Sinais e Espectro

Edmar José do Nascimento
(Tópicos Avançados em Engenharia Elétrica I)
http://www.univasf.edu.br/˜edmar.nascimento

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Elétrica

Roteiro

Termos Usados em Comunicações Digitais

- Fonte de Informação
  - Dispositivo que produz a informação
  - Pode ser analógica ou discreta
  - Fontes analógicas podem ser convertidas em fontes discretas através de amostragem e quantização
- Mensagem Textual
  - Seqüência de caracteres
  - Símbolos da mensagem pertencem a algum alfabeto finito
- Caracter
  - Membro de um alfabeto ou conjunto de símbolos
  - Caracteres podem ser mapeados em seqüências de números binários
- Dígito Binário (bit)
  - Unidade de informação

Termos Usados em Comunicações Digitais

- Cadeia de bits (*bit stream*)
  - Seqüência de dígitos binários
- Símbolo
  - Grupo de k bits considerado como uma unidade
  - Um símbolo de uma mensagem é denotado por m_i $(i = 1, \cdots, M = 2^k)$ - M representa o tamanho do alfabeto
- Forma de onda digital
  - Forma de onda de tensão ou de corrente usada para representar um símbolo digital
  - As características da forma de onda permitem relacioná-la com um dos símbolos de um alfabeto finito
- Taxa de dados
  - Quantidade de bits por segundo denotada por $R = \frac{k}{T} = \frac{1}{T} \log_2 M bits/s$, sendo M o tamanho do alfabeto e T a duração do símbolo em segundos

Analógico versus Digital

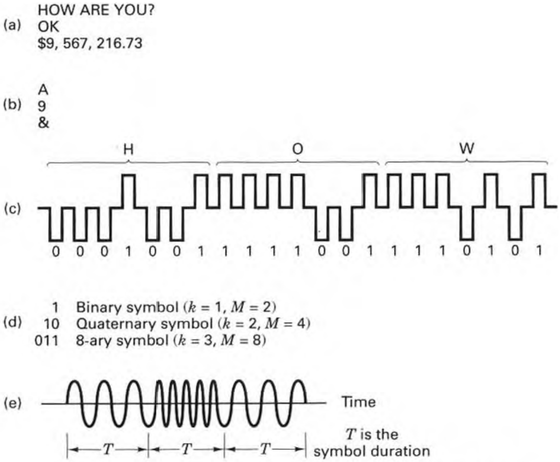


Figure 1.4 Nomenclature examples. (a) Textual messages. (b) Characters. (c) Bit stream (7-bit ASCII). (d) Symbols m_i, $i = 1, \ldots, M$, $M = 2^k$. (e) Bandpass digital waveform $s_i(t)$, $i = 1, \ldots, M$.

Sinais Periódicos e Aperiódicos

- Um sinal é periódico no tempo se para alguma constante positiva T_0,

$$x(t) = x(t + T_0) \ \forall t$$

  - O menor valor de T_0 é o período de $x(t)$
  - Um sinal é aperiódico se não é periódico
  - Sinais periódicos começam em $-\infty$ e seguem a $+\infty$

Função Impulso Unitário

- A função impulso unitário é definida como:

$$\begin{aligned} \delta(t) &= 0 \quad t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt &= 1 \end{aligned}$$

- A função impulso verifica as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \phi(t)\delta(t) &= \phi(0)\delta(t) \\ \phi(t)\delta(t-T) &= \phi(T)\delta(t-T) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t)dt &= \phi(0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t-T)dt &= \phi(T) \end{aligned}$$

Roteiro

Energia e Potência

- A energia normalizada de um sinal $x(t)$ é definida como:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

- A potência normalizada de um sinal $x(t)$ é definida como:

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

- Um sinal é dito ser um sinal de energia se $0 < E_x < \infty$
- Um sinal é dito ser um sinal de potência se $0 < P_x < \infty$
- Um sinal não pode ser de energia e potência ao mesmo tempo

Densidade Espectral de Energia

- No domínio da freqüência, de acordo com o teorema de Parseval, a energia de $g(t)$ pode ser calculada como

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

- A partir da expressão de Parseval verifica-se que a energia pode ser obtida através da área do gráfico de $|X(f)|^2$
- Define-se então a densidade espectral de energia (DEE - ESD em inglês) como

$$\Psi_x(f) = |X(f)|^2$$

- Assim, tem-se que:

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_x(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_x(f)df$$

Densidade Espectral de Potência

- Analogamente ao que foi feito para os sinais de energia, pode-se mostrar que para um sinal de potência $x(t)$

$$P_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{|X_T(\omega)|^2}{T}d\omega$$

- Define-se então a Densidade Espectral de Potência (DEP - PSD em inglês) de $x(t)$ como sendo

$$G_x(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{|X_T(\omega)|^2}{T}$$

- Logo, a potência pode ser expressada como

$$P_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G_x(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}G_x(f)df$$

Densidade Espectral de Potência

- Se o sinal $x(t)$ é periódico com período $T_0 = 1/f_0$, ele pode ser representado em séries de Fourier
- Representando os coeficientes da série de Fourier exponencial por c_n, a DEP pode ser simplificada para:

$$G_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \delta(f - nf_0)$$

Autocorrelação de Sinais de Energia

- A autocorrelação no tempo para um sinal de energia real $x(t)$ é definida como

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt, \quad -\infty < \tau < \infty$$

- A autocorrelação de um sinal de energia tem as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= R_x(-\tau) \\ R_x(\tau) &\leq R_x(0) \quad \forall\tau \\ R_x(\tau) &\longleftrightarrow \Psi_x(f) \\ R_x(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = E_x \end{aligned}$$

Autocorrelação de Sinais de Potência

- A autocorrelação no tempo para um sinal de potência real $x(t)$ é definida como

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt, \quad -\infty < \tau < \infty$$

- Se $x(t)$ é periódico então a autocorrelação pode ser calculada como

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)x(t+\tau)dt, \quad -\infty < \tau < \infty$$

Autocorrelação de Sinais de Potência

- A autocorrelação de um sinal periódico tem as seguintes propriedades

$$
\begin{aligned}
R_x(\tau) &= R_x(-\tau) \\
R_x(\tau) &\leq R_x(0) \quad \forall \tau \\
R_x(\tau) &\longleftrightarrow G_x(f) \\
R_x(0) &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x^2(t)dt = P_x
\end{aligned}
$$

Roteiro

Sinais Aleatórios

- Do ponto de vista do receptor, os sinais de interesse prático aparentam ser aleatórios
- Uma variável aleatória $X(A)$ ou simplesmente X representa uma relação funcional entre um evento aleatório A e um número real
- A função de distribuição de X é definida como

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

- Sendo $P(X \leq x)$ a probabilidade de X ser menor que o número real x

Função de Distribuição

- A função de distribuição $F_X(x)$ tem as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} 0 &\leq F_X(x) \leq 1 \\ F_X(x_1) &\leq F_X(x_2) \text{ se } x_1 \leq x_2 \\ F_X(-\infty) &= 0 \\ F_X(+\infty) &= 1 \end{aligned}$$

- Uma outra função de grande importância é a função densidade de probabilidade (fdp) da variável x, denotada por

$$p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Função Densidade de Probabilidade

- A partir da fdp é possível calcular a probabilidade de eventos como $x_1 \leq X \leq x_2$

$$\begin{aligned} P(x_1 \leq X \leq x_2) &= P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) \\ &= F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} p_X(x)dx \end{aligned}$$

- A fdp tem as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} p_X(x) &\geq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx &= F_X(+\infty) - F_X(-\infty) = 1 \end{aligned}$$

Médias de Variáveis Aleatórias

- O valor esperado ou valor médio de uma variável aleatória X é definido como

$$m_X = \mathbf{E}\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx$$

- O n-ésimo momento de uma variável aleatória X é definido como

$$\mathbf{E}\{X^n\} = = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_X(x) dx$$

- Quando $n = 2$, o momento de segunda ordem é conhecido como valor médio quadrático de X, ou seja

$$\mathbf{E}\{X^2\} = = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x) dx$$

Médias de Variáveis Aleatórias

- Pode-se também definir os momentos centrais de uma variável aleatória X, bastando substituir nas expressões anteriores x por $x - m_X$
- O momento central mais importante é a variância, definida por

$$var(X) \quad = \quad \sigma_X^2 = \mathbf{E}\{(X - m_X)^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 p_X(x) dx$$

- A relação entre a variância e o valor médio quadrático é dada por

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \mathbf{E}\{(X - m_X)^2\} = \mathbf{E}\{X^2 - 2m_X X + m_X^2\} \\ &= \mathbf{E}\{X^2\} - 2m_X \mathbf{E}\{X\} + m_X^2 = \mathbf{E}\{X^2\} - m_X^2 \end{aligned}$$

Função de Distribuição Conjunta

- Pode-se definir a função de distribuição e a função densidade de probabilidade para mais de uma variável aleatória
- Consideram-se n variáveis aleatórias denotadas por $X_i, i = 1, \cdots, n$
- A função de distribuição conjunta é definida como

$$\begin{aligned} F(x_1, \cdots, x_n) &= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \cdots, X_n \leq x_n) \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} p(u_1, \cdots, u_n) du_1 \cdots du_n \end{aligned}$$

- Sendo a fdp conjunta dada por

$$p(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} F(x_1, \cdots, x_n)$$

Função de Distribuição Conjunta

- A partir da fdp conjunta pode-se obter a distribuição de uma variável aleatória X_i integrando-se a fdp conjunta em relação às demais

$$p(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_2, \cdots, x_n) dx_2 \cdots dx_n$$

Probabilidade Condicional

- Considerando-se um experimento conjunto que ocorre com probabilidade $P(A,B)$
- Admitindo-se que o evento B ocorreu, a probabilidade condicional do evento A dado B é dada por

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

- De modo similar, a probabilidade do evento B dado A é dada por

$$P(B|A) = \frac{P(A,B)}{P(A)}, \quad P(A) > 0$$

Probabilidade Condicional

- Verifica-se que:

$$
\begin{aligned}
P(A,B) &= P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) \\
A \cap B = \varnothing &\Longrightarrow P(A|B) = 0 \\
A \subset B &\Longrightarrow A \cap B = A \Longrightarrow P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} \\
B \subset A &\Longrightarrow A \cap B = B \Longrightarrow P(B|A) = \frac{P(B)}{P(B)} = 1
\end{aligned}
$$

Regra de Bayes

- Seja $A_i, i = 1, 2, \cdots, n$ um conjunto de eventos mutuamente exclusivos com $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ e B um evento arbitrário
- A regra de Bayes é definida como

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i, B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}$$

- Em telecomunicações tem-se:
  - A_i - Mensagem transmitida
  - $P(A_i)$ - Probabilidade a priori de A_i
  - B - Mensagem recebida
  - $P(A_i|B)$ Probabilidade a posteriori de A_i dado que B foi recebido

Independência Estatística

- Considerando-se dois eventos A e B, se A não depende de B então:

$$P(A|B) = P(A) \Longrightarrow P(A,B) = P(A|B)P(B) = P(A)P(B)$$

- Resultados similares podem ser obtidos para variáveis aleatórias em termos da função de distribuição e da função densidade de probabilidade

$$\begin{aligned} p(x_1|x_2) &= \frac{p(x_1,x_2)}{p(x_2)} \\ p(x_1,\cdots,x_n) &= p(x_1,\cdots,x_k|x_{k+1},\cdots,x_n)p(x_{k+1},\cdots,x_n) \end{aligned}$$

Independência Estatística

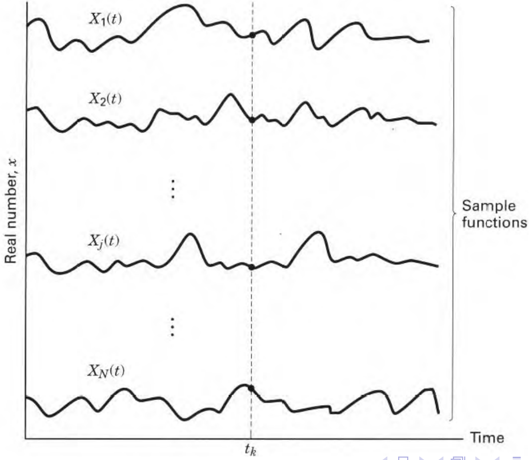
- Assim, se *n* variáveis aleatórias são independentes então:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= F(x_1)F(x_2)\cdots F(x_n) \\ p(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_n) \end{aligned}$$

Roteiro

Processos Aleatórios

- Um processo aleatório $X(A,t)$ pode se visto como uma função de duas variáveis: um evento A e o tempo



Processos Aleatórios

- Um processo aleatório $X(A, t)$ é caracterizado por uma família (ensemble) de funções amostras
- Cada evento A_j corresponde a uma função amostra $X(A_j, t) = X_j(t)$
- $X(A, t_k) = X(t_k)$ é uma variável aleatória representando as amplitudes do processo aleatório no instante t_k
- $X(A_j, t_k)$ consiste apenas em um valor obtido para o processo aleatório no tempo t_k para o evento A_j

Estatísticas de um Processo

- A média ou valor esperado de um processo aleatório $X(t)$ é uma função do tempo dada por

$$E\{X(t_k)\} = = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{X_k}(x)dx = m_X(t_k)$$

- A função de autocorrelação é dada pela correlação entre duas variáveis aleatórias nos instantes t_1 e t_2: $X(t_1)$ e $X(t_2)$

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E\{X(t_1)X(t_2)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_{x_1 x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

- A autocorrelação é uma média na família de funções amostras

Classificação dos Processos Aleatórios

- Os processos aleatórios podem ser classificados como estacionários ou não estacionários
- Em um processo estacionário no sentido estrito, as características estatísticas não mudam com o tempo
  - $p_x(x;t) = p_x(x)$ é independente de t
- É difícil verificar se um processo aleatório é estritamente estacionário na prática
- Por essa razão, se utiliza a definição de processo aleatório estacionário no sentido amplo

Autocorrelação de um Processo Aleatório

- Um processo é estacionário no sentido amplo se:

$$
\begin{aligned}
E\{X(t)\} &= m_X = \text{constante} \\
R_X(t_1, t_2) &= R_X(t_1 - t_2) = R_x(\tau) \quad \tau = t_1 - t_2
\end{aligned}
$$

- A autocorrelação de um processo aleatório no sentido amplo tem as seguintes propriedades

$$
\begin{aligned}
R_x(\tau) &= R_x(-\tau) \\
R_x(\tau) &\leq R_x(0) \quad \forall \tau \\
R_x(\tau) &\longleftrightarrow G_x(f) \\
R_x(0) &= \mathbf{E}\{X^2(t)\}
\end{aligned}
$$

Processos Ergódicos

- Um processo é ergódico se as médias temporais (para uma função amostra em particular) são iguais às médias estatísticas (tomadas sobre uma família de funções amostras)
- Um processo é ergódico na média se

$$m_X = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

- Um processo é ergódico na função de autocorrelação se

$$R_X(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) X(t+\tau) dt$$

Processos Ergódicos

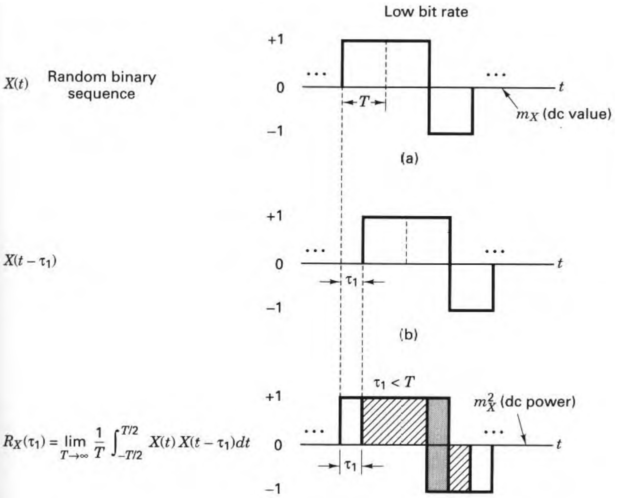
- Quando se admite que um sinal elétrico é ergódico, várias associações podem ser feitas
  - $m_X = E\{X(t)\}$ é igual ao nível DC do sinal
  - m_X^2 é igual à potência normalizada da componente DC
  - $E\{X^2(t)\}$ é igual à potência total normalizada
  - $\sqrt{E\{X^2(t)\}}$ é igual ao valor RMS da tensão ou da corrente
  - σ_X^2 é igual à potência normalizada da componente AC do sinal
  - σ_X é igual ao valor RMS da componente AC do sinal

Densidade Espectral de Potência de um Processo Aleatório

- Processos aleatórios podem ser classificados como sinais de potência
- A DEP de um processo aleatório descreve a distribuição da potência do processo no domínio da freqüência
- As principais característica da DEP são:

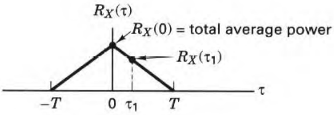
$$\begin{aligned} G_X(f) &\geq 0 \\ G_X(f) &= G_X(-f) \\ G_X(f) &\longleftrightarrow R_X(\tau) \\ P_X &= \int_{-\infty}^{\infty} G_X(f)df \end{aligned}$$

Densidade Espectral de Potência de um Processo Aleatório



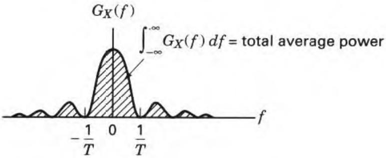
Densidade Espectral de Potência de um Processo Aleatório

$$R_X(\tau) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|\tau|}{T} & \text{for } |\tau| < T \\ 0 & \text{for } |\tau| > T \end{cases}$$

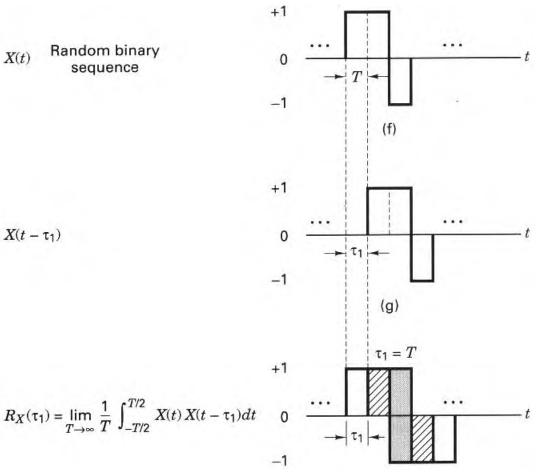


(d)

$$G_X(f) = T\left(\frac{\sin \pi f T}{\pi f T}\right)^2$$

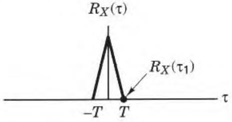


Densidade Espectral de Potência de um Processo Aleatório



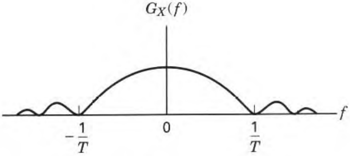
Densidade Espectral de Potência de um Processo Aleatório

$$R_X(\tau) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|\tau|}{T} & \text{for } |\tau| < T \\ 0 & \text{for } |\tau| > T \end{cases}$$



(i)

$$G_X(f) = T\left(\frac{\sin \pi f T}{\pi f T}\right)^2$$



Ruído nos Sistemas de Comunicação

- O termo ruído se refere a um sinal elétrico indesejado que está sempre presente nos sistemas elétricos
- O ruído pode ser originário de diversas fontes, naturais ou não
- Um bom projeto de engenharia pode eliminar diversos tipos de ruído, mas alguns tipos como o ruído térmico não pode ser eliminado
- O ruído térmico pode ser modelado como um processo aleatório Gaussiano $n(t)$ de média nula
- O valor n do ruído em um tempo arbitrário t é caracterizado pela fdp gaussiana

$$p(n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{n^2}{2\sigma^2}\right)$$

Ruído nos Sistemas de Comunicação

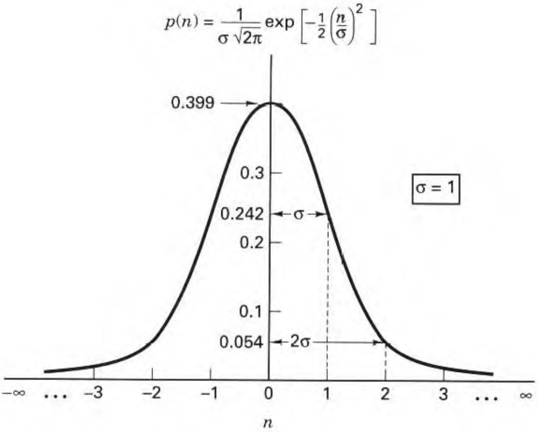


Figure 1.7 Normalized ($\sigma = 1$) Gaussian probability density function.

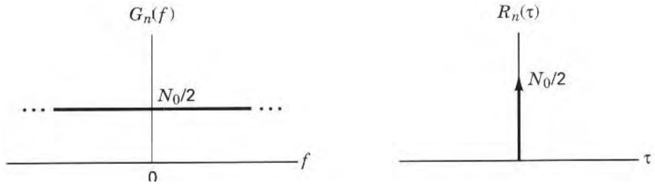
Ruído nos Sistemas de Comunicação

- No modelo usado para descrever o ruído térmico, considera-se que a densidade a densidade espectral de potência é constante para uma extensa faixa de freqüências
- Esse modelo é conhecido como ruído branco

$$
\begin{aligned}
G_n(f) &= \frac{N_0}{2} watts/hertz \\
R_n(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}\{G_n(f)\} = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)
\end{aligned}
$$

- A potência média do ruído branco é infinita
- Em uma banda finita, a potência do ruído branco é finita
- O modelo mais usado é o AWGN (Additive White Gaussian Noise)

Ruído nos Sistemas de Comunicação

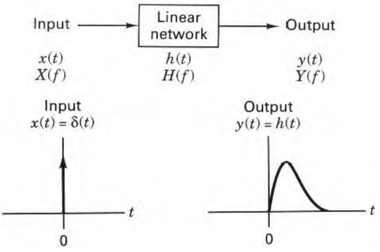


Roteiro

Transmissão através de Sistemas Lineares

- Para um sistema LIT, a relação entre a entrada e a saída é dada por

$$y(t) = x(t) * h(t)$$



Transmissão através de Sistemas Lineares

- No domínio da freqüência, tem-se

$$Y(f) = |Y(f)|e^{j\theta_Y(f)} = X(f)H(f) = |X(f)||H(f)|e^{j[\theta_X(f)+\theta_h(f)]}$$

- Portanto,

$$\begin{aligned} |Y(f)| &= |G(f)||H(f)| \\ \theta_y(f) &= \theta_x(f) + \theta_h(f) \end{aligned}$$

- Em se tratando de um sinal aleatório na entrada do sistema, a DEP de saída é dada por

$$G_Y(f) = G_X(f)|H(f)|^2$$

Transmissão sem Distorção

- Em uma transmissão sem distorção, a forma de onda de entrada deve ser preservada
  - Toleram-se atrasos e uma alteração uniforme na amplitude

$$y(t) = Kx(t - t_0)$$

- No domínio da freqüência, tem-se

$$Y(f) = KX(f)e^{-j2\pi ft_0} \rightarrow H(f) = Ke^{-j2\pi ft_0}$$

  - Resposta em amplitude constante - $|H(f)| = K$
  - Resposta em fase linear - $\theta_h(f) = -2\pi ft_0$

Transmissão sem Distorção

- A distorção de fase pose ser medida usando-se *o atraso do envelope* ou o *atraso de grupo* definido por

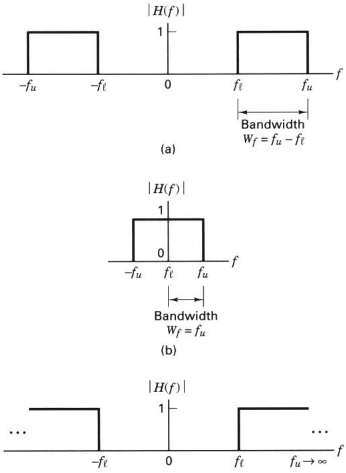
$$\tau(f) = -\frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(f)}{df}$$

- $\tau_h(f)$ constante implica que todas as componentes do sinal são igualmente atrasadas
- Para um sistema sem distorção, $\tau_h(f)$ deve ser pelo menos constante na banda de interesse

Filtros Ideais

- Um filtro ideal é um sistema linear que permite a transmissão sem distorção em uma determinada banda de freqüências enquanto que fora dessa faixa, a resposta é nula
    - A banda em que não há distorção $f_l < f < f_u$ é conhecida como banda de passagem (*passband*)
    - A largura de banda do filtro ideal é $W_f = f_u - f_l$
    - Os filtros ideais não são fisicamente realizáveis

Filtros Ideais



Filtros Ideais

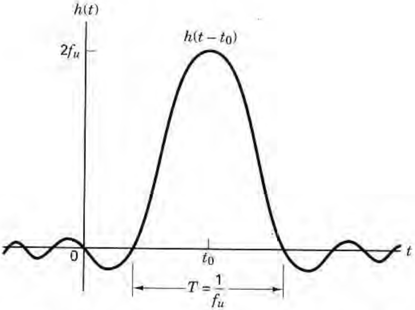


Figure 1.12 Impulse response of the ideal low-pass filter.

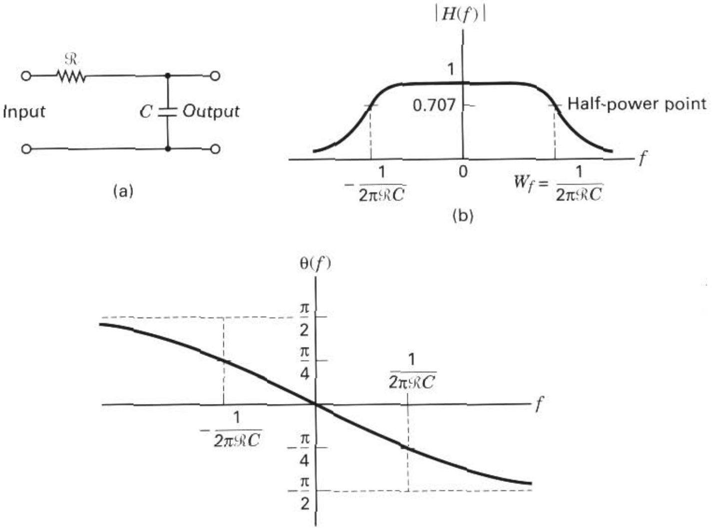
Filtros Realizáveis

- Um filtro passa-baixas pode ser construído a partir de um simples circuito RC

$$\begin{aligned} H(f) &= \frac{1}{1+j2\pi fRC} = \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi fRC)^2}} e^{-j\theta(f)} \\ \theta(f) &= \arctan(2\pi fRC) \end{aligned}$$

- A largura de banda do filtro passa-baixas RC é definida como o ponto de meia potência (-3dB)
  - Ponto 3dB abaixo do pico
  - Ponto em que a tensão de saída caiu a $1/\sqrt{2}$ do seu valor de pico

Filtros Realizáveis



Decibéis

- Sejam P_1 e P_2 valores de potência em dois pontos, a razão entre essas potências em decibéis é definida por

$$\begin{aligned}\text{número de dBs} &= 10\log_{10}\frac{P_2}{P_1} = 10\log_{10}\frac{V_2^2/R_2}{V_1^2/R_1}\\ &= 10\log_{10}\frac{V_2^2}{V_1^2} = 20\log_{10}\frac{V_2}{V_1}\end{aligned}$$

- Se V_1 representa a tensão de entrada e V_2 a tensão de saída então a resposta de amplitude em dB pode ser expressa como

$$|H(f)|_{dB} = 20\log_{10}\frac{V_2}{V_1} = 20\log_{10}|H(f)|$$

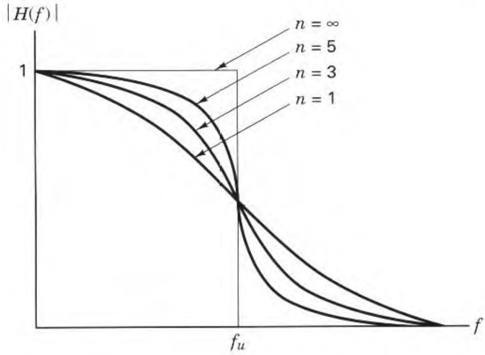
Filtro de Butterworth

- Melhores aproximações de filtros ideais podem ser obtidas a partir dos filtros de Butterworth
- Sendo f_u a freqüência de corte de $-3dB$ e n a ordem do filtro, então tem-se:

$$|H_n(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+(f/f_u)^{2n}}}, \quad n \geq 1$$

- Quanto maior o valor de n, melhor é a aproximação do filtro e mais complexa é a sua construção

Filtro de Butterworth



Espectro

- Uma das formas de transladar o espectro de freqüências de um sinal em banda básica $x(t)$ é multiplicá-lo por uma portadora senoidal

$$x_c(t) = x(t)\cos 2\pi f_c t$$

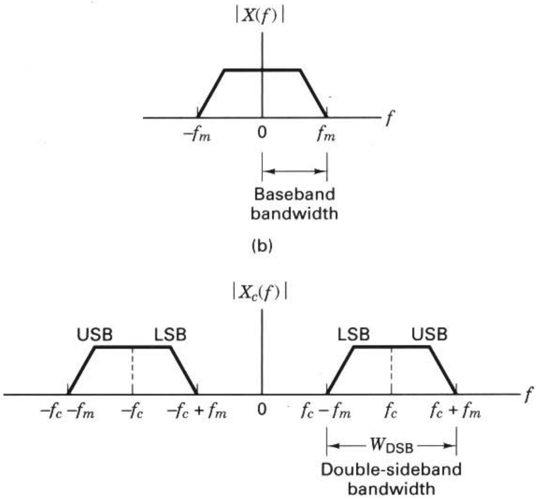
- O resultado dessa operação é um sinal DSB (Double-sideband)

$$X_c(f) = \frac{1}{2}[X(f - f_c) + X(f + f_c)]$$

- A largura de banda do sinal DSB é duas vezes à do sinal em banda básica

$$W_{DSB} = 2f_m$$

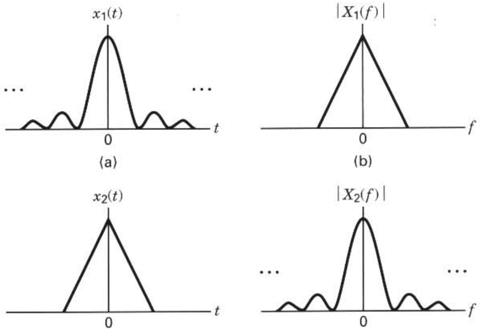
Espectro



|X(f)|
f
−fm
0
fm
Baseband
bandwidth
(b)
|Xc(f)|
USB
LSB
LSB
USB
f
−fc −fm
−fc
−fc + fm
0
fc − fm
fc
fc + fm
WDSB
Double-sideband
bandwidth

Dilema da Largura de Banda

- Um dos grandes dilemas enfrentados em telecomunicações se refere à largura de banda
  - Sinais limitados em banda não são realizáveis (a duração seria infinita)
  - Sinais de duração finita são facilmente realizáveis, mas tem largura de banda infinita



Definições de Largura de Banda

- Como o espectro dos sinais práticos se estende ao infinito, é necessário utilizar algum critério para determinar a largura de banda
- Um pulso de duração finita T modulado tem uma DEP da forma

$$G_x(f) = T\left[\frac{\sin \pi(f - f_c)T}{\pi(f - f_c)T}\right]^2$$

- O gráfico da DEP consiste de um lóbulo principal e lóbulos laterais menores

Definições de Largura de Banda

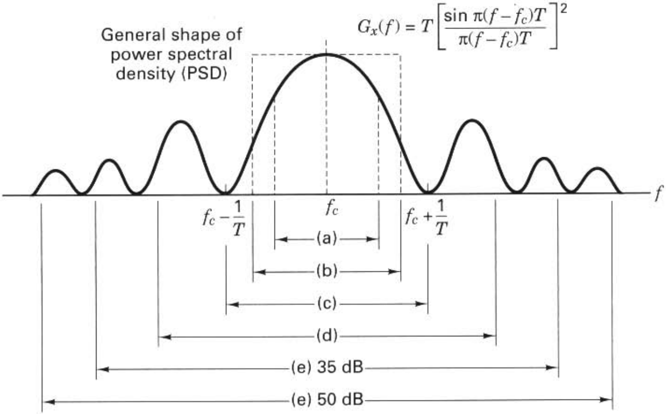


Figure 1.20 Bandwidth of digital data. (a) Half-power. (b) Noise equivalent. (c) Null to null. (d) 99% of power. (e) Bounded PSD (defines attenuation outside bandwidth) at 35 and 50 dB.

Definições de Largura de Banda

- As principais definições de largura de banda são as seguintes
  - *Largura de banda de meia potência* - Intervalo em que $G_x(f)$ caiu à metade (-3 dB)
  - *Largura de banda equivalente de ruído* W_N - Definida por $W_N = \frac{P_x}{G_x(f_c)}$ em que P_x é a potência total
  - *Largura de Banda do Lóbulo Principal - Null-to-null bandwidth*
  - *Largura de banda contendo uma fração da potência* - Intervalo que contém uma percentagem da potência total (99% tipicamente)
  - *Densidade espectral de potência limitada* - Intervalo em que $G_x(f)$ é atenuada por uma certa quantidade (35 ou 50 dB tipicamente)
  - *Largura de banda absoluta*