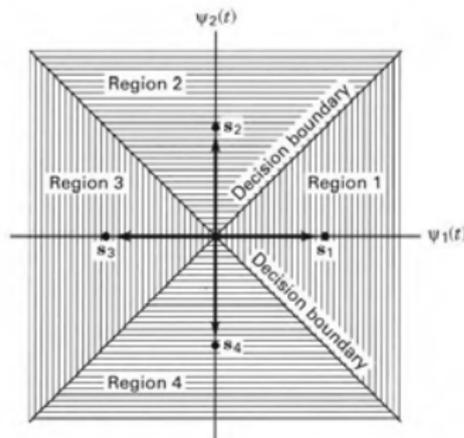


Detecção Coerente para MPSK

- Assim, um sinal arbitrário pode ser representado como

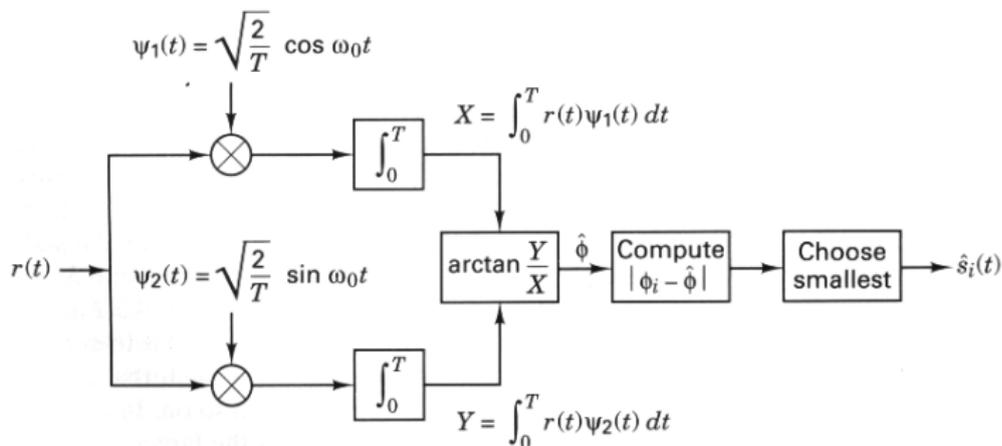
$$\begin{aligned} s_i(t) &= a_{i1}\psi_1(t) + a_{i2}\psi_2(t) \\ &= \sqrt{E} \cos\left(\frac{2\pi i}{M}\right)\psi_1(t) + \sqrt{E} \sin\left(\frac{2\pi i}{M}\right)\psi_2(t) \end{aligned}$$

- As regiões de decisão podem ser facilmente obtidas

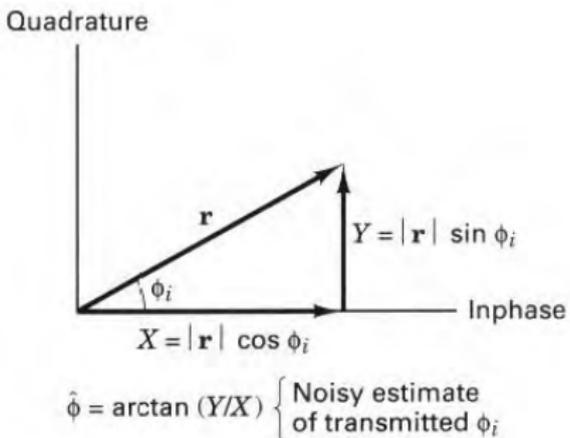


Detecção Coerente para MPSK

- O Demodulador estima a fase do sinal recebido e compara com a dos sinais de referência



Detecção Coerente para MPSK



Detecção Coerente para FSK

- Um conjunto tipo de sinais FSK é dado por

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_i t + \phi), \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, \dots, M$$

- Admite-se também que a diferença entre tons consecutivos ($\omega_{i+1} - \omega_i$) é um múltiplo de π/T
- A base ortonormal é dada pelos sinais $N = M$ sinais $\{\psi_j(t)\}$ dados por

$$\psi_j(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_j t \quad j = 1, \dots, N$$



Detecção Coerente para FSK

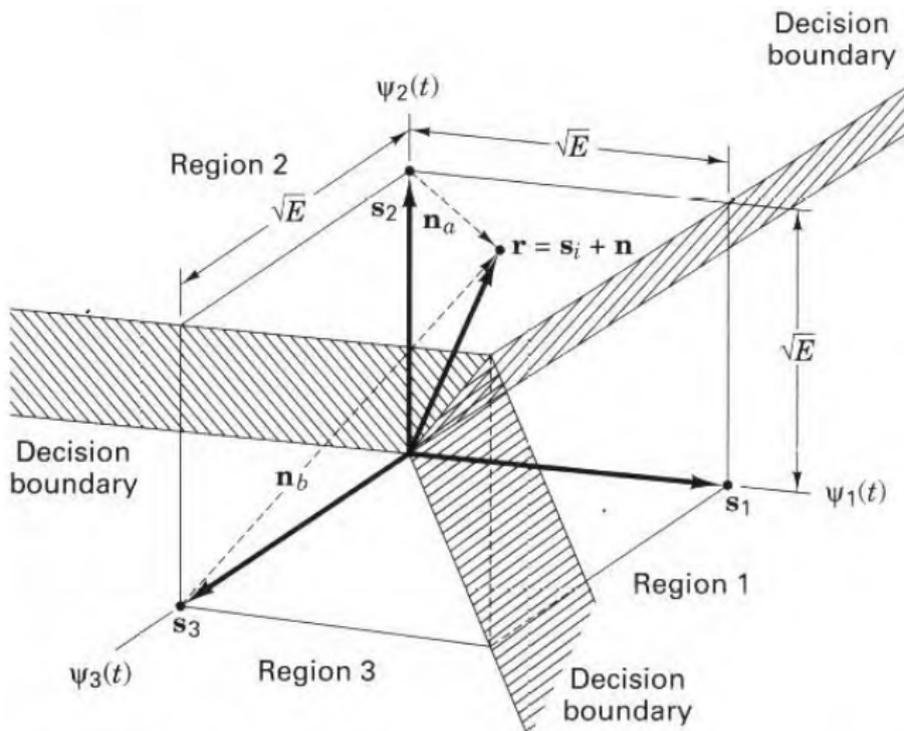
- Os M sinais são ortogonais e além disso

$$a_{ij} = \begin{cases} \sqrt{E}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

- A distância entre dois sinais quaisquer \mathbf{s}_i e \mathbf{s}_j é constante e igual a

$$d(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j) = \|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\| = \sqrt{2E}, i \neq j$$

Detecção Coerente para FSK





Roteiro

- 1 Técnicas de Modulação Passa-Faixa
- 2 **Detecção de Sinais**
 - Detecção Coerente
 - **Detecção Não Coerente**
 - Implementação em Quadratura
- 3 Desempenho dos Sistemas Modulados
 - Sistemas Binários
 - Sistemas M-ários

Detecção Não Coerente para DPSK

- No PSK diferencial (DPSK), a codificação é feita a partir da diferença entre as fases e a detecção é não coerente
- Se o sinal transmitido é dado por

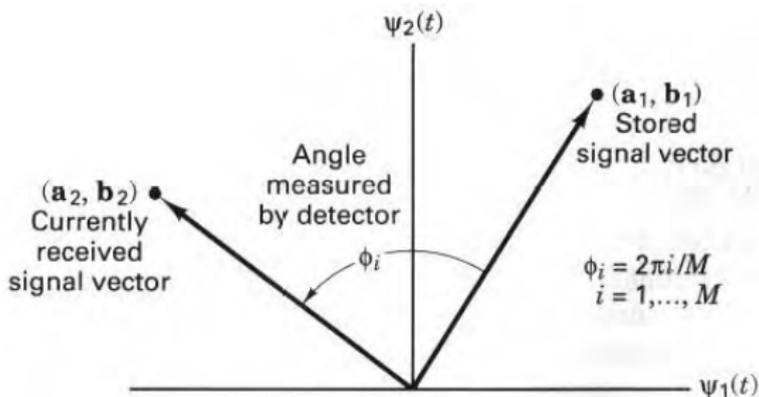
$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos [\omega_0 t + \theta_i(t)], \quad i = 1, \dots, M$$

- O sinal recebido pode ser representado por

$$r(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos [\omega_0 t + \theta_i(t) + \alpha] + n(t), \quad i = 1, \dots, M$$

- Como na detecção não coerente não há um sincronismo de fase, então não se pode um filtro casado ao sinal, pois a saída é função de α

Detecção Não Coerente para DPSK



- Como no DPSK pode haver propagação de erros, então o seu desempenho é pior do que o PSK coerente

Exemplo com DPSK Binário

- Seja $m(k)$ o bit de mensagem a ser enviado no instante k e seja $c(k)$ a seqüência codificada, então a informação pode ser codificada de duas maneiras

$$c(k) = c(k-1) \oplus m(k)$$

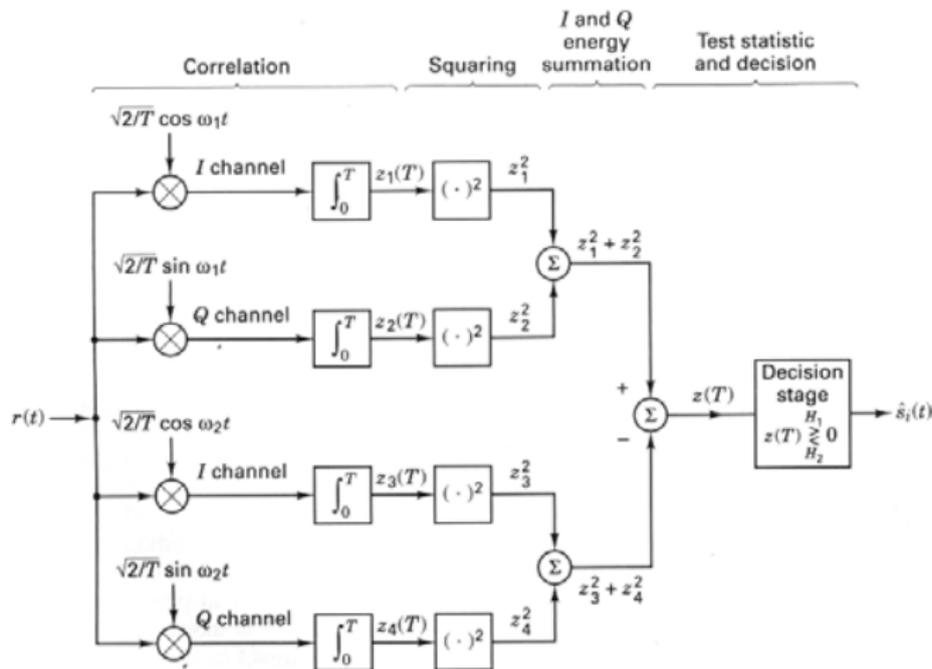
$$c(k) = \overline{c(k-1) \oplus m(k)}$$

Sample index, k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Information message, $m(k)$		1	1	0	1	0	1	1	0	0	1
Differentially encoded message (first bit arbitrary), $c(k)$	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
Corresponding phase shift, $\theta(k)$	π	π	π	0	0	π	π	π	0	π	π

Detecção Não Coerente para FSK

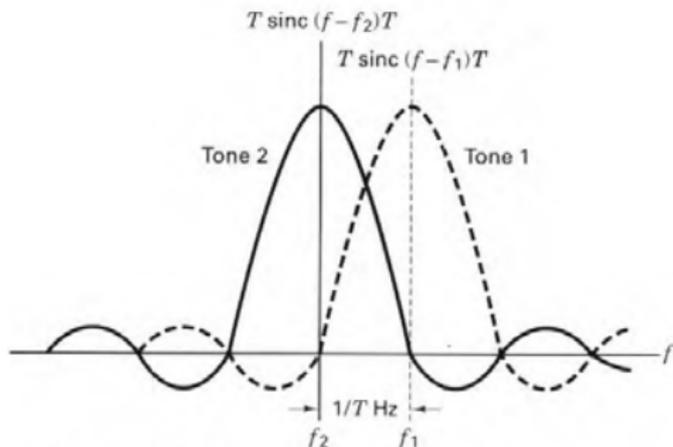
- A detecção não coerente do FSK pode ser feita de duas maneiras: Receptor em quadratura e detecção não coerente usando detectores de envelope
- Os receptores em quadratura são em geral preferidos para FSK não coerente
- No receptor em quadratura, procura-se gerar uma saída proporcional à energia do sinal
- Mesmo havendo uma incerteza na fase, o sinal correlaciona parcialmente com o canal I e o canal Q para a frequência a ser detectada
- No final, gera-se uma estatística de teste que é comparada com um limiar

Receptor em Quadratura



Detecção Não Coerente para FSK

- No FSK não coerente, deve haver uma separação mínima entre as frequências para que não haja interferência na detecção
- A separação deve ser um múltiplo de $1/T$ Hz, como pode ser visto analisando-se a transformada de Fourier dos sinais $s_i(t)$



Roteiro

- 1 Técnicas de Modulação Passa-Faixa
- 2 **Detecção de Sinais**
 - Detecção Coerente
 - Detecção Não Coerente
 - **Implementação em Quadratura**
- 3 Desempenho dos Sistemas Modulados
 - Sistemas Binários
 - Sistemas M-ários

Envelope Complexo

- A notação complexa pode facilitar a construção de moduladores e demoduladores
- Qualquer forma de onda real passa-faixa pode ser escrita como

$$s(t) = \text{Re}\{g(t)e^{j\omega_0 t}\}$$

- Nesse caso, $g(t)$ é chamado de envelope complexo

$$g(t) = x(t) + jy(t) = |g(t)|e^{j\theta(t)} = R(t)e^{j\theta(t)}$$

$$R(t) = |g(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}; \theta(t) = \arctan \frac{x(t)}{y(t)}$$

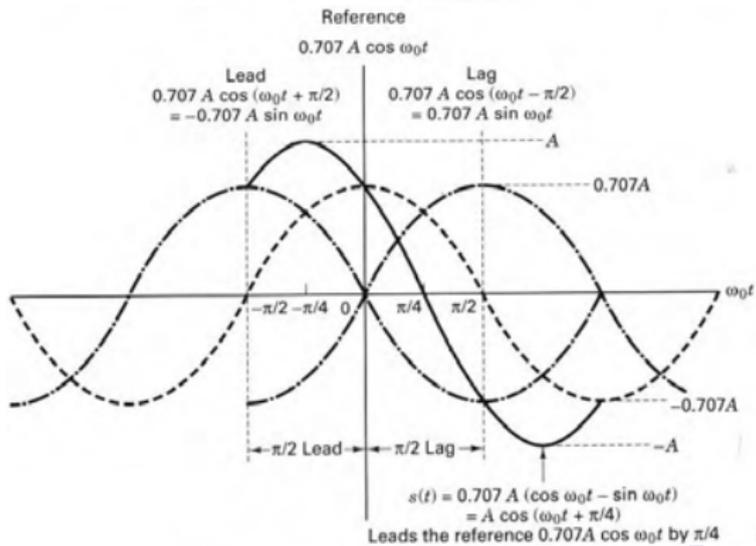
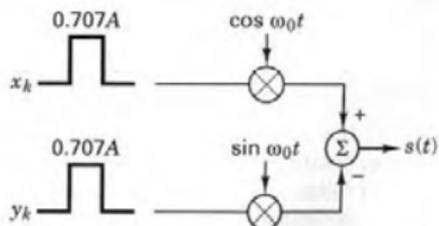
$$\begin{aligned} s(t) &= \text{Re}\{[x(t) + jy(t)][\cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t]\} \\ &= x(t) \cos \omega_0 t - y(t) \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

Implementação em Quadratura de um Modulador

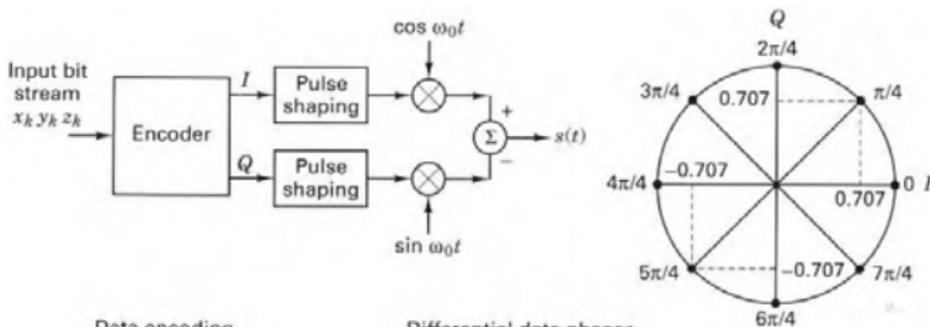
- Pode-se implementar um modulador a partir da escolha dos elementos $x(t)$ e $y(t)$ do envelope complexo
- Sejam g_k, x_k, y_k , os valores no instante k , então a geração de um sinal PSK com fase $\pi/4$ pode ser feita fazendo-se $x_k = y_k = 0,707A$, pois

$$\begin{aligned} s(t) &= \operatorname{Re}\{g_k e^{j\omega_0 t}\} \\ &= \operatorname{Re}\{[x_k + jy_k][\cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t]\} \\ &= x_k \cos \omega_0 t - y_k \sin \omega_0 t \\ &= 0,707A \cos \omega_0 t - 0,707A \sin \omega_0 t \\ &= A \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Implementação em Quadratura de um Modulador



Implementação em Quadratura do Modulador D8PSK



Data encoding

x_k	y_k	z_k	$\Delta\phi_k$
0	0	0	0
0	0	1	$\pi/4$
0	1	1	$2\pi/4$
0	1	0	$3\pi/4$
1	1	0	$4\pi/4$
1	1	1	$5\pi/4$
1	0	1	$6\pi/4$
1	0	0	$7\pi/4$

Differential data phasor

$$\phi_k = \phi_{k-1} + \Delta\phi_k$$

Let $\phi_0 = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$x_k y_k z_k$	110	001	110	010
$\Delta\phi_k$:	π	$\pi/4$	π	$3\pi/4$
ϕ_k :	π	$5\pi/4$	$\pi/4$	π
I :	-1	-0.707	0.707	-1
Q :	0	-0.707	0.707	0

Roteiro

- 1 Técnicas de Modulação Passa-Faixa
- 2 Detecção de Sinais
 - Detecção Coerente
 - Detecção Não Coerente
 - Implementação em Quadratura
- 3 Desempenho dos Sistemas Modulados
 - **Sistemas Binários**
 - Sistemas M-ários

Probabilidade de Erro para Detecção Coerente do BPSK

- A probabilidade que um detector tome uma decisão errada é chamada de *probabilidade de erro de símbolo* P_E
- Como cada símbolo representa uma certa quantidade de bits, pode-se ter também a *probabilidade de erro de bit* P_B
- No caso binário, $P_E = P_B$
- No caso geral, $M > 2$, a relação entre P_E e P_B depende da codificação utilizada
- A expressão para P_B para a detecção coerente na modulação BPSK com ruído AWGN é a mesma para a sinalização binária antipodal, ou seja

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$



Probabilidade de Erro para Detecção Coerente do BFSK

- A expressão para P_B para a detecção coerente na modulação FSK binária com ruído AWGN é a mesma para a sinalização binária ortogonal, ou seja

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

- Comparando-se essa expressão com a do BPSK, observa-se que para a mesma probabilidade de erro, o FSK binário necessita de mais 3 dB de E_b/N_0 que o BPSK



Probabilidade de Erro para Detecção Não Coerente do BFSK

- Considerando-se o método de detecção não coerente usando filtros sintonizados em f_1 e f_2 com largura de banda W_f seguido da detecção de envelope, a probabilidade de erro de bit P_B pode ser expressada como

$$P_B = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{A^2}{4N_0 W_f}\right)$$

- Sendo $A = \sqrt{2E/T}$, a amplitude do sinal modulado
- Este resultado é válido somente quando a ISI pode ser negligenciada
- O valor mínimo de W_f para que a ISI seja nula é de $1/T$

Probabilidade de Erro para Detecção Não Coerente do BFSK

- Nesse caso,

$$\begin{aligned}P_B &= \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{A^2 T}{4N_0}\right) \\ &= \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{2N_0}\right)\end{aligned}$$

- Comparando-se essa expressão com a do FSK coerente, observa-se que para a mesma probabilidade de erro, o FSK não coerente necessita de mais 1 dB de E_b/N_0 que o FSK coerente

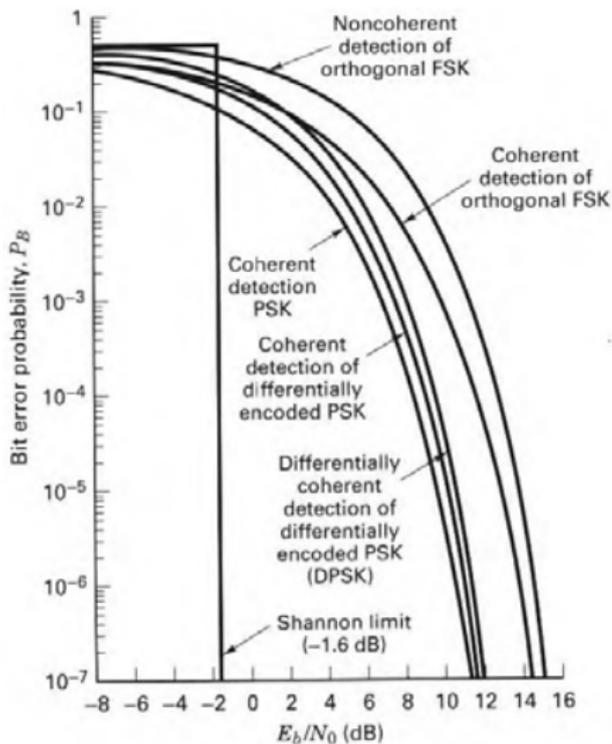
Probabilidade de Erro para Detecção Não Coerente do DPSK

- Para a detecção não coerente do DPSK, a probabilidade de erro de bit é dada por

$$P_B = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{N_0}\right)$$

- A comparação entre esses tipos diferentes de modulações binárias pode ser visto na figura a seguir
- Há uma diferença em torno de 4 dB entre o melhor e o pior caso
- O pior desempenho na probabilidade de erro é em geral compensado pelo fato da implementação do receptor ser bem mais simples

Desempenho das Modulações Binárias

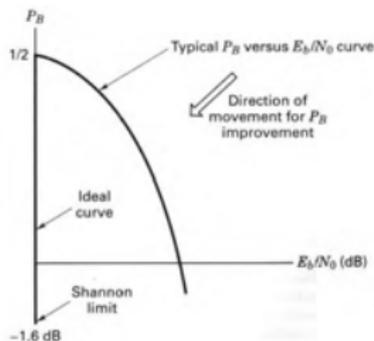


Roteiro

- 1 Técnicas de Modulação Passa-Faixa
- 2 Detecção de Sinais
 - Detecção Coerente
 - Detecção Não Coerente
 - Implementação em Quadratura
- 3 Desempenho dos Sistemas Modulados
 - Sistemas Binários
 - **Sistemas M-ários**

Probabilidade de Erro Ideal

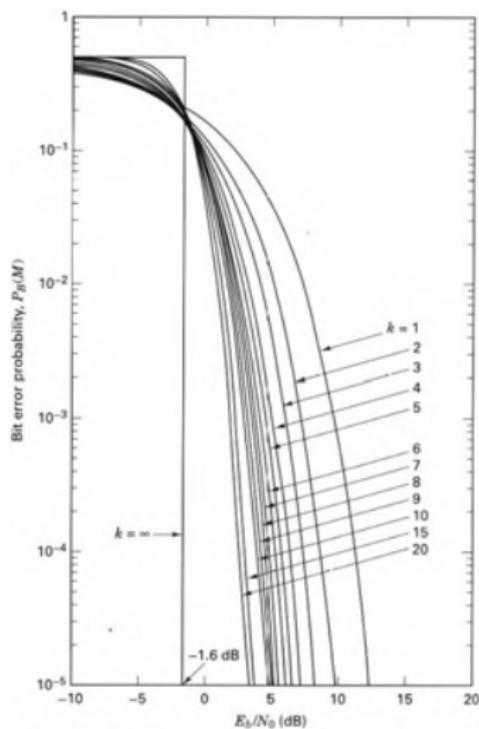
- Uma pergunta que se pode fazer é até que ponto se pode melhorar o desempenho de um sistema em relação à probabilidade de erro
- A curva ideal para a probabilidade de erro esbarra no limite de Shannon
- Em uma curva ideal, $P_E = 0$ para E_b/N_0 acima de $-1,6\text{dB}$ e $P_E = 1/2$ se E_b/N_0 está abaixo de $-1,6\text{dB}$



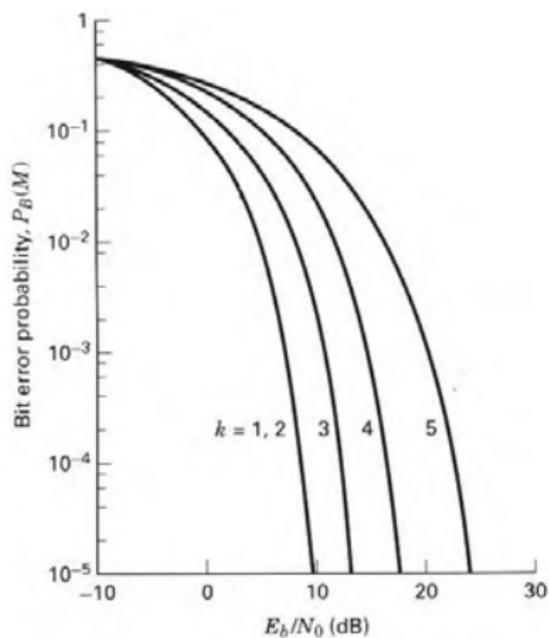
Sinalização M-ária

- Na sinalização M-ária, são utilizados $M = 2^k$ sinais para representar os M símbolos de informação
- A vantagem principal de se escolher um valor de M grande é aumentar a taxa de transmissão em bits por segundo para uma dada largura de banda (MPSK)
- No MFSK, a largura de banda também aumenta a medida que M aumenta
- Dependendo do tipo de modulação escolhida, o desempenho em relação à probabilidade de erro de símbolo melhora ou piora quando se aumenta o valor de M
- Assim, tem-se um compromisso entre a largura de banda da transmissão e a probabilidade de erro

Sinalização M-ária Ortogonal

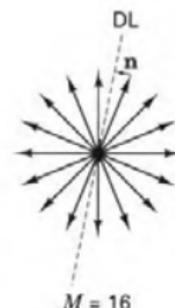
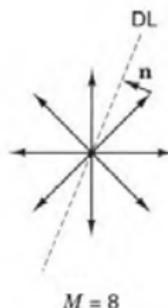
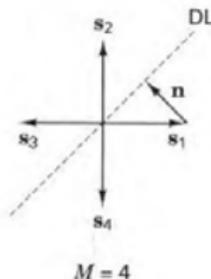
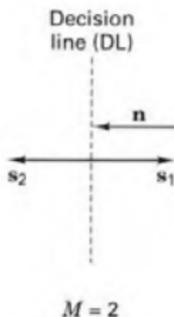


Sinalização MPSK



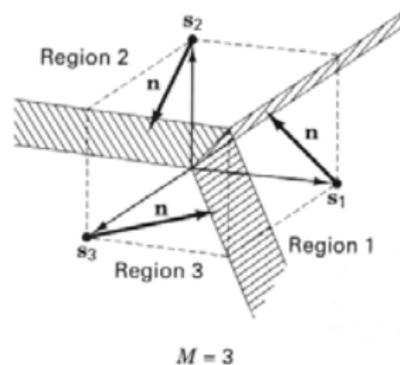
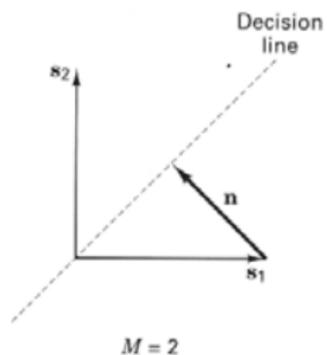
Sinalização MPSK

- Observa-se que na sinalização MPSK, a medida que se aumenta a quantidade de símbolos, a amplitude do ruído necessária para ocasionar um erro diminui e portanto, é de se esperar que a probabilidade de erro aumente
- Uma solução para esse problema é aumentar a energia do sinal



Sinalização MFSK

- Observa-se que na sinalização MPSK, a medida que se aumenta a quantidade de símbolos, a distância entre dois sinais quaisquer permanece constante e assim os vetores de ruído tem o mesmo comprimento



Probabilidade de Erro para Sistemas M-ários

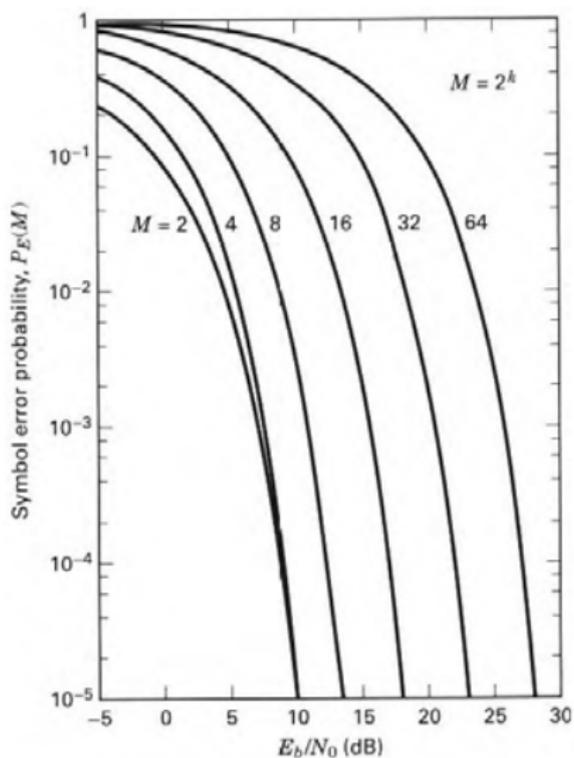
- Para um sistema MDPSK detectado de modo não coerente, P_E pode ser expressado como

$$P_E(M) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin \frac{\pi}{\sqrt{2M}}\right)$$

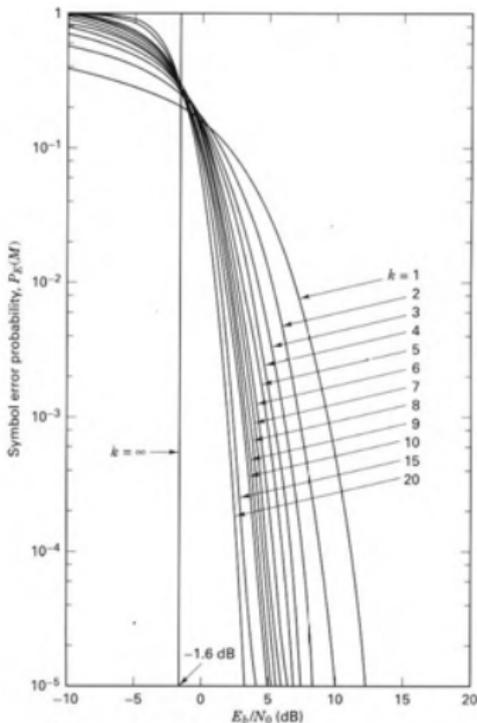
- Para o MFSK detectado coerentemente, o que se tem é um limitante superior para P_E dado por

$$P_E(M) \leq (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

Probabilidade de Erro para MPSK Coerente



Probabilidade de Erro para Sinalização Ortogonal M-ária Coerente



Relação entre P_E e P_B

- Até agora, as fórmulas obtidas se referem à probabilidade de erro de símbolo P_E
- A relação de P_E com a probabilidade de erro de bit P_B nem sempre é evidente
- No caso de uma sinalização ortogonal, a relação entre P_E e P_B é dada por

$$\frac{P_E}{P_B} = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} = \frac{M/2}{M - 1}$$

- No limite, tem-se que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P_E}{P_B} = \frac{1}{2}$$

Relação entre P_E e P_B

- No caso da sinalização MPSK, é desejável um esquema de codificação em que a confusão entre um símbolo e o seu vizinho prejudique apenas um bit
- Isso é alcançado com o código Gray
- Com o código Gray, pode-se mostrar que

$$P_B \approx \frac{P_E}{\log_2 M} \quad (P_E \ll 1)$$

