

Demodulação e Detecção em Banda Básica

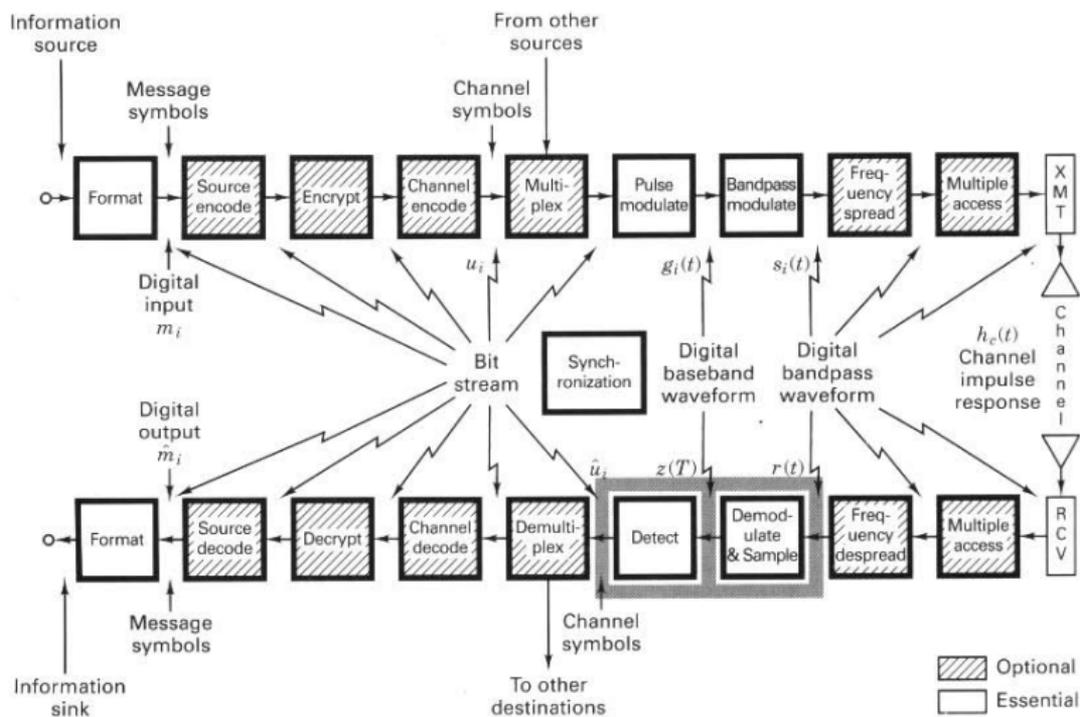
Edmar José do Nascimento
(Tópicos Avançados em Engenharia Elétrica I)
<http://www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento>

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

Roteiro

- 1 Sinais e Ruído
- 2 Detecção de Sinais Binários
- 3 Interferência Intersimbólica
- 4 Equalização

Introdução



Introdução

- Na sinalização em banda básica digital, os pulsos não são multiplicados por portadoras senoidais de alta frequência
- Por essa razão, seria de se esperar que não fosse necessário a realização de nenhum procedimento para recuperar a informação digital codificada
- Entretanto, os pulsos recebidos não possuem a mesma forma dos pulsos transmitidos
 - Pode haver interferência entre pulsos vizinhos e a sua forma não é mais a mesma
 - Sendo assim, os pulsos não estão prontos para serem detectados sem o devido processamento prévio
- É função então da etapa de demodulação e detecção, a correta interpretação da informação transmitida a partir da forma de onda recebida

Desempenho dos Sistemas de Comunicações

- Quando um forma de onda digital é interpretada de modo equivocado, diz-se que houve um *erro*
- Vários fatores podem contribuir para uma degradação do desempenho do sistema em relação à quantidade de erros observada
 - Efeito de filtragem causado pelo transmissor, canal e receptor
 - Ruído e interferências de diversas fontes tais como ruído atmosférico, transitórios, etc
- Alguns tipos de ruído podem ser minimizados ou eliminados com um projeto cuidadoso
- Outros tipos de ruído como o ruído térmico não podem ser eliminados

Desempenho dos Sistemas de Comunicações

- Assim como foi visto anteriormente, o ruído térmico pode ser modelado como um processo aleatório gaussiano branco
 - As amplitudes pequenas são mais prováveis
 - A probabilidade do ruído assumir uma amplitude n é obtida a partir de uma fdp gaussiana ou normal
 - A densidade espectral de potência é constante para uma ampla faixa de frequências
- O modelo adotado na maioria das análises é o AWGN (Additive White Gaussian Noise)

Demodulação e Detecção

- Em um sistema binário, durante um intervalo de sinalização de duração T , o sistema pode transmitir uma dentre duas formas de ondas possíveis, $s_1(t)$ ou $s_2(t)$
- Sendo assim, o sinal transmitido no intervalo T pode ser representado por

$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t), & 0 \leq t \leq T \text{ símbolo 1} \\ s_2(t), & 0 \leq t \leq T \text{ símbolo 0} \end{cases}$$

- Se $h_c(t)$ é a resposta ao impulso do canal e $n(t)$ o ruído, então o sinal recebido $r(t)$ é dado por

$$r(t) = s_i(t) * h_c(t) + n(t), \quad i = 1, 2$$

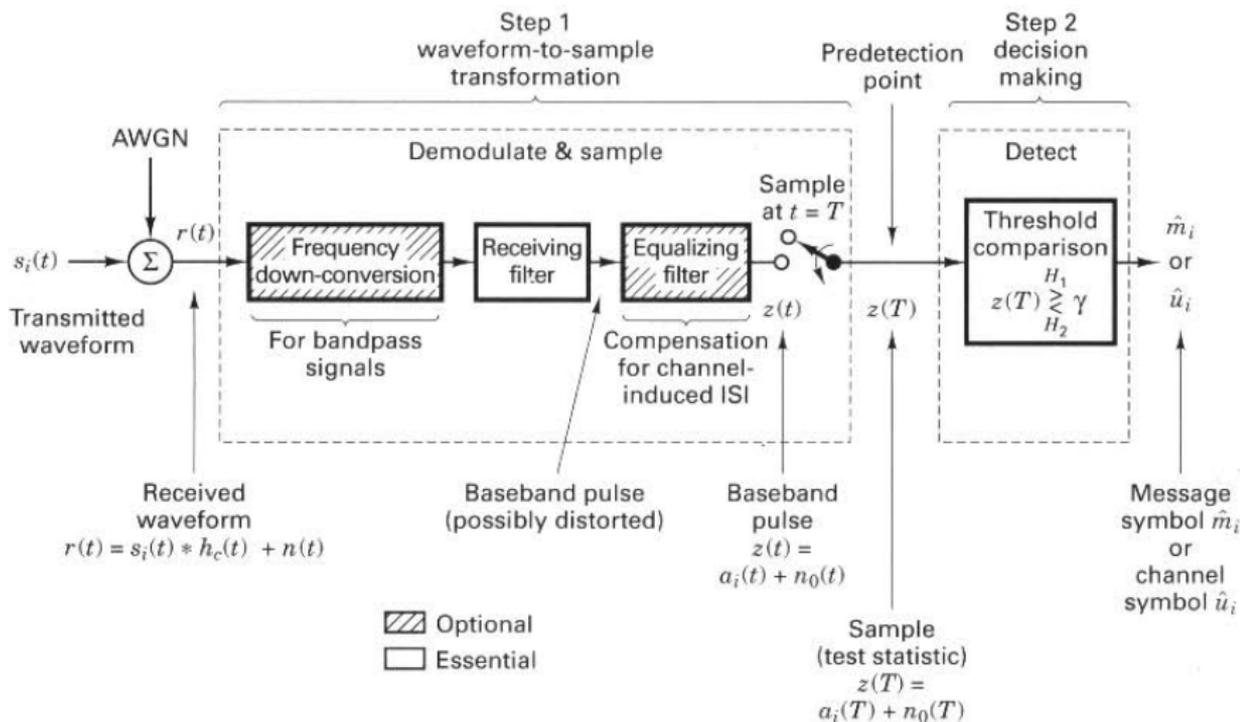
Demodulação e Detecção

- Se o canal não causa distorção, o sinal recebido $r(t)$ é dado por

$$r(t) = s_i(t) + n(t), \quad i = 1, 2$$

- O processo de demodulação consiste na recuperação da forma de onda
- O processo de detecção consiste em tomar a decisão sobre a natureza do símbolo transmitido com base em um valor de uma amostra
- Ao final de cada intervalo T , gera-se uma amostra $z(T)$ com amplitude proporcional à energia do sinal naquele intervalo

Demodulação e Detecção



Demodulação e Detecção

- A saída $z(T)$ pode ser escrita como

$$z(T) = a_i(T) + n_o(T), \quad i = 1, 2$$

- Em que $a_i(T)$ é a componente desejada do sinal e $n_o(T)$ é a componente do ruído
- Da teoria de variáveis aleatórias, pode-se afirmar que n_o é uma variável aleatória gaussiana de média nula
- Assim, como a_i é determinístico, $z(T)$ é uma variável aleatória gaussiana com média a_i
- A fdp de n_o é dada por

$$p(n_o) = \frac{1}{\sigma_o \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{n_o}{\sigma_o} \right)^2 \right]$$

Demodulação e Detecção

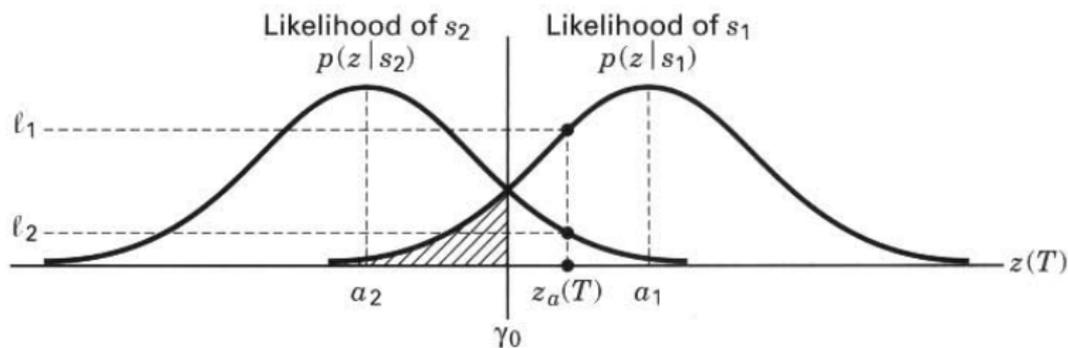
- As fdps condicionais $p(z|s_1)$ e $p(z|s_2)$ são dadas por

$$p(z|s_1) = \frac{1}{\sigma_o\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z - a_1}{\sigma_o} \right)^2 \right]$$

$$p(z|s_2) = \frac{1}{\sigma_o\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z - a_2}{\sigma_o} \right)^2 \right]$$

- $p(z|s_i)$ representa a probabilidade de $z(T)$ dado que $s_i(t)$ foi transmitido
 - Chamada de *likelihood* de s_i
 - O termo em português pode ser confuso: probabilidade ou verossimilhança

Demodulação e Detecção



Demodulação e Detecção

- No final do passo 1, o que importa é o valor da amostra $z(T)$ e não mais a forma de onda
- No passo 2, o detector deve escolher uma dentre duas hipóteses

H_1 : O sinal transmitido foi s_1

H_2 : O sinal transmitido foi s_2

- Essa escolha é tomada com base no valor de $z(T)$ da seguinte maneira

$$z(T) \underset{H_2}{\overset{H_1}{\geq}} \gamma$$

Representação Vetorial de Sinais

- Os sinais podem ser representados como vetores
- Define-se um espaço ortogonal N-dimensional como um conjunto de N funções linearmente independentes $\psi_j(t)$ chamada de base de funções
- Os sinais da base $\psi_j(t)$ devem satisfazer as condições seguintes

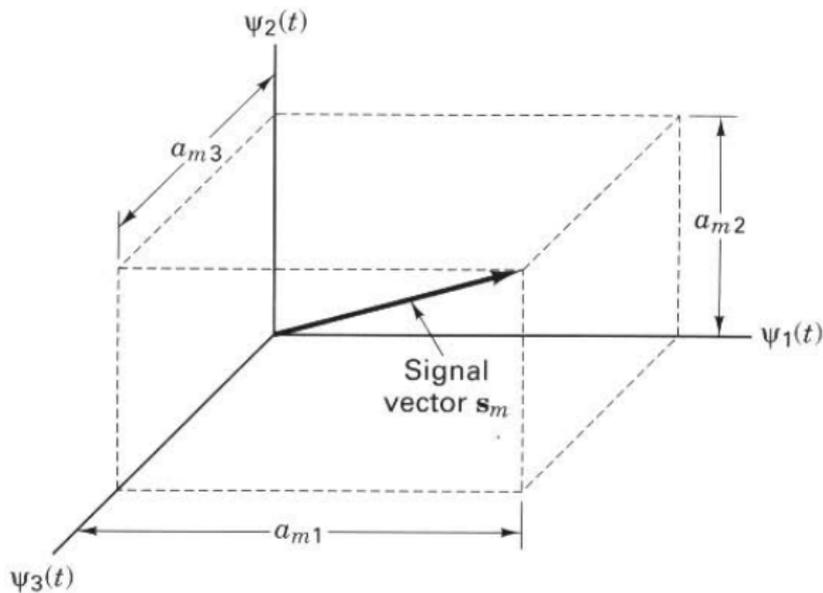
$$\int_0^T \psi_j(t)\psi_k(t)dt = K_j\delta_{jk}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad j, k = 1, \dots, N$$

$$\delta_{jk} = \left\{ \begin{array}{l} 1, j = k \\ 0, \text{ caso contrário} \end{array} \right\}$$

- A constante K_j representa a energia do sinal $\psi_j(t)$

$$E_j = \int_0^T \psi_j^2(t)dt = K_j$$

Representação Vetorial de Sinais



Representação Vetorial de Sinais

- Se $K_j \neq 0$, o espaço de sinais é ortogonal
- Se ainda $K_j = 1$, o espaço de sinais é ortonormal
- A noção de ortogonalidade para sinais é similar àquela dada para vetores
 - Sinais ortogonais são independentes, não possuem componentes uns nos outros
- Uma base de funções ortogonais pode ser representada geometricamente
- Qualquer conjunto arbitrário de formas de ondas de duração T , denotados por $\{s_i(t)\} (i = 1, \dots, M)$, pode ser expressado como uma combinação linear de funções ortogonais $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_N(t) (N \leq M)$

Representação Vetorial de Sinais

- Tem-se que

$$s_1(t) = a_{11}\psi_1(t) + a_{12}\psi_2(t) + \cdots + a_{1N}\psi_N(t)$$

$$s_2(t) = a_{21}\psi_1(t) + a_{22}\psi_2(t) + \cdots + a_{2N}\psi_N(t)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$s_M(t) = a_{M1}\psi_1(t) + a_{M2}\psi_2(t) + \cdots + a_{MN}\psi_N(t)$$

- Em uma notação compacta, tem-se

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^N a_{ij}\psi_j(t), \quad i = 1, \dots, M, \quad N \leq M$$

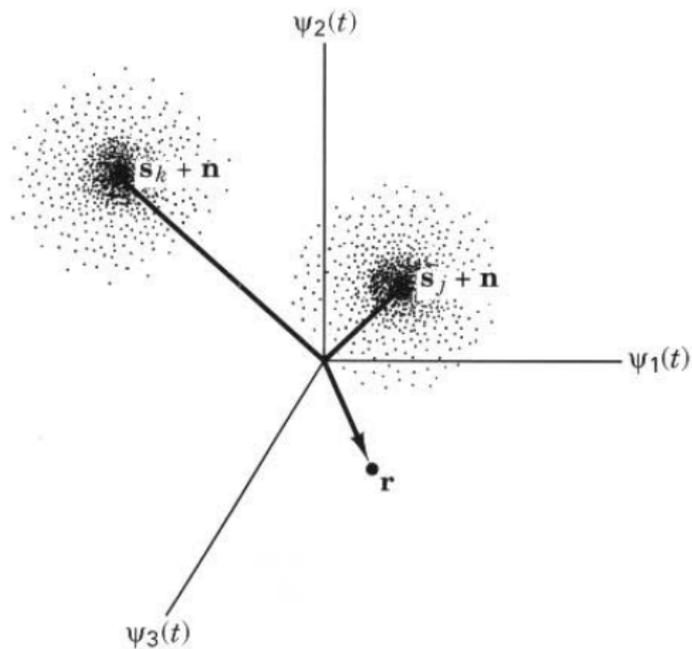
- Os coeficientes a_{ij} são calculados como

$$a_{ij} = \frac{1}{K_j} \int_0^T s_i(t)\psi_j(t)dt, \quad i = 1, \dots, M \quad j = 1, \dots, N$$

Representação Vetorial de Sinais

- Dessa forma, um sinal $s_i(t)$ pode ser representado por um vetor $\mathbf{s}_i = (a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{iN})$
 - \mathbf{s}_i é completamente caracterizado pelas suas componentes a_{ij} em relação a uma base de funções ortogonais
- Em um típico problema de detecção, vetores \mathbf{s}_j e \mathbf{s}_k representam os sinais de referência transmitidos dentre um conjunto de M possibilidades
- O sinal recebido é uma combinação do sinal de referência mais o ruído e pode ser representado por uma nuvem de pontos em torno de \mathbf{s}_j
- O receptor deve dizer a qual nuvem o sinal recebido \mathbf{r} pertence
 - A menor distância entre \mathbf{r} e os sinais $\{\mathbf{s}_i\}$

Representação Vetorial de Sinais



Representação Vetorial de Sinais

- A energia de um sinal $s_i(t)$ pode ser expressada em termos de suas componentes

$$\begin{aligned}
 E_i &= \int_0^T s_i^2(t) dt = \int_0^T \left[\sum_{j=1}^N a_{ij} \psi_j(t) \right]^2 dt \\
 &= \int_0^T \sum_{j=1}^N a_{ij} \psi_j(t) \sum_{k=1}^N a_{ik} \psi_k(t) dt \\
 &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_{ij} a_{ik} \int_0^T \psi_j(t) \psi_k(t) dt \\
 &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_{ij} a_{ik} K_j \delta_{jk} = \sum_{j=1}^N a_{ij}^2 K_j \quad i = 1, \dots, M
 \end{aligned}$$

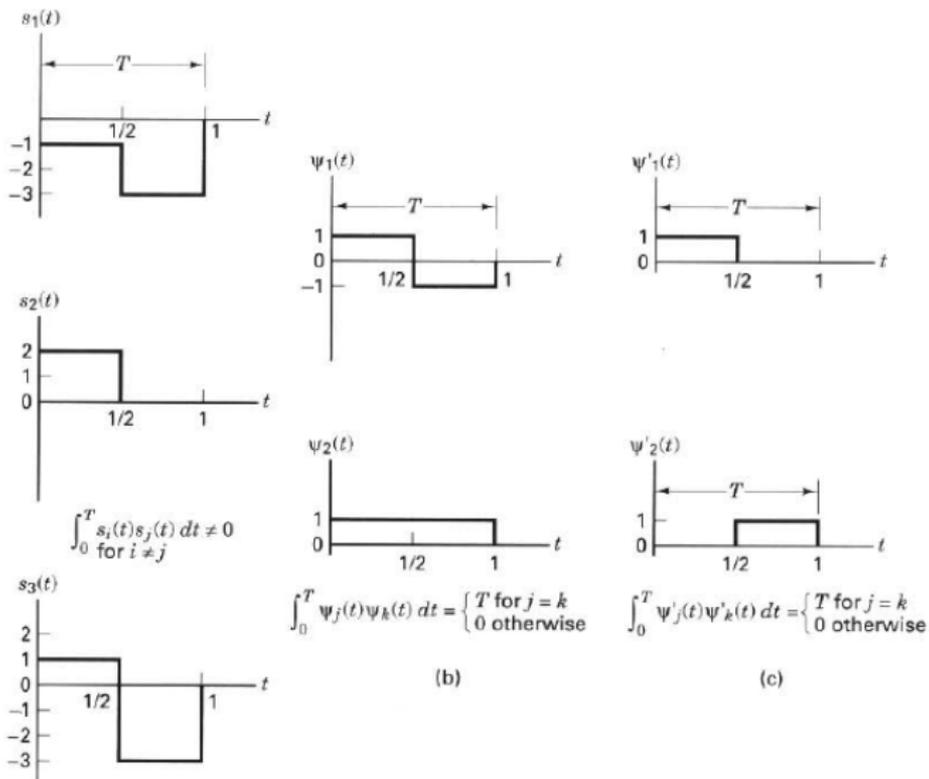
Representação Vetorial de Sinais

- Se a base é ortonormal, $K_j = 1$, então a energia do sinal é relacionada com a norma do vetor \mathbf{s}_i por

$$E_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}^2 = \|\mathbf{s}_i\|^2$$

- A representação vetorial de sinais é também conhecida como representação em *séries de Fourier generalizadas*
- Dependendo da base escolhida, a representação no espaço de sinais é diferente (Ver exemplo 3.1, pág. 114)
- A partir de um conjunto de M sinais $s_i(t)$ pode-se obter uma base ortonormal utilizando-se o *procedimento de Gram-Schmidt*

Representação Vetorial de Sinais



Representação Vetorial de Sinais

- O procedimento de Gram-Schmidt é descrito a seguir
- Considera-se um conjunto de M sinais $\{s_i(t)\}$
- O primeiro elemento da base de funções ortonormais é

$$\psi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}}, \quad E_1 = \text{Energia de } s_1(t)$$

- A segunda função é obtida a partir de $s_2(t)$, retirando-se a sua componente em $\psi_1(t)$

$$a_{21} = \int_0^T s_2(t)\psi_1(t)dt$$

$$\psi'_2(t) = s_2(t) - a_{21}\psi_1(t) \implies \psi_2(t) = \frac{\psi'_2(t)}{\sqrt{E'_2}}$$

Representação Vetorial de Sinais

- Generalizando, a k-ésima função é obtida como

$$\psi_k(t) = \frac{\psi'_k(t)}{\sqrt{E'_k}}$$

$$\psi'_k(t) = s_k(t) - \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki} \psi_i(t)$$

$$a_{ki} = \int_0^T s_k(t) \psi_i(t) dt \quad i = 1, 2, \dots, k-1$$

Representação Vetorial de Sinais

- O ruído também pode ser representado no espaço de sinais em função das funções de base ortogonais
- Para o receptor, o ruído pode ser particionado em duas componentes

$$n(t) = \hat{n}(t) + \tilde{n}(t), \quad \hat{n}(t) = \sum_{j=1}^N n_j \psi_j(t)$$

- Nessa expressão, $\tilde{n}(t)$ pode ser encarado como o ruído que é descartado pelo receptor, já que ele está fora do espaço de sinais

$$\tilde{n}(t) = n(t) - \hat{n}(t)$$

Representação Vetorial de Sinais

- As componentes do ruído n_j são obtidas fazendo-se as projeções nas funções de base
- Tem-se ainda que

$$n(t) = \sum_{j=1}^N n_j \psi_j(t) + \tilde{n}(t)$$

$$n_j = \frac{1}{K_j} \int_0^T n(t) \psi_j(t) dt \quad \forall j$$

$$\int_0^T \tilde{n}(t) \psi_j(t) dt = 0 \quad \forall j$$

Representação Vetorial de Sinais

- Pode-se simplificar a notação e com isso chamar $\hat{n}(t)$ de $n(t)$
- No espaço de sinais, $n(t)$ é representado pelo vetor

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N)$$

- Sendo \mathbf{n} um vetor aleatório, com média nula, distribuição gaussiana e com componentes n_j independentes
- Para o ruído branco com DEP igual a $N_o/2$, pode-se mostrar que a variância é dada por

$$\sigma^2 = \text{var}(n_j) = E\left\{\left[\int_0^T n(t)\psi_j(t)dt\right]^2\right\} = \frac{N_o}{2}$$

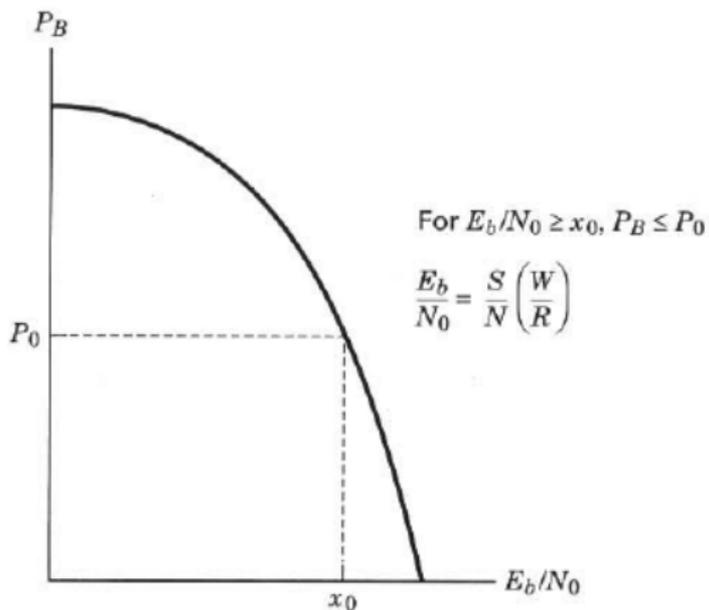
Relação Sinal Ruído para Sistemas Digitais

- Em sistemas analógicos, utiliza-se a SNR como medida de desempenho
 - SNR - Signal to Noise Rate
 - Razão entre a potência média do sinal pela potência média do ruído
- Em sistemas digitais se utiliza uma versão normalizada denotada por E_b/N_o
 - E_b representa a energia do bit
 - N_o é o valor da DEP do ruído de um lado
- Tem-se ainda que

$$\frac{E_b}{N_o} = \frac{ST_b}{N/W} = \frac{S/R_b}{N/W} = \frac{S}{N} \left(\frac{W}{R} \right)$$

- Assim E_b/N_o é uma versão de S/N normalizada pela largura de banda e pela taxa de bit

Relação Sinal Ruído para Sistemas Digitais



Receptor de Máxima Verossimilhança

- Vimos que no caso binário, a escolha da hipótese é tomada com base no valor de $z(T)$ da seguinte maneira

$$z(T) \begin{array}{l} H_1 \\ \geq \\ H_2 \end{array} \gamma$$

- O valor de γ é escolhido de forma a satisfazer algum critério de desempenho
- Um dos critérios mais utilizados é a minimização da probabilidade de erro de detecção

Receptor de Máxima Verossimilhança

- A aplicação do critério da probabilidade de erro de detecção mínima resulta na regra MAP
- A regra MAP (*Máxima Probabilidade a Posteriori*) consiste em se decidir pela hipótese que satisfaz a seguinte relação

$$P(s_1)p(z|s_1) \underset{H_2}{\overset{H_1}{\geq}} P(s_2)p(z|s_2)$$

- A regra MAP pode ser escrita em função da *razão de verossimilhança* $\Lambda(z)$ como

$$\Lambda(z) = \frac{p(z|s_1)}{p(z|s_2)} \underset{H_2}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(s_2)}{P(s_1)}$$

Receptor de Máxima Verossimilhança

- Nessa expressão, $P(s_1)$ e $P(s_2)$ são as probabilidades a priori dos sinais s_1 e s_2
- A partir da expressão anterior para a regra MAP e considerando o caso em que s_1 e s_2 são equiprováveis, tem-se

$$z(T) \underset{H_2}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{a_1 + a_2}{2} = \gamma_0$$

- γ_0 representa o limiar ótimo a fim de minimizar a probabilidade de se tomar uma decisão incorreta
- Essa estratégia é conhecida como *critério do erro mínimo*

Probabilidade de Erro

- Um erro pode ocorrer quando, na decisão, se opta por um sinal diferente do transmitido
- Matematicamente, tem-se:

$$P(e|s_1) = P(H_2|s_1) = \int_{-\infty}^{\gamma_0} p(z|s_1) dz$$

$$P(e|s_2) = P(H_1|s_2) = \int_{\gamma_0}^{\infty} p(z|s_2) dz$$

- A probabilidade de erro é dada então por

$$\begin{aligned} P_B &= \sum_{i=1}^2 P(e, s_i) = \sum_{i=1}^2 P(e|s_i)P(s_i) \\ &= P(e|s_1)P(s_1) + P(e|s_2)P(s_2) \\ &= P(H_2|s_1)P(s_1) + P(H_1|s_2)P(s_2) \end{aligned}$$

Probabilidade de Erro

- Se os sinais s_1 e s_2 são equiprováveis e levando em conta a simetria entre $p(z|s_1)$ e $p(z|s_2)$, tem-se que:

$$\begin{aligned} P_B &= \frac{1}{2}P(H_2|s_1) + \frac{1}{2}P(H_1|s_2) \\ &= P(H_2|s_1) = P(H_1|s_2) = \int_{\gamma_0=(a_1+a_2)/2}^{\infty} p(z|s_2) dz \\ &= \int_{\gamma_0=(a_1+a_2)/2}^{\infty} \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-a_2}{\sigma_0}\right)^2\right] dz \\ &= \int_{u=(a_1-a_2)/2\sigma_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = Q\left(\frac{a_1-a_2}{2\sigma_0}\right) \end{aligned}$$

Probabilidade de Erro

- A função $Q(x)$ é chamada de *função de erro complementar*

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

- $Q(x)$ não pode ser calculada analiticamente, mas os seus valores podem ser encontrados em tabelas

Filtro Casado

- Um filtro casado (*matched filter*) é um filtro linear projetado para proporcionar a máxima relação sinal ruído na sua saída para uma dada forma de onda
- A amostra $z(T)$ possui uma componente do sinal a_i e uma componente do ruído n_0
- No tempo $t = T$, a relação da potência instantânea do sinal pela potência média do ruído é dada por

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T = \frac{a_i^2}{\sigma_0^2}$$

- O objetivo é encontrar a função de transferência do filtro que maximiza essa relação

Filtro Casado

- Se $H(f)$ é a função de transferência do filtro e $S(f)$ é a transformada de Fourier do sinal de entrada $s(t)$, então a componente do sinal na saída do filtro $a_i(t)$ é dada por

$$a_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi ft} df$$

- A potência média do ruído é dada por

$$\sigma_0^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

- Combinando essas duas expressões, tem-se:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T = \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi fT} df\right|^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}$$

Filtro Casado

- Para se encontrar o máximo dessa expressão, pode-se utilizar a desigualdade de Schwarz, ou seja

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(x) dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x)|^2 dx$$

- Nessa expressão, a igualdade é obtida quando $f_1(x) = kf_2^*(x)$, em que k é uma constante arbitrária
- Fazendo $f_1(x) = H(f)$ e $f_2(x) = S(f)e^{j2\pi fT}$, tem-se

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi fT} df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$$

Filtro Casado

- Substituindo-se, tem-se:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T \leq \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$$
$$\max \left(\frac{S}{N}\right)_T = \frac{2E}{N_0}$$

- Sendo E a energia de $s(t)$
- Esse máximo ocorre quando $f_1(x) = kf_2^*(x)$, ou seja quando

$$H(f) = H_o(f) = kS^*(f)e^{-j2\pi fT}$$

- O termo $H_o(f)$ indica o filtro ótimo

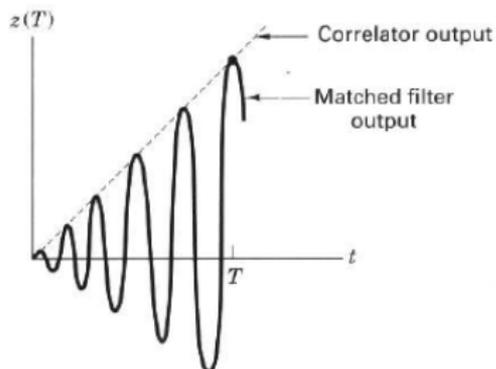
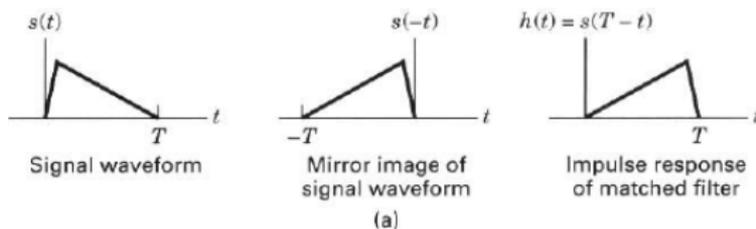
Filtro Casado

- No domínio do tempo, a resposta ao impulso do filtro ótimo quando $s(t)$ é um sinal real é dada por

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{kS^*(f)e^{-j2\pi fT}\} \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} ks(T-t), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{c.c} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

- A resposta ao impulso para o filtro ótimo é causal e assim ele é fisicamente realizável

Filtro Casado



Filtro Casado e Correladores

- O efeito de um filtro casado pode ser obtido a partir de um correlator
- A saída de um filtro casado pode ser escrita como

$$\begin{aligned}z(t) &= r(t) * h(t) = \int_0^t r(\tau)h(t - \tau)d\tau \\ &= \int_0^t r(\tau)s(T - t + \tau)d\tau\end{aligned}$$

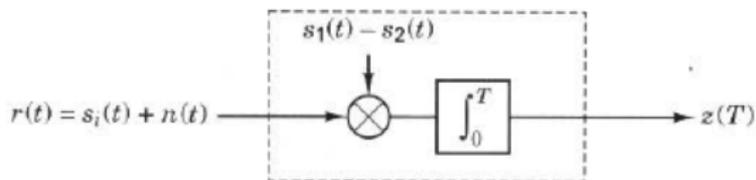
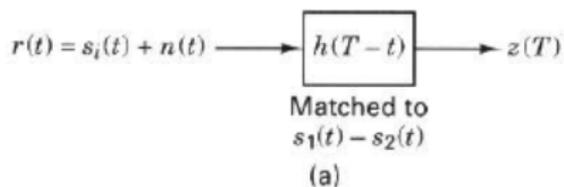
- No instante de amostragem T , a equação se torna

$$z(T) = \int_0^T r(\tau)s(\tau)d\tau$$

Filtro Casado e Correlatores

- Essa operação consiste na correlação do sinal transmitido com o sinal recebido
- Pode-se então fazer um receptor no qual o sinal recebido é correlacionado com um banco de M correlatores (sinais $s_i(t)$, $i = 1, \dots, M$)
- O sinal $s_i(t)$ cuja saída resulta na maior saída $z_i(T)$ é o que casa melhor com o sinal recebido $r(t)$
- É importante ressaltar que a saída do filtro casado só é igual à do correlator no instante T , nos demais ela é diferente como mostrado na figura anterior para uma onda senoidal

Filtro Casado e Correladores



Otimização do Desempenho

- As etapas de filtragem e de decisão foram consideradas separadamente
- Para um canal AWGN com transmissão binária, a decisão ótima resulta em uma probabilidade de erro de bit

$$P_B = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_0}\right)$$

- A partir dessa equação, observa-se que quanto maior for o argumento de $Q(x)$, menor é o valor de P_B
- Dessa forma, o filtro casado deve ser escolhido de modo a maximizar $(a_1 - a_2)/2\sigma_0$, ou de modo equivalente, maximizar

$$\frac{(a_1 - a_2)^2}{\sigma_0^2}$$

Otimização do Desempenho

- Esse objetivo é alcançado se o filtro é casado ao sinal $[s_1(t) - s_2(t)]$
- Dessa forma, a SNR de saída no tempo T pode ser escrita como

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T = \frac{(a_1 - a_2)^2}{\sigma_0^2} = \frac{2E_d}{N_0}$$

- Em que E_d é a energia da diferença entre os sinais $s_1(t)$ e $s_2(t)$ na entrada do filtro

$$E_d = \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt$$

- Dessa forma, o objetivo do filtro é prover a máxima separação entre os dois sinais

Otimização do Desempenho

- A equação da probabilidade de erro de bit pode ser reescrita como

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_0}}\right)$$

- Outras expressões para P_B podem ser obtidas em função da energia média de bit E_b e do coeficiente de correlação cruzada
- O coeficiente de correlação cruzada entre dois sinais $s_1(t)$ e $s_2(t)$ é definido por

$$\rho = \frac{1}{E_b} \int_0^T s_1(t)s_2(t)dt \text{ ou } \rho = \cos \theta, \quad (-1 \leq \rho \leq 1)$$

Otimização do Desempenho

- E_d pode ser escrita como

$$\begin{aligned} E_d &= \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt \\ &= \int_0^T s_1^2(t) dt + \int_0^T s_2^2(t) dt - 2 \int_0^T s_1(t) s_2(t) dt \end{aligned}$$

- Como a energia de bit pode ser dada por

$$E_b = \int_0^T s_1^2(t) dt = \int_0^T s_2^2(t) dt$$

- Então E_d é dada por

$$E_d = E_b + E_b - 2\rho E_b = 2E_b(1 - \rho)$$

Otimização do Desempenho

- Assim, P_B pode ser calculada através da expressão

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b(1-\rho)}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b(1-\rho)}{N_0}}\right)$$

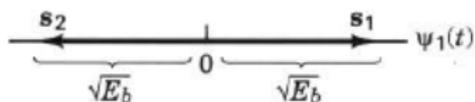
- Dois casos especiais merecem ser destacados
 - Sinais ortogonais ($\rho = 0$)

$$\int_0^T s_1(t)s_2(t)dt = 0 \implies P_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

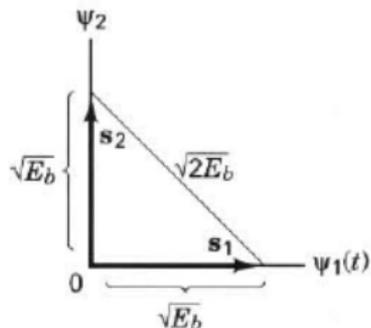
- Sinais antipodais ($\rho = -1$)

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

Otimização do Desempenho



(a)



Desempenho da Sinalização Binária Unipolar

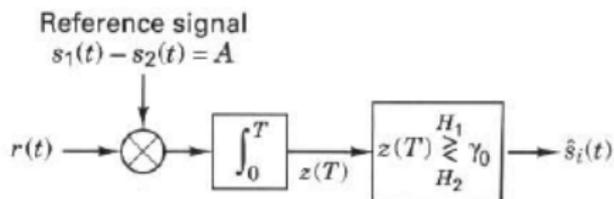
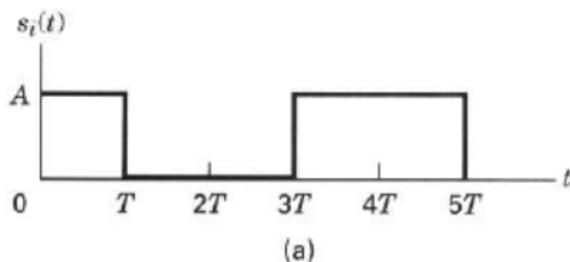
- As expressões obtidas anteriormente podem ser empregadas para os diversos códigos de linha vistos no capítulo anterior
- Na sinalização unipolar, tem-se que

$$s_1(t) = A, \quad 0 \leq t \leq T \quad \text{símbolo 1}$$

$$s_2(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad \text{símbolo 0}$$

- Através do cálculo do coeficiente de correlação, pode-se observar que $s_1(t)$ e $s_2(t)$ são ortogonais
- O circuito implementado com um correlador é mostrado na figura a seguir

Desempenho da Sinalização Binária Unipolar



Desempenho da Sinalização Binária Unipolar

- A estatística de teste $z(T)$ é comparada com o limiar ótimo γ_0 calculado a seguir

$$a_1(t) = E\{z(T)|s_1(t)\} = E\left\{\int_0^T A^2 + An(t)\right\} = A^2T$$

$$a_2(t) = E\{z(T)|s_2(t)\} = E\left\{\int_0^T An(t)\right\} = 0$$

$$\gamma_0 = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{A^2T}{2}$$

- A energia da diferença $E_d = A^2T$, de modo que

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Desempenho da Sinalização Binária Unipolar

- Nessa expressão, a energia média de bit E_b é dada por

$$E_b = \frac{1}{2}A^2T + \frac{1}{2}(0) = \frac{1}{2}A^2T$$

- Observa-se que a expressão obtida para P_B na sinalização unipolar corresponde àquela obtida genericamente para as sinalizações ortogonais

Desempenho da Sinalização Binária Bipolar

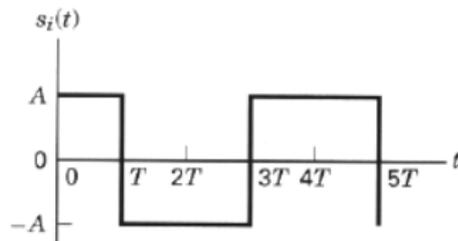
- Na sinalização bipolar, tem-se que

$$s_1(t) = +A, \quad 0 \leq t \leq T \quad \text{símbolo 1}$$

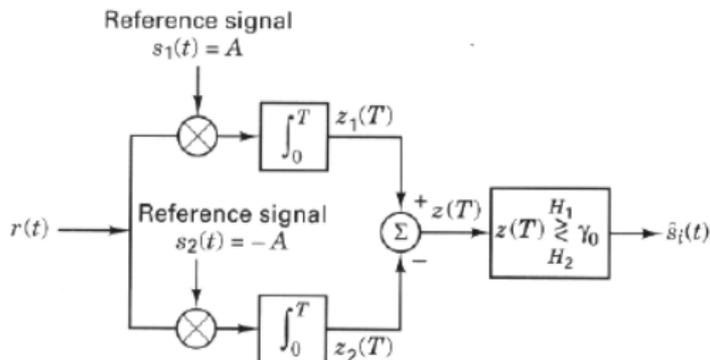
$$s_2(t) = -A, \quad 0 \leq t \leq T \quad \text{símbolo 0}$$

- A sinalização bipolar é um caso de sinalização antipodal, pois $s_1(t) = -s_2(t)$
- O filtro casado a $(s_1(t) - s_2(t))$ pode ser implementado por dois correlatores de acordo com a figura a seguir
- A estatística de teste é dada por $z(T) = z_1(T) - z_2(T)$
- Como os sinais são antipodais, então $a_1 = -a_2$ e portanto, $\gamma_0 = 0$

Desempenho da Sinalização Binária Bipolar



(a)



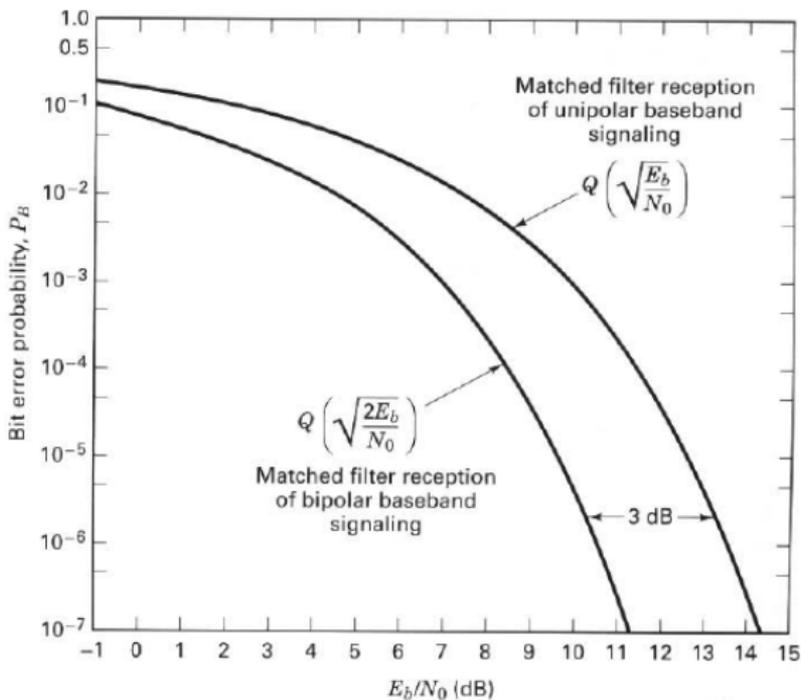
Desempenho da Sinalização Binária Bipolar

- Como a energia da diferença entre $s_1(t)$ e $s_2(t)$ é $E_d = (2A)^2 T = 4A^2 T$, então

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{4A^2 T}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

- Nesse caso, a energia do bit 1 é igual à do bit 0 e assim, $E_b = A^2 T$
- Esse resultado para P_B para a sinalização bipolar combina com o obtido para a sinalização antipodal

Comparação entre as Sinalizações Unipolar e Bipolar



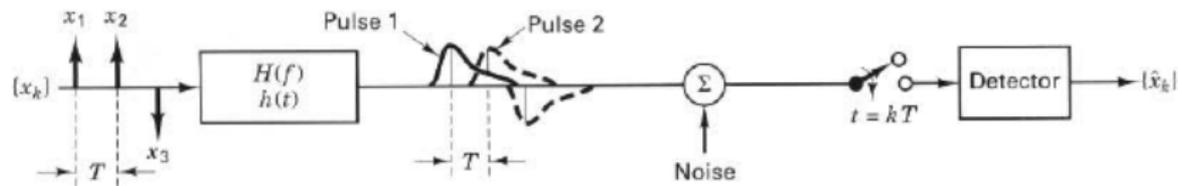
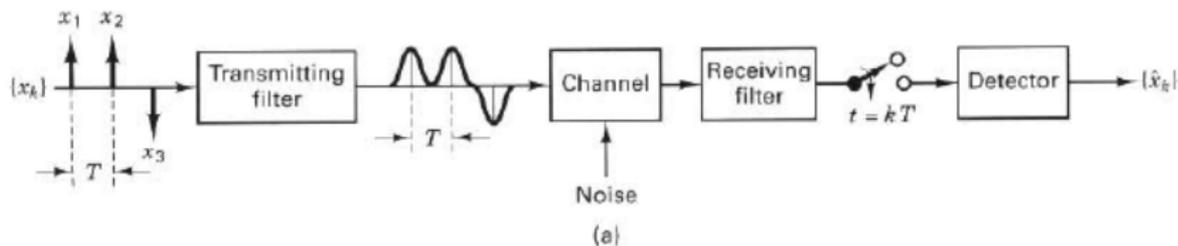
Introdução

- Em um sistema de comunicação digital há vários filtros
 - No transmissor, canal e receptor
- O filtro no receptor pode ser projetado para compensar os efeitos dos filtros do transmissor e do canal
 - Nesse caso, o filtro é chamado de *filtro equalizador* ou simplesmente, equalizador
- Os efeitos de filtragem do sistema podem ser agrupados em uma única função de transferência

$$H(f) = H_t(f)H_c(f)H_r(f)$$

- Os efeitos de filtragem causam o espalhamento do pulso, fazendo com que pulsos adjacentes interfiram uns nos outros
 - Esse efeito é conhecido como *Interferência Intersimbólica* (Intersymbol Interference - ISI)

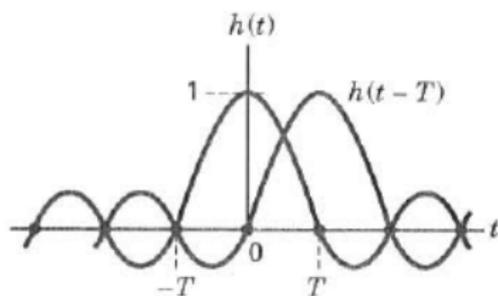
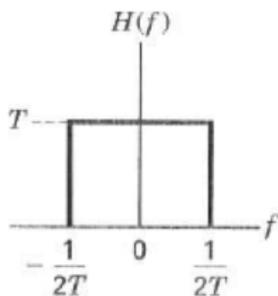
Interferência Intersimbólica



Interferência Intersimbólica

- Nyquist também investigou o problema da Interferência Intersimbólica
 - A idéia era especificar uma forma para o pulso de modo que não houvesse ISI no receptor
 - Ele mostrou que para se detectar R_s símbolos/segundo sem ISI era necessário no mínimo uma banda $W = R_s/2$ Hertz
 - Essa banda mínima é válida para o caso em que $H(f)$ é retângular, ou seja, $h(t)$ é uma função sinc
 - O pulso $h(t) = \text{sinc}(t/T)$ é chamado de pulso ideal de Nyquist
 - Nos instantes múltiplos de T os pulsos se anulam (com exceção de um apenas), evitando assim a ISI

Interferência Intersimbólica



Interferência Intersimbólica

- Em razão da ISI, um sistema com largura de banda $W = 1/2T = R_S/2$ Hertz pode suportar uma taxa de transmissão máxima de $2W = 1/T = R_S$ símbolos por segundo
 - O máximo ocorre quando os pulsos são ideais
 - Isso significa transmitir 2 símbolos para cada Hertz
- Além do pulso ideal, outros pulsos podem ser usados para se ter ISI nula nos pontos de amostragem
 - São chamados de pulsos de Nyquist
 - São transmitidos menos que 2 símbolos para cada Hertz

Interferência Intersimbólica

- O pulso ideal tem duração infinita e por isso é não fisicamente realizável
- Além disso, os seus lóbulos secundários decaem lentamente, o que o torna sensível a erros nos instantes de amostragem
- Nyquist propôs um segundo critério que leva a pulsos que podem ser aproximados mais facilmente por filtros práticos
- O objetivo então é projetar um filtro equalizador de modo que a função de transferência do sistema $H(f)$ corresponda a pulsos com ISI nula nos instantes de amostragem
- Uma das funções de transferência frequentemente utilizadas é o *filtro do cosseno levantado (raised-cosine filter)*

Interferência Intersimbólica

- O filtro do cosseno levantado pode ser expressado como

$$H(f) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & |f| < 2W_0 - W \\ \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} \frac{|f| + W - 2W_0}{W - W_0} \right), & 2W_0 - W < |f| < W \\ 0, & |f| > W \end{array} \right\}$$

- Sendo W a largura de banda absoluta e $W_0 = 1/2T$ a largura de banda mínima de Nyquist do espectro retangular (ponto de -6dB para o filtro do cosseno levantado)
- $W - W_0$ representa o excesso de largura de banda além do mínimo teórico

Interferência Intersimbólica

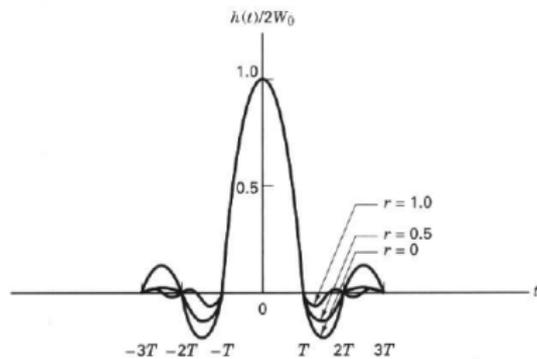
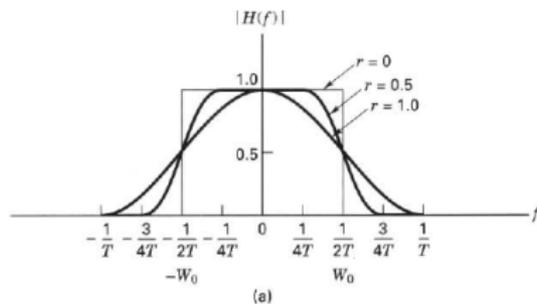
- O excesso de largura de banda pode ser expressado em termos do fator de *roll-off* definido como

$$r = \frac{W - W_0}{W_0}, \quad 0 \leq r \leq 1$$

- O valor de $r = 0$ representa o pulso ideal
- Quando $r = 1$, o excesso de largura de banda é de 100% e a taxa R_S símbolos por segundo é transmitida usando uma banda R_S Hertz
- No domínio do tempo, a resposta ao impulso de $H(f)$ é

$$h(t) = 2W_0(\text{sinc } 2W_0t) \frac{\cos[2\pi(W - W_0)t]}{1 - [4(W - W_0)t]^2}$$

Interferência Intersimbólica



Interferência Intersimbólica

- Em termos do fator de *roll-off*, a largura de banda W pode ser expressada como

$$W = \frac{1}{2}(1 + r)R_S$$

- Para sistemas modulados com uma portadora senoidal (ASK, PSK, etc.), a largura de banda é

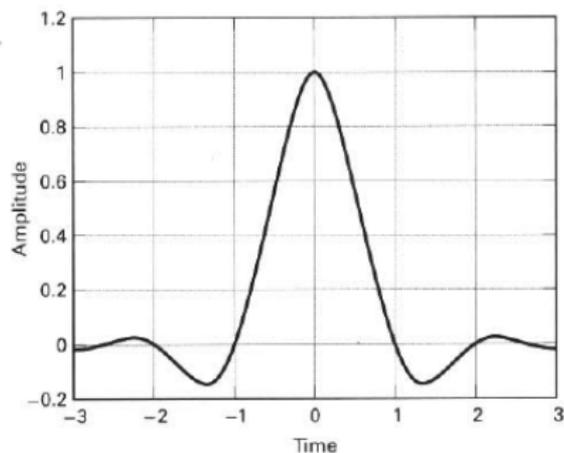
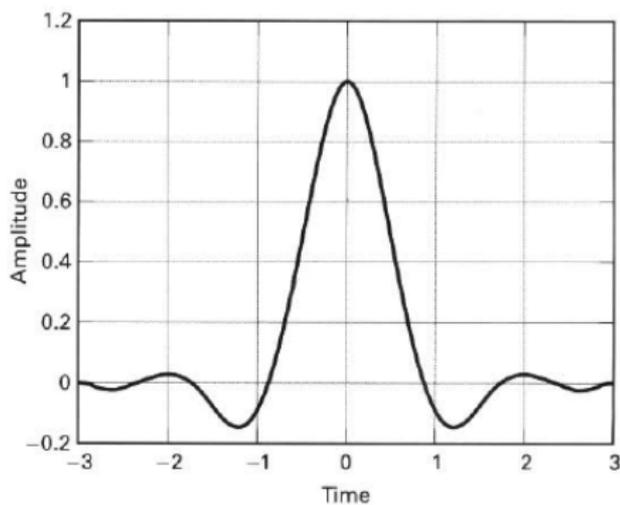
$$W_{DSB} = (1 + r)R_S$$

- Como $H(f)$ é a função de transferência total, muitas vezes a implementação do filtro cosseno levantado é dividida entre o transmissor e o receptor (o canal é tratado a parte)
 - Tanto no transmissor quanto no receptor são implementados o filtro *raiz quadrada do cosseno levantado* (*root-raised cosine filter*)

Interferência Intersimbólica

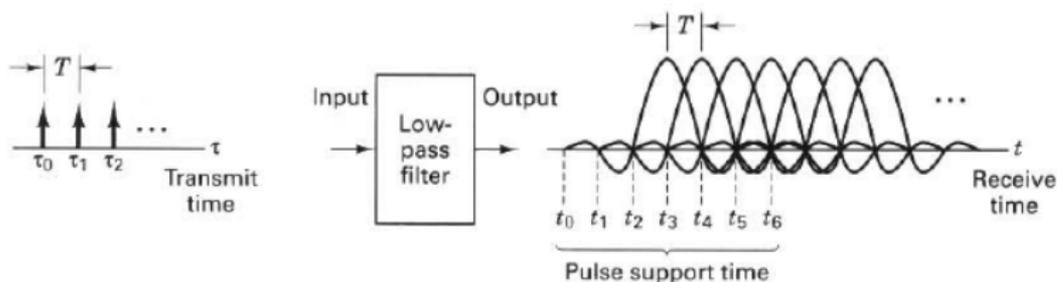
- Tanto no transmissor quanto no receptor são implementados o filtro *raiz quadrada do cosseno levantado* (*root-raised cosine filter*)
- A resposta ao impulso do filtro raiz quadrada do cosseno levantado é chamada de *pulso raiz quadrada de Nyquist* (*square-root Nyquist pulse*)
- Comparado ao pulso de Nyquist, o pulso raiz quadrada de Nyquist é bastante semelhante

Interferência Intersimbólica



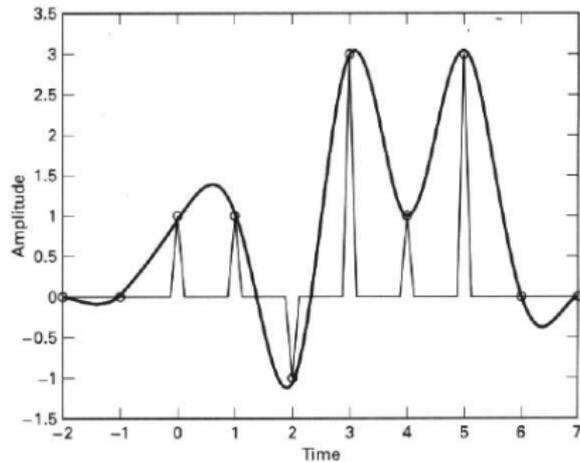
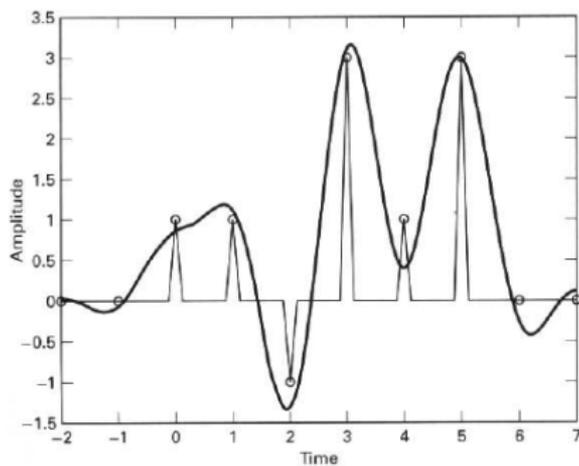
Interferência Intersimbólica

- Fisicamente, um pulso leva um tempo para ser transmitido
- O *tempo de suporte* de um pulso representa o número total de intervalos que o pulso persiste
- Na figura abaixo, esses conceitos são ilustrados



- Nas figuras a seguir são mostrados em seqüência a saída do transmissor e a saída do receptor usando pulsos raiz quadrada de Nyquist

Interferência Intersimbólica



Introdução

- Para que um canal de comunicação não cause distorção no sinal transmitido, a sua resposta de amplitude deve ser constante e a sua resposta de fase deve ser linear com a frequência na banda de interesse do sinal
- O fato das condições ideais não serem verificadas causa distorção nos pulsos transmitidos e contribui para a ISI
- O procedimento de eliminação ou de minimização da ISI é chamado de equalização
- Os procedimentos de equalização podem ser classificados em dois grupos
 - MLSE (*Maximum-likelihood sequence estimation*) - Estimação da seqüência de máxima verossimilhança
 - Equalização com filtros

Introdução

- No MLSE, o receptor não procura zerar a ISI alterando a forma dos pulsos, mas em vez disso, ele procura se ajustar com base na seqüência recebida
- Na equalização com filtros, a idéia é cancelar os efeitos do canal, gerando uma seqüência de pulsos livre de ISI
- Os filtros equalizadores podem ser colocados nas seguintes categorias
 - Equalizadores transversais
 - Equalizadores com realimentação (feedback)
- O objetivo do filtro equalizador é fazer com que a função de transferência do sistema atenda os critérios de Nyquist

$$H_{RC}(f) = H_t(f)H_c(f)H_r(f)H_e(f)$$

Introdução

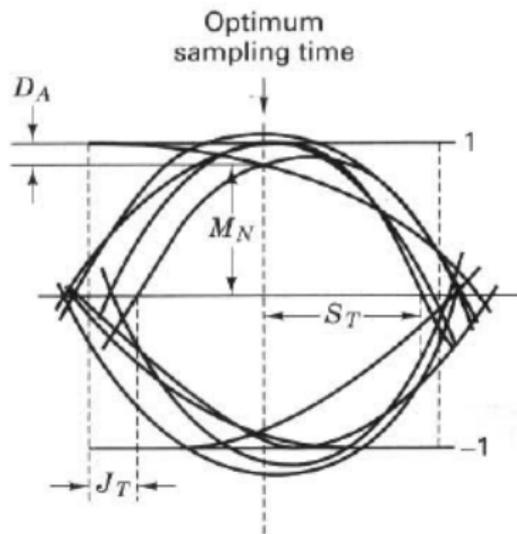
- Quando os filtros do transmissor já estão casados então o equalizador só precisa cancelar os efeitos do canal

$$H_{RC}(f) = H_t(f)H_r(f)$$
$$H_e(f) = \frac{1}{H_c(f)}$$

- Uma ferramenta gráfica usada para observar os efeitos da ISI é o diagrama do olho
- O diagrama do olho representa uma sobreposição de uma seqüência de pulsos transmitidos
- A partir da análise desse diagrama, pode-se ter uma idéia qualitativa de como a ISI afeta o desempenho do sistema

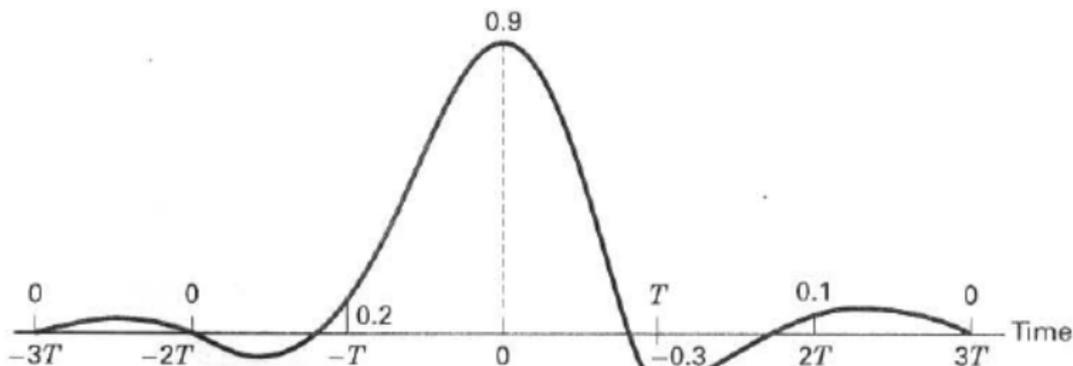
Diagrama do Olho

- Nessa figura, tem-se
 - D_A é uma medida da distorção causada pela ISI
 - J_T é uma medida do jitter
 - M_N é a margem de ruído
 - S_T é a sensibilidade a erros de temporização



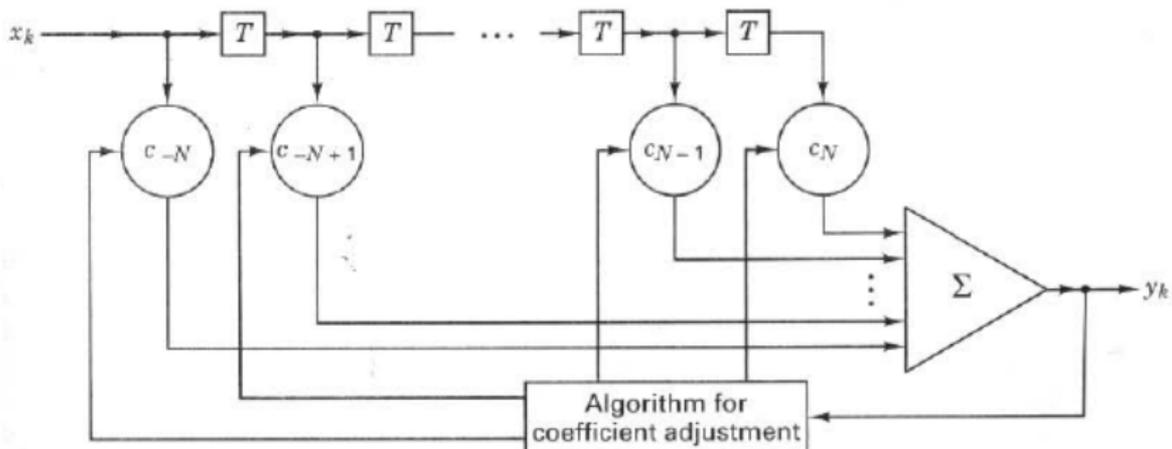
Equalizador Transversal

- Antes de efetuar a equalização, é necessário obter a resposta do canal
- Normalmente se usa uma seqüência pseudo-aleatória (PN) para tal fim
- Na figura abaixo, é mostrado uma resposta típica do canal a uma determinada entrada



Equalizador Transversal

- Observa-se nessa figura que a resposta não se anula nos instantes de amostragem, causando ISI
- Com um filtro transversal, pode-se forçar uma resposta nula nos instantes de amostragem



Equalizador Transversal

- No filtro transversal, para $2N - 1$ taps de T segundos com pesos $c_{-N}, c_{-N+1}, \dots, c_N$, a saída do equalizador para uma seqüência de entrada $\{x(k)\}$ é dada por

$$z(k) = \sum_{n=-N}^N x(k-n)c_n; \quad k = -2N, \dots, 2N; \quad n = -N, \dots, N$$

- A saída $z(k)$ pode ser expressada em notação matricial na forma

$$\mathbf{z} = \mathbf{x}\mathbf{c}$$

- Quando a matriz \mathbf{x} for quadrada, os parâmetros do equalizador são obtidos fazendo-se

$$\mathbf{c} = \mathbf{x}^{-1}\mathbf{z}$$

Equalizador Transversal

- O sistema de equações a ser resolvido é sobredeterminado
 - \mathbf{z} tem dimensão $4N + 1$
 - \mathbf{c} tem dimensão $2N + 1$
 - \mathbf{x} não é quadrada com $4N + 1$ linhas e $2N + 1$ colunas
- Para resolvê-lo, utiliza-se em geral uma das duas técnicas seguintes
 - Zero-forcing
 - Solução do erro médio quadrático mínimo (Minimum MSE)

Equalizador Transversal

- Na solução por Zero-forcing, elimina-se as N primeiras linhas e as últimas N linhas da matriz \mathbf{x}
- O sistema pode ser resolvido, fazendo-se

$$\mathbf{z}(k) = \left\{ \begin{array}{l} 1, \quad k = 0 \\ 0, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N \end{array} \right\}$$

- A solução por Zero-forcing não é tão robusta, pois ela negligencia termos que atuam como ruído
- Na solução do erro médio quadrático mínimo (Minimum MSE), multiplica-se ambos os lados da equação por \mathbf{x}^T , resultando em

$$\mathbf{x}^T \mathbf{z} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} \mathbf{c} \implies \mathbf{R}_{xz} = \mathbf{R}_{xx} \mathbf{c}$$

Equalizador Transversal

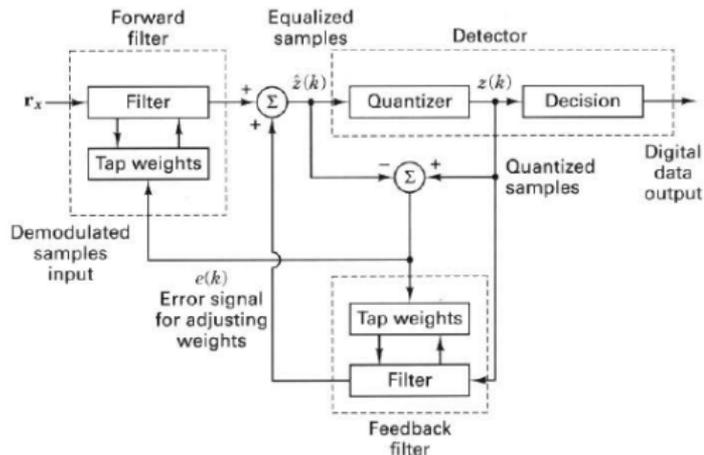
- \mathbf{R}_{xz} é chamado de vetor de correlação cruzada e \mathbf{R}_{xx} é chamada de matriz de autocorrelação
- Os parâmetros do equalizador são obtidos fazendo-se

$$\mathbf{c} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{R}_{xz}$$

- Esse método é mais robusto e é bastante usado em modems de alta velocidade

Equalizador com Realimentação

- O equalizador transversal não apresenta um bom desempenho em canal encontrados em comunicações móveis
- Nesse caso, é preferível utilizar um equalizador com realimentação, no qual as decisões tomadas anteriormente são usadas para diminuir a ISI



Equalizadores

- Os parâmetros do equalizador podem ser mantidos fixos após determinados ou serem atualizados com uma certa frequência
- No primeiro caso, diz-se que os ganhos são pré-estabelecidos (*preset*) e no segundo diz-se que o equalizador é adaptativo
- A equalização adaptativa deve ser usada quando os canais são variantes no tempo