

Comportamento dos Sistemas Analógicos na Presença do Ruído

Edmar José do Nascimento
(Princípios de Comunicações)
<http://www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento>

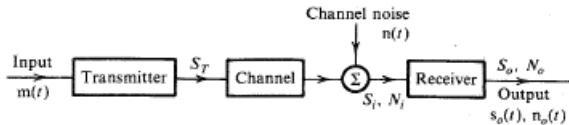
Universidade Federal do Vale do São Francisco

Roteiro

- 1 Introdução
- 2 Sistemas Modulados em Amplitude
- 3 Sistemas Modulados em Ângulo

Sistemas Analógicos com Ruído

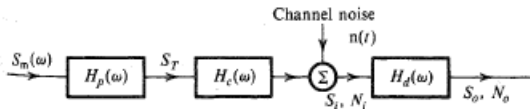
- Um sistema de comunicação analógico pode ser representado esquematicamente pela figura abaixo



- O canal pode ocasionar distorção e atenuação, além da adição de ruído
- A potência na entrada do receptor S_i é proporcional à potência transmitida S_T
- A SNR na saída do receptor S_o/N_o é uma medida do desempenho do sistema de comunicação

Sistemas em Banda Básica (Baseband)

- Uma transmissão em banda básica é aquela em que o sinal é transmitido sem modulação
- É de interesse comparar a SNR na saída do receptor para os sistemas modulados tendo como referência um sistema em banda básica
- Um sistema em banda básica pode ser representado pela seguinte figura



Sistemas em Banda Básica (Baseband)

- Para o modelo da figura, tem-se que:
 - O sinal de entrada $m(t)$ é representado por um processo aleatório, estacionário no sentido amplo com média nula e limitado em frequência a $B\text{Hz}$
 - O transmissor é apenas um filtro passa-baixas $H_p(\omega)$ cujo objetivo é limitar a banda do sinal $m(t)$
 - O receptor é apenas um filtro passa-baixas $H_d(\omega)$ cujo objetivo é eliminar o ruído fora da banda do sinal
 - $H_c(\omega)$ representa a distorção do canal
- Considerando que $H_p(\omega)$ e $H_d(\omega)$ são ideais e que o canal não introduz distorção $H_c(\omega) = 1$, S_o/N_o é calculado da seguinte maneira

Sistemas em Banda Básica (Baseband)

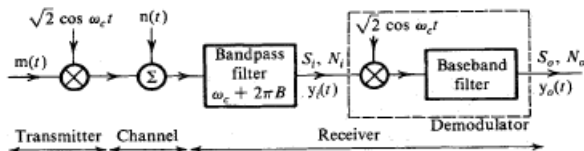
- Considerando que $H_p(\omega)$ e $H_d(\omega)$ são ideais e que o canal não introduz distorção $H_c(\omega) = 1$, S_o/N_o
- Como o sinal é limitado em frequência a B Hz, pode-se utilizar o modelo de ruído branco passa-baixas com DEP $S_n(\omega) = \mathcal{N}/2$ assim tem-se que:

$$\begin{aligned}S_o &= S_i \\N_o &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} S_n(\omega) d\omega = \mathcal{N}B \\ \frac{S_o}{N_o} &= \frac{S_i}{\mathcal{N}B} = \gamma\end{aligned}$$

- Em que γ foi assim definido para efeito de comparação com os sistemas modulados

AM DSB-SC

- Um sistema DSB-SC pode ser representado pelo modelo indicado abaixo



- Nesse modelo, S_i representa a potência útil do sinal na entrada do demodulador e S_o na saída
- N_o representa a potência do ruído na saída do demodulador

AM DSB-SC

- Na entrada do demodulador, o sinal $y_i(t)$ é dado por

$$\begin{aligned}y_i(t) &= \sqrt{2}m(t) \cos \omega_c t + n(t) \\&= \sqrt{2}m(t) \cos \omega_c t + n_c(t) \cos \omega_c t + n_s(t) \sin \omega_c t \\&= [\sqrt{2}m(t) + n_c(t)] \cos \omega_c t + n_s(t) \sin \omega_c t\end{aligned}$$

- Na demodulação, o sinal $y_i(t)$ é multiplicado por $\sqrt{2} \cos \omega_c t$ e depois é filtrado (passa-baixas), resultando no sinal $y_o(t)$

$$\begin{aligned}\sqrt{2} \cos \omega_c t y_i(t) &= [2m(t) + \sqrt{2}n_c(t)] \cos^2 \omega_c t + \sqrt{2}n_s(t) \sin \omega_c t \cos \omega_c t \\&= \left[m(t) + \frac{n_c(t)}{\sqrt{2}}\right](1 + \cos 2\omega_c t) + \frac{n_s(t)}{\sqrt{2}} \sin 2\omega_c t \\y_o(t) &= m(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}n_c(t)\end{aligned}$$

AM DSB-SC

- As potências são calculadas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} S_i &= \overline{\varphi_{AM-DSB-SC}^2(t)} = \overline{[\sqrt{2}m(t) \cos \omega_c t]^2} \\ &= \overline{2[m(t) \cos \omega_c t]^2} = 2 \frac{\overline{m^2(t)}}{2} = \overline{m^2(t)} \\ S_o &= \overline{m^2(t)} = S_i, \quad N_o = \frac{1}{2} \overline{n_c^2(t)} \end{aligned}$$

- Para o ruído branco passa-faixa na banda $4\pi B$ rad/s, tem-se que:

$$\overline{n_c^2(t)} = \overline{n_s^2(t)} = \overline{n^2(t)} = 2\mathcal{N}B \implies N_o = \mathcal{N}B$$

AM DSB-SC

- Assim, a SNR na saída do demodulador é dada por:

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{S_i}{\mathcal{N}B} = \gamma$$

- Ou seja, para uma potência S_i fixada, a SNR na saída para sistemas AM-DSB-SC é igual à SNR para o sistema em banda básica

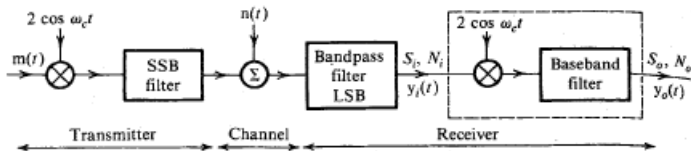
AM SSB-SC

- Um sinal SSB-SC pode ser representado no domínio do tempo por:

$$\varphi_{BLI}(t) = m(t) \cos \omega_c t + m_h(t) \sin \omega_c t$$

$$\varphi_{BLS}(t) = m(t) \cos \omega_c t - m_h(t) \sin \omega_c t$$

- Um sistema SSB-SC pode ser representado pelo modelo indicado abaixo



AM SSB-SC

- Na entrada do demodulador, considerando-se a Banda Lateral Inferior, o sinal $y_i(t)$ é dado por

$$\begin{aligned}y_i(t) &= \varphi_{BLI}(t) + n(t) \\ &= [m(t) + n_c(t)] \cos \omega_c t + [m_h(t) + n_s(t)] \sin \omega_c t\end{aligned}$$

- Na demodulação, o sinal $y_i(t)$ é multiplicado por $2 \cos \omega_c t$ e depois é filtrado (passa-baixas), resultando no sinal $y_o(t)$

$$\begin{aligned}2 \cos \omega_c t y_i(t) &= 2[m(t) + n_c(t)] \cos^2 \omega_c t \\ &\quad + 2[m_h(t) + n_s(t)] \sin \omega_c t \cos \omega_c t \\ &= [m(t) + n_c(t)](1 + \cos 2\omega_c t) \\ &\quad + [m_h(t) + n_s(t)] \sin 2\omega_c t \\ y_o(t) &= m(t) + n_c(t)\end{aligned}$$

AM SSB-SC

- As potências são calculadas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} S_i &= \frac{1}{2} \overline{[2m(t) \cos \omega_c t]^2} \\ &= 2 \overline{[m(t) \cos \omega_c t]^2} = 2 \frac{\overline{m^2(t)}}{2} = \overline{m^2(t)} \\ S_o &= \overline{m^2(t)} = S_i, \quad N_o = \overline{n_c^2(t)} \end{aligned}$$

- Para o ruído branco passa-faixa na banda $2\pi B$ rad/s, tem-se que:

$$\overline{n_c^2(t)} = \overline{n_s^2(t)} = \overline{n^2(t)} = \mathcal{N}B \implies N_o = \mathcal{N}B$$

AM SSB-SC

- Assim, a SNR na saída do demodulador é dada por:

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{S_i}{\mathcal{N}B} = \gamma$$

- Ou seja, para uma potência S_i fixada, a SNR na saída para sistemas AM-SSB-SC é igual à SNR para os sistemas em banda básica e AM-DSB-SC

Exemplo

Exemplo 12.1

Em um sistema DSB-SC, a frequência da portadora é $f_c = 500\text{kHz}$ e o sinal modulante $m(t)$ tem uma DEP uniforme limitada em banda a 4kHz . O sinal modulado é transmitido através de um canal sem distorção com DEP do ruído $S_n(\omega) = 1/(\omega^2 + a^2)$, sendo $a = 10^6\pi$. A potência do sinal útil na entrada do receptor é de $1\mu\text{W}$. O sinal recebido é passado através de um filtro passa-faixa, multiplicado por $2\cos\omega_c t$ e então é passado através de um filtro passa-baixas, resultando na saída $s_o(t) + n_o(t)$. Determine a SNR da saída.

Exemplo

Exemplo 12.1 - Solução

Seja $km(t) \cos \omega_c t$ o sinal recebido, então o sinal na entrada do demodulador é dado por:

$$y_i(t) = [km(t) + n_c(t)] \cos \omega_c t + n_s(t) \sin \omega_c t$$

Após a multiplicação por $2 \cos \omega_c t$ e filtragem, o sinal de saída é dado por:

$$y_o(t) = km(t) + n_c(t)$$

Exemplo

Exemplo 12.1 - Solução

Tem-se ainda que:

$$S_i = \frac{k^2 \overline{m^2(t)}}{2} = 10^{-6} \implies k^2 \overline{m^2(t)} = 2 \times 10^{-6}$$

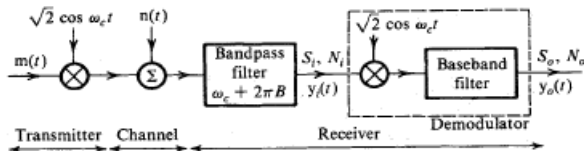
$$S_o = k^2 \overline{m^2(t)} = 2 \times 10^{-6}$$

$$N_o = \overline{n_c^2(t)} = 2 \times \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_c - 2\pi B}^{\omega_c + 2\pi B} \frac{1}{\omega^2 + a^2} d\omega = 8 \times 10^{-10}$$

$$\frac{S_o}{N_o} = 2,5 \times 10^3 \approx 34dB$$

AM Tradicional

- Na modulação AM tradicional (com portadora), o sinal recebido pode ser demodulado de duas formas:
 - Demodulação síncrona ou coerente
 - Demodulação não coerente (detecção de envelope)
- A análise da demodulação síncrona pode ser feita de modo idêntico à feita para a modulação AM-DSB-SC



AM Tradicional com Demodulação Síncrona

- Na entrada do demodulador, o sinal $y_i(t)$ é dado por

$$\begin{aligned}y_i(t) &= \sqrt{2}[A + m(t)] \cos \omega_c t + n(t) \\&= \sqrt{2}\left[A + m(t) + \frac{n_c(t)}{\sqrt{2}}\right] \cos \omega_c t + n_s(t) \sin \omega_c t\end{aligned}$$

- Na demodulação, o sinal $y_i(t)$ é multiplicado por $\sqrt{2} \cos \omega_c t$, depois é filtrado (passa-baixas) e em seguida é passado através de um bloqueador DC, resultando no sinal $y_o(t)$

$$\begin{aligned}\sqrt{2} \cos \omega_c t y_i(t) &= 2\left[A + m(t) + \frac{n_c(t)}{\sqrt{2}}\right] \cos^2 \omega_c t + \sqrt{2} n_s(t) \sin \omega_c t \cos \omega_c t \\&= \left[A + m(t) + \frac{n_c(t)}{\sqrt{2}}\right] (1 + \cos 2\omega_c t) + \frac{n_s(t)}{\sqrt{2}} \sin 2\omega_c t \\y_o(t) &= m(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} n_c(t)\end{aligned}$$

AM Tradicional com Demodulação Síncrona

- As potências são calculadas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}S_i &= \overline{[\sqrt{2}(A + m(t)) \cos \omega_c t]^2} \\&= 2 \frac{1}{2} \overline{[A + m(t)]^2} = \overline{A^2 + 2Am(t) + m^2(t)} \\&= A^2 + 2\overline{Am(t)} + \overline{m^2(t)} = A^2 + \overline{m^2(t)} \\S_o &= \overline{m^2(t)}, \quad N_o = \frac{1}{2} \overline{n_c^2(t)}\end{aligned}$$

- Para o ruído branco passa-faixa na banda $4\pi B$ rad/s, tem-se que:

$$\overline{n_c^2(t)} = \overline{n_s^2(t)} = \overline{n^2(t)} = 2\mathcal{N}B \implies N_o = \mathcal{N}B$$

AM Tradicional com Demodulação Síncrona

- Assim, a SNR na saída do demodulador é dada por:

$$\begin{aligned}\frac{S_o}{N_o} &= \frac{\overline{m^2(t)}}{\mathcal{N}B} = \frac{\overline{m^2(t)}}{\mathcal{N}B} \cdot \frac{S_i}{A^2 + \overline{m^2(t)}} \\ &= \frac{\overline{m^2(t)}}{A^2 + \overline{m^2(t)}} \frac{S_i}{\mathcal{N}B} = \frac{\overline{m^2(t)}}{A^2 + \overline{m^2(t)}} \gamma \\ \mu &= \frac{m_p}{A}; 0 \leq \mu \leq 1 \implies A \geq m_p\end{aligned}$$

- A SNR máxima é obtida para $\mu = 1$ ou seja, $A = m_p$

AM Tradicional com Demodulação Síncrona

- Assim, a SNR na saída do demodulador é dada por:

$$\left(\frac{S_o}{N_o}\right)_{MAX} = \frac{\overline{m^2(t)}}{m_p^2 + \overline{m^2(t)}} \gamma$$

- Como

$$\frac{m_p^2}{\overline{m^2(t)}} \geq 1$$

- Então

$$\frac{S_o}{N_o} \leq \frac{\gamma}{2}$$

- Ou seja, a SNR do AM tradicional é no mínimo 3dB inferior ao AM-DSB-SC

AM Tradicional com Detecção de Envelope

- Admitindo que o sinal enviado é $[A + m(t)] \cos \omega_c t$, o sinal $y_i(t)$ na entrada do demodulador é dado por

$$\begin{aligned} y_i(t) &= [A + m(t)] \cos \omega_c t + n(t) \\ &= [A + m(t) + n_c(t)] \cos \omega_c t + n_s(t) \sin \omega_c t \end{aligned}$$

- As potências do sinal na entrada do demodulador é dada por:

$$S_i = \frac{1}{2} \overline{[A + m(t)]^2} = \frac{A^2 + \overline{m^2(t)}}{2}$$

AM Tradicional com Detecção de Envelope

- O sinal $y_i(t)$ pode ser representado na forma

$$y_i(t) = E_i(t) \cos [\omega_c t + \Theta_i(t)]$$

- Com

$$E_i(t) = \sqrt{[A + m(t) + n_c(t)]^2 + n_s^2(t)}$$

$$\Theta_i(t) = -\arctan \left(\frac{n_s(t)}{A + m(t) + n_c(t)} \right)$$

AM Tradicional com Detecção de Envelope

- Quando o ruído é pequeno para quase todo t , $[A + m(t)] \gg n(t)$, então $E_i(t)$ pode ser aproximado por:

$$E_i(t) \simeq A + m(t) + n_c(t)$$

- O termo DC pode ser eliminado através de um capacitor, resultando em um sinal $y_o(t) = m(t) + n_c(t)$, assim

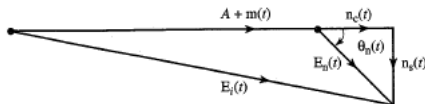
$$\begin{aligned} S_o &= \overline{m^2(t)}, \quad N_o = \overline{n_c^2(t)} = 2\mathcal{N}B \\ \frac{S_o}{N_o} &= \frac{\overline{m^2(t)}}{2\mathcal{N}B} = \frac{\overline{m^2(t)}}{A^2 + \overline{m^2(t)}} \frac{S_i}{\mathcal{N}B} = \frac{\overline{m^2(t)}}{A^2 + \overline{m^2(t)}} \gamma \end{aligned}$$

- Ou seja, quando o ruído é pequeno, a SNR é a mesma da demodulação síncrona

AM Tradicional com Detecção de Envelope

- Quando o ruído é elevado, $n(t) \gg [A + m(t)]$, então $E_i(t)$ pode ser aproximado por:

$$\begin{aligned}
 E_i(t) &= \sqrt{[A + m(t) + n_c(t)]^2 + n_s^2(t)} \\
 &= \sqrt{[A + m(t)]^2 + 2[A + m(t)]n_c(t) + n_c^2(t) + n_s^2(t)} \\
 &\simeq \sqrt{n_c^2(t) + n_s^2(t) + 2[A + m(t)]n_c(t)} \\
 &= E_n(t) \sqrt{1 + \frac{2[A + m(t)]}{E_n(t)} \cos \Theta_n(t)}
 \end{aligned}$$



AM Tradicional com Detecção de Envelope

- Como $E_n(t) \gg A + m(t)$ e $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ para x pequeno, tem-se que:

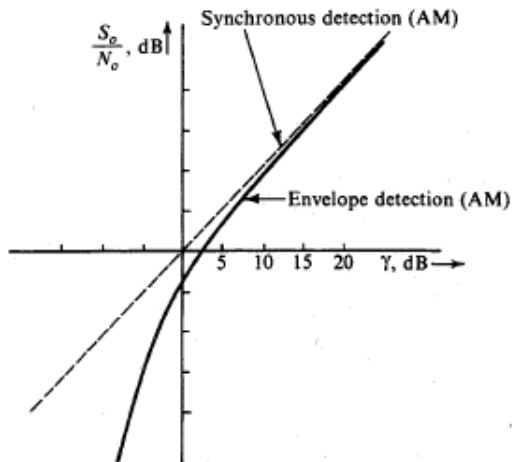
$$E_i(t) \simeq E_n(t) + [A + m(t)] \cos \Theta_n(t)$$

- Observa-se que a informação é completamente perdida, pois o sinal $m(t)$ é multiplicado pelo ruído
- Nos casos intermediários, a SNR é dado por

$$\frac{S_o}{N_o} \simeq 0,916 A^2 \overline{m^2(t)} \gamma^2$$

- O limiar da transição entre essas regiões ocorre quando γ é da ordem de $10dB$
- Para um sinal AM de boa qualidade, γ é da ordem de $30dB$

AM Tradicional com Detecção de Envelope



Exemplo

Exemplo 12.2

Obtenha γ_{Limiar} , o valor de γ no limiar para a modulação AM de um tom com $\mu = 1$ se o início do limiar ocorre quando $E_n > A$ com probabilidade 0,01, sendo E_n o envelope do ruído.

Exemplo

Exemplo 12.2 - Solução

Se n_c e n_s são gaussianos com variância σ_n^2 , então E_n tem uma fdp de Rayleigh com variância σ_n^2 dada por:

$$p_{E_n}(E_n) = \frac{E_n}{\sigma^2} e^{-\frac{E_n^2}{2\sigma_n^2}}$$

Assim, a probabilidade de $E_n > A$ é dada por:

$$\begin{aligned} P(E_n > A) &= \int_A^\infty p_{E_n}(E_n) dE_n = \int_A^\infty \frac{E_n}{\sigma^2} e^{-\frac{E_n^2}{2\sigma_n^2}} dE_n \\ &= e^{-A^2/2\sigma_n^2} = 0,01 \implies \frac{A^2}{2\sigma_n^2} = 4,605 \end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo 12.2 - Solução

Como $\sigma_n^2 = 2\mathcal{N}B$, então:

$$\frac{A^2}{4\mathcal{N}B} = 4,605$$

Para a modulação em tom com $\mu = 1$, tem-se:

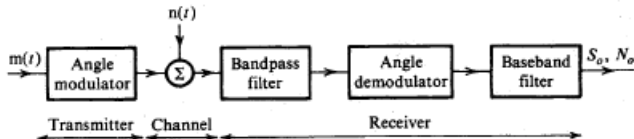
$$m(t) = \mu A \cos(\omega_m t + \Theta) = A \cos(\omega_m t + \Theta)$$

$$S_i = \frac{A^2 + \overline{m^2(t)}}{2} = \frac{A^2 + 0,5A^2}{2} = \frac{3A^2}{4}$$

$$\gamma_{Limiar} = \frac{S_i}{\mathcal{N}B} = \frac{3A^2}{4\mathcal{N}B} = 13,8 \text{ (12,4dB)}$$

Modulação em Ângulo

- Um sistema modulado em ângulo pode ser representado pelo modelo indicado abaixo



- O sinal modulado $\varphi_{EM}(t)$ pode ser representado por:

$$\varphi_{EM}(t) = A \cos [\omega_c t + \psi(t)]$$

$$\psi(t) = \begin{cases} k_p m(t), & \text{PM} \\ k_f \int_{-\infty}^0 m(\alpha) d\alpha, & \text{FM} \end{cases}$$

Modulação em Ângulo

- Como $B_{EM} = 2(\Delta f + B)$, com

$$\Delta f = \begin{cases} \frac{k_p m'_p}{2\pi}, & \text{PM} \\ \frac{k_f m_p}{2\pi}, & \text{FM} \end{cases}$$

- O ruído $n(t)$ pode ser modelado como um processo aleatório passa-faixa com largura de banda $2(\Delta f + B)$, assim:

$$n(t) = n_c(t) \cos \omega_c t + n_s(t) \sin \omega_c t = E_n(t) \cos [\omega_c t + \Theta_n(t)]$$

- Em que $n_c(t)$ e $n_s(t)$ são processos passa-baixas com largura de banda $2(\Delta f + B)$
- Como a modulação em ângulo é não linear, o princípio da superposição não pode ser aplicado para o cálculo da SNR da saída

Modulação em Fase

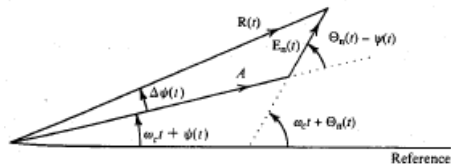
- Na modulação em fase, $\psi(t) = k_p m(t)$
- Como a modulação em banda estreita (NBPM) é aproximadamente linear, considera-se apenas nessa análise a modulação em banda larga (WBPM)
 - $\Delta f \gg B$
- Em WBPM, o sinal muda muito lentamente em relação ao ruído
 - $2(\Delta f + B)$ é a banda do ruído
 - $2B$ é a banda do sinal

Modulação em Fase

- O sinal $y_i(t)$ na estrada do demodulador é dado por:

$$\begin{aligned}
 y_i(t) &= A \cos [\omega_c t + \psi(t)] + n(t) \\
 &= A \cos [\omega_c t + \psi(t)] + E_n(t) \cos [\omega_c t + \Theta_n(t)] \\
 &= R(t) \cos [\omega_c t + \psi(t) + \Delta\psi(t)]
 \end{aligned}$$

- O diagrama fasorial correspondente é mostrado abaixo



Modulação em Fase

- Quando o ruído é pequeno, $E_n(t) \ll A$ para quase todo t , então:

$$\Delta\psi(t) = \frac{s}{r} \simeq \frac{E_n(t) \sin [\Theta_n(t) - \psi(t)]}{A}$$

- O demodulador detecta a fase de $y_i(t)$, assim:

$$y_o(t) = \psi(t) + \Delta\psi(t) = k_p m(t) + \frac{E_n(t)}{A} \sin [\Theta_n(t) - \psi(t)]$$

- Como $\psi(t)$ varia mais lentamente que $\Theta_n(t)$, pois $B \ll 2(\Delta f + B)$, então $\psi(t) \sim \psi = \text{constante}$

Modulação em Fase

$$\begin{aligned}
 \Delta\psi(t) &\simeq \frac{E_n(t)}{A} \sin [\Theta_n(t) - \psi] \\
 &= \frac{E_n(t)}{A} \sin \Theta_n(t) \cos \psi - \frac{E_n(t)}{A} \cos \Theta_n(t) \sin \psi \\
 &= \frac{n_s(t)}{A} \cos \psi - \frac{n_c(t)}{A} \sin \psi
 \end{aligned}$$

- Para $n(t)$ branco, $n_c(t)$ e $n_s(t)$ são não coerentes, logo:

$$\begin{aligned}
 S_{\Delta\psi}(\omega) &= \frac{\cos^2 \psi}{A^2} S_{n_s}(\omega) + \frac{\sin^2 \psi}{A^2} S_{n_c}(\omega) = \frac{S_{n_s}(\omega)}{A^2} = \frac{S_{n_c}(\omega)}{A^2} \\
 S_{\Delta\psi}(\omega) &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{N}{A^2}, \quad -2\pi(\Delta f + B) \leq \omega \leq 2\pi(\Delta f + B) \\ 0, \quad \text{c.c} \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Modulação em Fase

- Após a passagem do sinal de saída do modulador pelo filtro passa-baixas, o ruído na saída se concentra apenas na banda B , logo:

$$S_{n_o}(\omega) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\mathcal{N}}{A^2}, & -2\pi B \leq \omega \leq 2\pi B \\ 0, & \text{c.c} \end{array} \right\}$$

- Finalmente, a SNR na saída é calculada como:

$$N_o = \frac{2\mathcal{N}B}{A^2}$$

$$S_o = \overline{\psi^2(t)} = \overline{k_p^2 m^2(t)} = k_p^2 \overline{m^2(t)}$$

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{k_p^2 \overline{m^2(t)} A^2}{2\mathcal{N}B} = k_p^2 A^2 \frac{\overline{m^2(t)}}{2\mathcal{N}B}$$

Modulação em Fase

- A relação da SNR com a potência de entrada é obtida a seguir:

$$S_i = \overline{[A \cos[\omega_c t + \psi(t)]]^2} = \frac{A^2}{2}$$

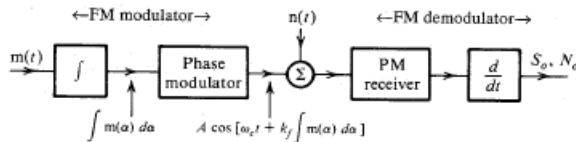
$$\gamma = \frac{S_i}{\mathcal{N}B} = \frac{A^2}{2\mathcal{N}B}$$

$$\frac{S_o}{N_o} = k_p^2 \overline{m^2(t)} \gamma = (\Delta\omega)^2 \left(\frac{\overline{m^2(t)}}{(m'_p)^2} \right) \gamma$$

- Pode-se observar que a SNR aumenta em 6dB quando dobra-se a banda do sinal PM, $\Delta\omega$

Modulação em Freqüência

- Caso especial da modulação em fase quando o sinal modulante é $\int_{-\infty}^t m(\alpha) d\alpha$
- Considera-se nessa análise o caso do FM banda larga (WBFM), $\Delta f \gg B$
- Quando o ruído é pequeno, a demodulação pode ser feita utilizando-se o receptor PM utilizado anteriormente seguido de um diferenciador resultando na saída $k_f m(t)$, logo $S_o = k_f^2 \overline{m^2(t)}$

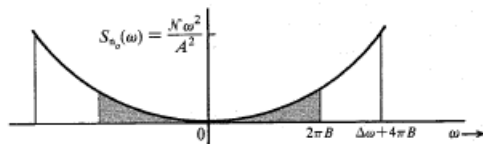


Modulação em Freqüência

- A DEP e a potência do ruído na saída do diferenciador são dadas por:

$$S_{n_o}(\omega) = \begin{cases} \frac{\mathcal{N}}{A^2} \omega^2, & -2\pi B \leq \omega \leq 2\pi B \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

$$N_o = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} \frac{\mathcal{N}}{A^2} \omega^2 d\omega = \frac{8\pi^2 \mathcal{N} B^3}{3A^2}$$



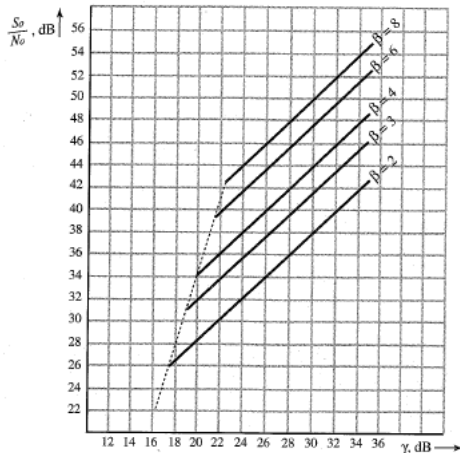
Modulação em Freqüência

- Finalmente, a SNR na saída é dada por:

$$\begin{aligned}\frac{S_o}{N_o} &= \frac{3A^2 k_f^2 \overline{m^2(t)}}{8\pi^2 \mathcal{N} B^3} = \frac{3k_f^2 \overline{m^2(t)}}{(2\pi B)^2} \frac{A^2}{2\mathcal{N} B} \\ &= 3 \left(\frac{\Delta f}{B} \right)^2 \left(\frac{\overline{m^2(t)}}{m_p^2} \right) \gamma = 3\beta^2 \gamma \left(\frac{\overline{m^2(t)}}{m_p^2} \right)\end{aligned}$$

- Observa-se que ao dobrar a largura de banda, aumenta-se a SNR em 6dB

Desempenho de um Sistema FM para a Modulação de um Tom



Modulação em Ângulo de Banda Estreita

- Para as modulações em ângulo de banda estreita, NBPM e NBFM, a análise é similar à feita para o AM
- Para NBPM, se $m_1(t) = Ak_p m(t)$, então:

$$\left(\frac{S_o}{N_o}\right)_{PM} = \frac{\overline{m_1^2(t)}}{A^2 + \overline{m_1^2(t)}} \gamma$$

- Esta expressão é similar à obtida para AM, substituindo-se $m(t)$ por $m_1(t)$

Comparação entre FM e PM

- Para as modulações em ângulo de banda larga, foram obtidas as seguintes expressões para a SNR de saída:

$$\left(\frac{S_o}{N_o}\right)_{PM} = (\Delta\omega)^2 \left(\frac{\overline{m^2(t)}}{(m'_p)^2}\right) \gamma, \quad \left(\frac{S_o}{N_o}\right)_{FM} = 3 \left(\frac{\Delta f}{B}\right)^2 \left(\frac{\overline{m^2(t)}}{m_p^2}\right) \gamma$$

- Considerando a mesma banda para ambas as modulações e o fato que $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$, então:

$$\frac{(S_o/N_o)_{PM}}{(S_o/N_o)_{FM}} = \frac{(2\pi B)^2 m_p^2}{3(m'_p)^2}$$

Comparação entre FM e PM

- A partir dessa expressão, verifica-se que PM é superior ao FM se:

$$(2\pi B)^2 m_p^2 > 3(m'_p)^2$$

- Se a DEP de $m(t)$ é concentrada em baixas frequências, as componentes de baixa frequência predominam em $m(t)$ e m'_p é pequeno
 - PM é superior nesse caso
- Se a DEP de $m(t)$ é concentrada em altas frequências, então FM é superior

Exemplo

Exemplo 12.3

Para um processo aleatório gaussiano $m(t)$ como sinal modulante, determine a SNR de saída para a modulação FM admitindo-se que o ruído é gaussiano branco.

Exemplo 12.3 - Solução

Para $m(t)$ gaussiano, $m_p = \infty$. Mas como $P(|m| < 3\sigma_m) = 0,9973$, pode-se considerar que $m_p = 3\sigma_m$. Assim:

$$\left(\frac{S_o}{N_o}\right)_{FM} = 3\beta^2\gamma\left(\frac{\overline{m^2(t)}}{m_p^2}\right) = 3\beta^2\gamma\frac{\sigma_m^2}{(3\sigma_m)^2} = \frac{1}{3}\beta^2\gamma$$

Largura de Banda Média Quadrática

- Existem várias definições de largura de banda para sinais
 - Largura de banda de 3dB
 - Largura de banda essencial
- Para sistemas modulados em ângulo, uma definição mais adequada é a **largura de banda média quadrática**
 - Essa definição é motivada pelo fato do desvio padrão ser uma boa medida da largura de uma fdp
 - A largura de banda média quadrática representa a variância do espectro normalizado (com área unitária)

Largura de Banda Média Quadrática

- A largura de banda média quadrática para um sinal $m(t)$, denotada por $\overline{B_m^2}$ é dada pela seguinte expressão:

$$\overline{B_m^2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 S_m(2\pi f) df}{\int_{-\infty}^{\infty} S_m(2\pi f) df} \text{ Hz} = \frac{1}{\overline{m^2(t)}} \int_{-\infty}^{\infty} f^2 S_m(2\pi f) df \text{ Hz}$$

- Pode-se mostrar que as modulações FM e PM, a largura de banda média quadrática é dada por:

$$\begin{aligned}\overline{B_{FM}^2} &= \frac{1}{4\pi^2} k_f^2 (\overline{m^2(t)}) \\ \overline{B_{PM}^2} &= k_p^2 (\overline{m^2(t)}) \overline{B_m^2}\end{aligned}$$

Largura de Banda Média Quadrática

- A largura de banda real da transmissão pode ser expressada em termos de $\overline{B_{FM}^2}$ e $\overline{B_{PM}^2}$
 - 6 desvios padrões - $B_T = 6\sqrt{\overline{B_{FM}^2}}$ para FM e $B_T = 6\sqrt{\overline{B_{PM}^2}}$ para PM
- A SNR para PM e FM podem ser expressadas em termos das larguras de banda médias quadráticas como:

$$\left(\frac{S_o}{N_o}\right)_{PM} = k_p^2 \overline{m^2(t)} \gamma = \frac{\overline{B_{PM}^2}}{\overline{B_m^2}} \gamma$$

$$\left(\frac{S_o}{N_o}\right)_{FM} = 3 \frac{k_f^2 \overline{m^2(t)}}{(2\pi B)^2} \gamma = 3 \frac{\overline{B_{FM}^2}}{\overline{B^2}} \gamma$$

Largura de Banda Média Quadrática

- Pode-se comparar o desempenho do FM com PM através da seguinte razão

$$\frac{(S_o/N_o)_{PM}}{(S_o/N_o)_{FM}} = \left(\frac{B^2}{3\overline{B_m^2}} \right) \left(\frac{\overline{B_{PM}^2}}{\overline{B_{FM}^2}} \right)$$

- Para a mesma largura de banda de transmissão, tem-se:

$$\frac{(S_o/N_o)_{PM}}{(S_o/N_o)_{FM}} = \left(\frac{B^2}{3\overline{B_m^2}} \right)$$

- Assim PM é superior ao FM se $B^2 > 3\overline{B_m^2}$

Exemplo

Exemplo 12.4

Para um sinal passa-baixas com DEP $S_m(\omega) = \text{rect}(\omega/4\pi B)$, mostre que $\overline{B_m^2} = B^2/3$

Exemplo 12.4 - Solução

$$\overline{B_m^2} = \frac{\int_{-B}^B f^2 df}{\int_{-B}^B df} = \frac{2B^3}{6B} = \frac{B^2}{3}$$

Exemplo

Exemplo 12.5

Para um sinal $m(t)$ com DEP gaussiana $S_m(\omega) = ke^{-\omega^2/2\sigma^2}$, mostre que

$$\overline{B_m^2} = \left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^2$$

Exemplo 12.5 - Solução

Sabe-se que para uma fdp gaussiana com média nula e variância σ^2 , as seguintes condições são verificadas

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} &= 1 \implies \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \sigma\sqrt{2\pi} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} &= \sigma^2 \implies \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \sigma^3\sqrt{2\pi}\end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo 12.5 - Solução

$$\begin{aligned}\overline{B_m^2} &= \frac{k \int_{-\infty}^{\infty} f^2 e^{-\frac{4\pi^2 f^2}{2\sigma^2}} df}{k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{4\pi^2 f^2}{2\sigma^2}} df} (x = 2\pi f) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\sigma^3 \sqrt{2\pi}}{\sigma \sqrt{2\pi}} = \left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^2\end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo 12.6

Se um sinal em banda básica $m(t)$ tem uma DEP gaussiana, mostre que PM é superior a FM por um fator de 3 quando a largura de banda B é 3σ , sendo σ o desvio padrão da DEP normalizada de $m(t)$

Exemplo 12.6 - Solução

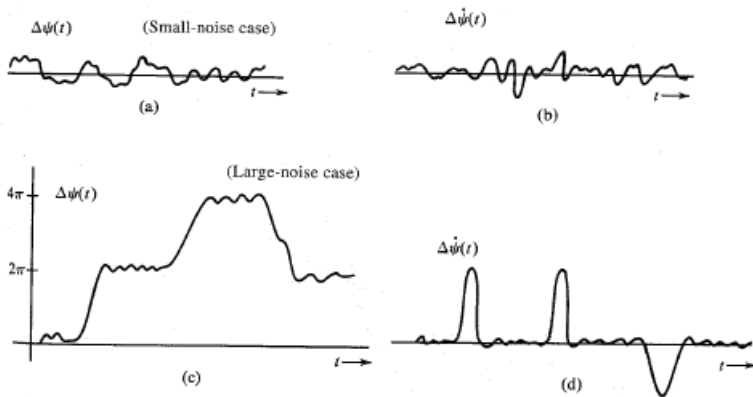
$S_m(\omega) = ke^{-\omega^2/2\sigma^2}$. A largura de banda em radianos
 $W = 2\pi B = 3\sigma \implies B = 3\sigma/(2\pi)$

$$\overline{B_m^2} = \left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^2 \implies \frac{(S_o/N_o)_{PM}}{(S_o/N_o)_{FM}} = \left(\frac{B^2}{3\overline{B_m^2}}\right) = 3$$

Limiar na Modulação em Ângulo

- Na análise realizada para WBFM e WBPM, admitiu-se que o ruído era muito pequeno comparado à amplitude da portadora ($E_n \ll A$)
- Quando o ruído se torna considerável, aumenta a probabilidade do fasor resultante rotacionar em torno da origem
- O resultado disso é o surgimento de picos de ruído na saída do demodulador
- Picos de ruído possuem uma potência considerável em baixas frequências

Limiar na Modulação em Ângulo

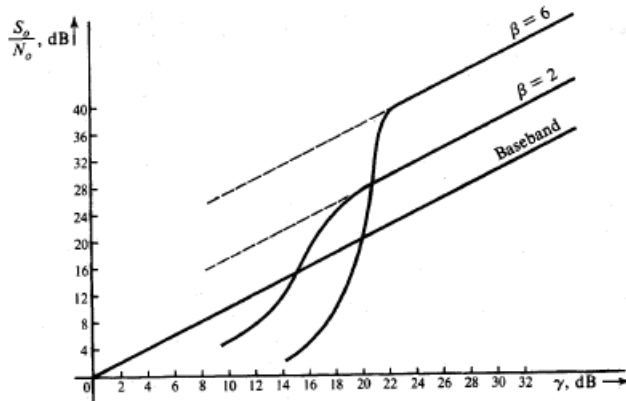


Limiar na Modulação em Ângulo

- Assim, quando E_n se aproxima do valor de A , o ruído na saída cresce desproporcionalmente
- Esse efeito é conhecido como o **efeito do limiar** para a modulação FM
- Abaixo de um certo valor de γ , a relação sinal ruído se deteriora em razão do aumento do ruído na saída
 - Diz-se que o sistema está no limiar
- O valor de γ_{LIMIAR} é dado por:

$$\gamma_{LIMIAR} = 20(\beta + 1)$$

Fenômeno do Limiar em FM



Exemplo

Exemplo 12.7

Um sinal gaussiano $m(t)$ com carregamento (loading) 4σ ($m_p = 4\sigma$) modula em frequência uma portadora usando $\beta = 4$. A SNR de saída obtida é de 20,5dB. Determine se o sistema está no limiar.

Exemplo 12.7 - Solução

Para $\beta = 4$, $\gamma_{LIMIAR} = 20(4 + 1) = 100 = 20dB$. Usando esse valor, obtém-se uma SNR limite de:

$$\left(\frac{S_o}{N_o}\right) = 3(4)^2(100)\frac{1}{4^2} = 300 = 24,77dB$$

Como a SNR de saída (20,5dB) é menor (24,77dB), o sistema está no limiar.