

Princípios de Transmissão Digital

Edmar José do Nascimento
(Princípios de Comunicações)

<http://www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento>

Universidade Federal do Vale do São Francisco

Roteiro

- 1 Introdução
- 2 Análise Espectral
- 3 Formatação de Pulso
- 4 Repetidor Regenerativo
- 5 Probabilidade de Erro
- 6 Extras

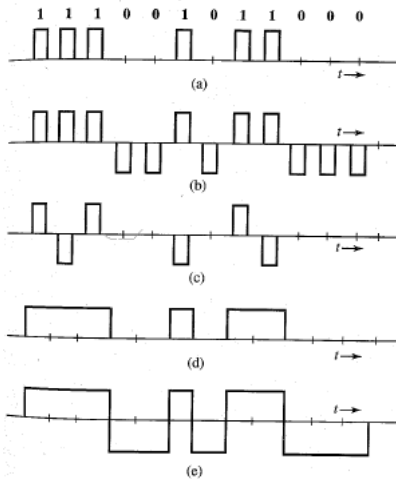
Sistemas de Comunicações Digitais

- Um sistema de comunicação digital em banda básica pode ser representado pelos seguintes componentes:
 - Fonte
 - Multiplexador
 - Codificador de linha
 - Repetidor Regenerativo
- Fonte
 - Seqüência de dígitos (números) provenientes de alguma fonte de informação
 - Seqüência de números binários provenientes de algum tipo de PCM binário

Sistemas de Comunicações Digitais

- Multiplexador
 - Combina várias fontes de dados através de intercalamento
- Codificador de linha
 - Codifica a saída do multiplexador (seqüência de números) em formas de onda elétricas
 - Vários tipos de codificação são possíveis: on-off, polar, bipolar, etc.
 - Além disso, a largura do pulso também pode ser levada em conta
 - No esquema NRZ (nonreturn-to-zero), o pulso ocupa toda a largura do bit
 - No esquema RZ (return-to-zero), o pulso se anula antes do intervalo do bit seguinte

Códigos de Linha

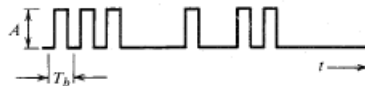


Sistemas de Comunicações Digitais

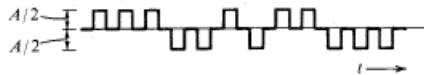
- Repetidor Regenerativo

- São usados ao longo da linha de transmissão com o objetivo de regenerar o sinal
- Evita o acúmulo de ruído
- Para que o repetidor funcione, é necessário que ele disponha do sinal de relógio
- O sinal de relógio pode ser inserido no próprio sinal se o código de linha for adequadamente escolhido
- O relógio pode ser extraído usando-se um circuito ressonante sintonizado na frequência do relógio

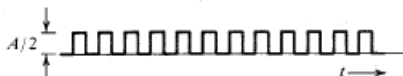
Repetidor Regenerativo



(a)



(b) Random component



(c) Periodic component

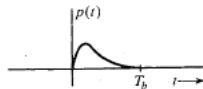
Codificação de Linha

- Um código de linha é escolhido de modo a satisfazer algumas propriedades:
 - A largura de banda de transmissão deve ser a menor possível
 - Para uma dada largura de banda e uma dada probabilidade de erro, a potência transmitida deve ser a menor possível
 - Deve propiciar a detecção ou a correção de erros
 - Deve possuir nível DC nulo para evitar problemas nos repetidores
 - Deve incluir a informação de relógio nos dados transmitidos
 - Deve ser transparente, ou seja, deve ser capaz de transmitir dados corretamente independente do padrão dos dados transmitidos

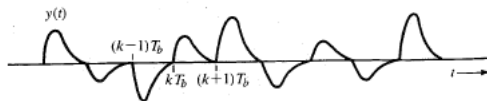
Densidade Espectral de Potência

- Com o método descrito a seguir, pode-se analisar as características espectrais de diversos códigos de linha
- Considera-se que os pulsos são espaçados de T_b segundos (T_b - Tempo de bit)
- A taxa de transmissão é dada por $R_b = 1/T_b$ pulsos por segundo
- O pulso básico é denotado por $p(t)$ e a sua transformada de Fourier por $P(\omega)$
- A informação é representada por uma seqüência de pulsos $a_k p(t)$ denotada por $y(t)$
 - Os códigos de linha on-off, polar e bipolar são casos especiais em que $a_k \in \{-1, 0, 1\}$ com restrições na forma do pulso básico

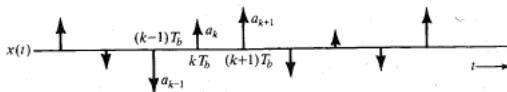
Densidade Espectral de Potência



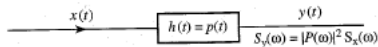
(a)



(b)



(c)



(d)

Densidade Espectral de Potência

- O trem de pulsos $y(t)$ pode ser representado como a saída de um sistema linear tendo como entrada impulsos de área a_k e resposta ao impulso $h(t) = p(t)$
- Nesse caso, a DEP de $y(t)$ é dada por:

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega) = |P(\omega)|^2 S_x(\omega)$$

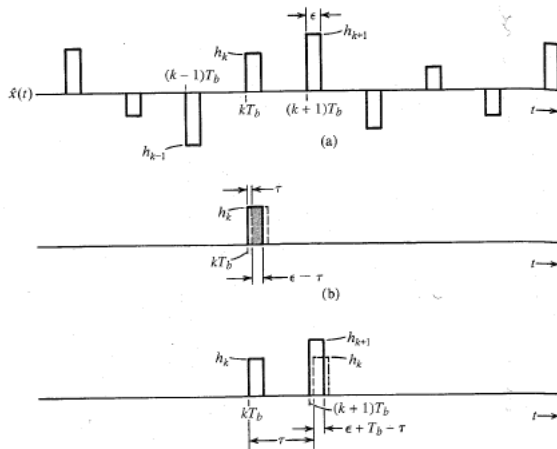
- Em que,

$$S_x(\omega) = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_x(\tau)\}$$

- A autocorrelação de $x(t)$ pode ser calculada considerando-se uma aproximação dos impulsos por pulsos retangulares de largura ϵ e altura h_k

$$\epsilon h_k = a_k$$

Densidade Espectral de Potência



Densidade Espectral de Potência

- Sendo $\hat{x}(t)$ o trem de pulsos retangulares correspondente ao trem de impulsos $x(t)$, então:

$$\mathcal{R}_{\hat{x}}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \hat{x}(t) \hat{x}(t - \tau) dt$$

- Se $\tau < \epsilon$, então:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\hat{x}} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_k h_k^2(\epsilon - \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_k a_k^2 \left(\frac{\epsilon - \tau}{\epsilon^2} \right) \\ &= \frac{R_0}{\epsilon T_b} \left(1 - \frac{\tau}{\epsilon} \right), \quad R_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_b}{T} \sum_k a_k^2 \end{aligned}$$

Densidade Espectral de Potência

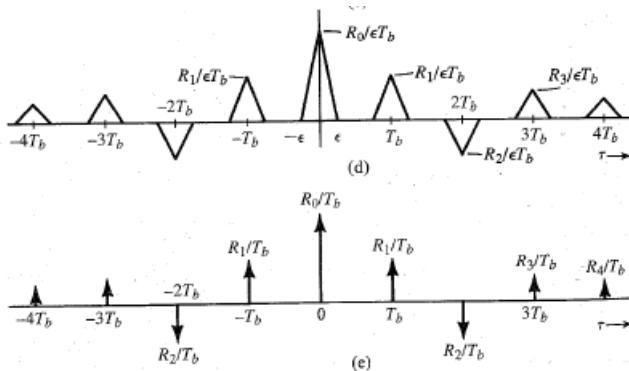
- Em um intervalo de duração T , há $N = T/T_b$ pulsos espaçados a cada T_b segundos, logo:

$$R_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_k a_k^2 = E[a_k^2]$$

- Como $\mathcal{R}_{\hat{x}}(\tau)$ é uma função par de τ , então:

$$\mathcal{R}_{\hat{x}} = \frac{R_0}{\epsilon T_b} \left(1 - \frac{|\tau|}{\epsilon} \right), \quad |\tau| < \epsilon$$

Densidade Espectral de Potência



Densidade Espectral de Potência

- Quando τ se aproxima de T_b , o k -ésimo pulso de $\hat{x}(t - \tau)$ começa a se sobrepor ao $(k+1)$ -ésimo pulso de $\hat{x}(t)$
- De modo similar, $\mathcal{R}_{\hat{x}}(\tau)$ será dado por um pulso triangular de largura 2ϵ e altura $R_1/\epsilon T_b$, com

$$R_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_b}{T} \sum_k a_k a_{k+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_k a_k a_{k+1} = E[a_k a_{k+1}]$$

- Resultados semelhantes, são obtidos para $\tau = 2T_b, 3T_b, \dots$, de modo que:

$$R_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_b}{T} \sum_k a_k a_{k+n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_k a_k a_{k+n} = E[a_k a_{k+n}]$$

Densidade Espectral de Potência

- No limite, quando $\epsilon \rightarrow 0$, $\mathcal{R}_{\hat{x}}(\tau) \rightarrow \mathcal{R}_x(\tau)$
- Os pulsos triangulares tendem a impulsos de área R_n/T_b e assim:

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \frac{1}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \delta(\tau - nT_b)$$

- A DEP de $x(t)$ é dada então por:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n e^{-jn\omega T_b} = \frac{1}{T_b} \left(R_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} R_n \cos n\omega T_b \right)$$

Densidade Espectral de Potência

- Assim, a DEP de $y(t)$ é dada por:

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= |P(\omega)|^2 S_x(\omega) = \frac{|P(\omega)|^2}{T_b} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n e^{-jn\omega T_b} \right) \\ &= \frac{|P(\omega)|^2}{T_b} \left(R_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} R_n \cos n\omega T_b \right) \end{aligned}$$

- Para cada código de linha, tem-se um $P(\omega)$ e um R_n específico que permitem calcular a DEP de $y(t)$

DEP para Sinalização Polar

- Na sinalização polar tem-se:
 - 1 é transmitido por $p(t)$ ($a_k = 1$)
 - 0 é transmitido por $-p(t)$ ($a_k = -1$)
- Logo,

$$R_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_k a_k^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} (N) = 1$$

- Como a_k e a_{k+n} podem assumir ± 1 , o produto $a_k a_{k+n}$ assume $+1$ ou -1 com igual possibilidade, assim:

$$R_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_k a_k a_{k+n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left[\frac{N}{2} (1) + \frac{N}{2} (-1) \right] = 0$$

DEP para Sinalização Polar

- Assim, para a sinalização polar, a DEP é dada por:

$$S_y(\omega) = \frac{|P(\omega)|^2}{T_b} R_0 = \frac{|P(\omega)|^2}{T_b}$$

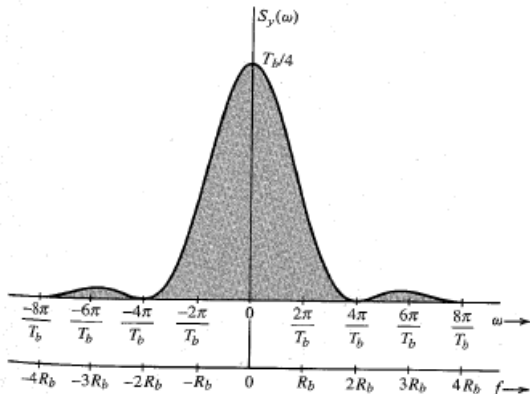
- Se o pulso $p(t)$ for um pulso retangular de largura $T_b/2$ (RZ), ou seja

$$p(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T_b/2}\right) \Longleftrightarrow P(\omega) = \frac{T_b}{2} \text{sinc}\left(\frac{\omega T_b}{4}\right)$$

- Então:

$$S_y(\omega) = \frac{T_b}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T_b}{4}\right)$$

DEP para Sinalização Polar



DEP para Sinalização Polar

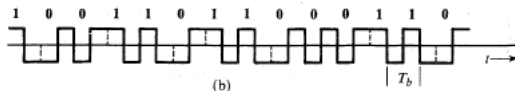
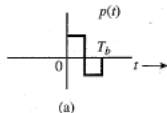
- Observa-se que a banda essencial é $2R_b$
- Mas, para transmitir R_b bits por segundo é necessário no mínimo $R_b/2$ Hz
 - Largura de banda da sinalização polar RZ é quatro vezes maior que a mínima teórica
 - Na sinalização polar NRZ, a banda essencial é R_b , resultando em uma banda duas vezes maior que a mínima teórica
 - Não é eficiente do ponto de vista espectral
- A sinalização polar não permite a detecção de erros
- O nível DC na DEP não é nulo, o que inviabiliza o acoplamento AC
- Como pontos positivos, a sinalização polar leva vantagem nos requisitos de potência e na transparência

Densidade Espectral de Potência

- Para que a DEP de um código de linha, $S_y(\omega)$ tenha nível DC nulo, deve-se ter:

$$P(0) = 0 \implies \int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = 0$$

- Ou seja, a área do pulso deve ser nula
 - Sinalização Manchester (Split-phase)



DEP para a Sinalização On-Off

- Na sinalização on-off tem-se:
 - 1 é transmitido por $p(t)$ ($a_k = 1$)
 - 0 é transmitido por nenhum pulso ($a_k = 0$)
- Logo,

$$R_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left[\frac{N}{2}(1) + \frac{N}{2}(0) \right] = \frac{1}{2}$$

- Como a_k e a_{k+n} podem assumir 1 ou 0, o produto $a_k a_{k+n}$ assume 1×1 , 1×0 , 0×1 ou 0×0 com igual possibilidade, assim:

$$R_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left[\frac{N}{4}(1) + \frac{3N}{4}(0) \right] = \frac{1}{4}$$

DEP para a Sinalização On-Off

- Assim, para a sinalização polar, a DEP de $x(t)$ é dada por:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{4T_b} + \frac{1}{4T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\omega T_b}$$

- Usando a fórmula abaixo

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\omega T_b} = \frac{2\pi}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T_b}\right)$$

- Tem-se que:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{4T_b} + \frac{2\pi}{4T_b^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T_b}\right)$$

DEP para a Sinalização On-Off

- Então, a DEP de $y(t)$ é:

$$S_y(\omega) = \frac{|P(\omega)|^2}{4T_b} \left[1 + \frac{2\pi}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T_b}\right) \right]$$

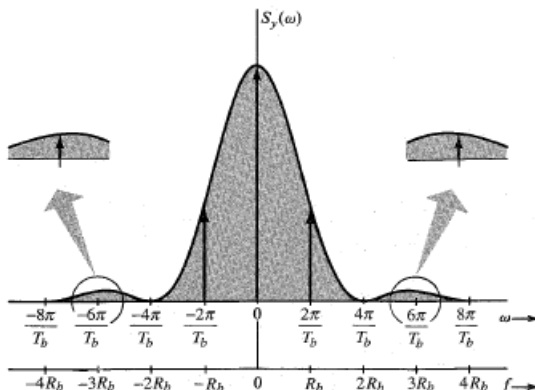
- Se o pulso $p(t)$ for um pulso retangular de largura $T_b/2$ (RZ), ou seja

$$p(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T_b/2}\right) \iff P(\omega) = \frac{T_b}{2} \text{sinc}\left(\frac{\omega T_b}{4}\right)$$

- Então:

$$S_y(\omega) = \frac{T_b}{16} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T_b}{4}\right) \left[1 + \frac{2\pi}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T_b}\right) \right]$$

DEP para a Sinalização On-Off



DEP para Sinalização On-Off

- Observa-se que a banda essencial é $2R_b$
 - Assim como a sinalização polar, a sinalização on-off não é eficiente do ponto de vista espectral
- O espectro apresenta componentes discretas periódicas de frequência R_b Hz
- A sinalização on-off não permite a detecção de erros
- O nível DC na DEP não é nulo, o que inviabiliza o acoplamento AC
- Não é transparente e é menos imune a interferências que a sinalização polar

DEP para a Sinalização Bipolar

- Na sinalização bipolar (pseudo-ternária) tem-se:
 - 1 é transmitido por $p(t)$ ou $-p(t)$ ($a_k = \pm 1$)
 - 0 é transmitido por nenhum pulso ($a_k = 0$)
- Logo,

$$R_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left[\frac{N}{2} (\pm 1)^2 + \frac{N}{2} (0) \right] = \frac{1}{2}$$

- A seqüência (a_k, a_{k+1}) pode assumir os valores $(1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)$, assim:

$$R_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left[\frac{N}{4} (-1) + \frac{3N}{4} (0) \right] = -\frac{1}{4}$$

DEP para a Sinalização Bipolar

- De modo similar, a seqüência (a_k, a_{k+2}) pode assumir os valores $(1, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, 0)$, assim:

$$R_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left[\frac{N}{8}(-1) + \frac{N}{8}(1) + \frac{6N}{8}(0) \right] = 0$$

- Em geral, para $n > 1$, tem-se que:

$$R_n = 0$$

DEP para a Sinalização Bipolar

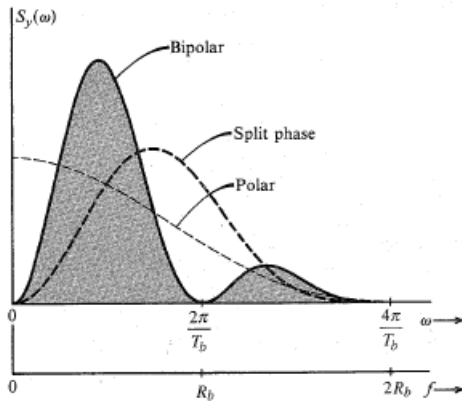
- Então, a DEP de $y(t)$ é:

$$S_y(\omega) = \frac{|P(\omega)|^2}{2T_b} [1 - \cos \omega T_b] = \frac{|P(\omega)|^2}{T_b} \sin^2 \frac{\omega T_b}{2}$$

- Observa-se que $S_y(\omega) = 0$ para $\omega = 0$, independentemente do valor de $P(\omega)$
- A banda essencial é R_b Hz
- Para o pulso RZ, tem-se:

$$S_y(\omega) = \frac{T_b}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T_b}{4}\right) \sin^2\left(\frac{\omega T_b}{2}\right)$$

DEP para a Sinalização Bipolar



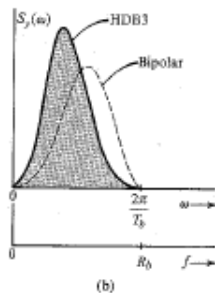
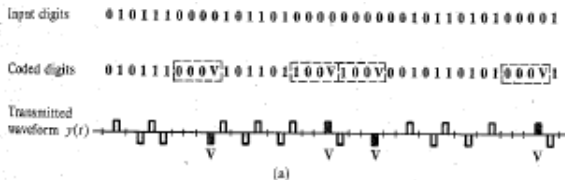
DEP para Sinalização Bipolar

- Observa-se que a banda essencial é R_b
 - Metade do valor obtido para as sinalizações polar e on-off
- A sinalização bipolar tem espectro nulo no nível DC e permite a detecção de erros
- Como desvantagens, a sinalização bipolar requer mais potência que a sinalização polar e também não é transparente
 - Esquemas de substituição são necessários: HDB e B8ZS

Sinalização HDB

- Para eliminar o problema da não transparência da sinalização bipolar, utiliza-se o esquema de substituição HDB (High-density bipolar)
 - Quando $N + 1$ zeros sucessivos ocorrem, eles são substituídos por uma seqüência de dígitos especiais
- No HDB3, as seqüências são:
 - 000V e B00V (B=1 conforme a regra bipolar e V=1 contrariando a regra bipolar)
- A seqüência B00V é escolhida se há um número par de 1s após a última seqüência especial
- A seqüência 000V é escolhida se há um número ímpar de 1s após a última seqüência especial

Sinalização HDB



Formatação de Pulso (Pulse Shaping)

- Além do código de linha, a DEP $S_y(\omega)$ é fortemente dependente da forma do pulso, pois ela contém o termo $|P(\omega)|^2$
- Para os pulsos retangulares vistos anteriormente, a largura de banda é infinita, embora a banda essencial se situe entre R_b e $2R_b$
- A porção do espectro acima da banda essencial é suprimida quando o sinal é transmitido através de um canal com largura de banda finita
 - Os pulsos são espalhados para além do intervalo do bit (efeito de dispersão)
 - Os pulsos passam então a interferir nos pulsos vizinhos dando origem à **Interferência Intersimbólica** (ISI - Intersymbol Interference)

Interferência Intersimbólica

- Pulsos limitados no tempo possuem espectro infinito
- Pulsos limitados em frequência não são limitados no tempo
- A solução para esse problema é evitar a interferência nos instantes de decisão apenas
 - No instante em que se precisa saber se o pulso representa um 0 ou 1
- Para eliminar a ISI, os pulsos devem verificar os critérios propostos por Nyquist

Critério de Nyquist para ISI Nula

- A ISI nula é alcançada escolhendo-se um pulso que tem amplitude não nula no centro e nula nos instantes $t = \pm nT_b (n = 1, 2, 3, \dots)$, sendo $T_b = 1/R_b$ a separação entre pulsos sucessivos

$$p(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t = \pm nT_b \end{cases}$$

- Para transmitir R_b bits/s é necessário no mínimo $R_b/2\text{Hz}$
- Essa banda mínima é alcançada com um pulso $p(t) = \text{sinc}(\pi R_b t)$

Critério de Nyquist para ISI Nula

- $p(t) = \text{sinc}(\pi R_b t)$ satisfaz o critério de Nyquist, pois

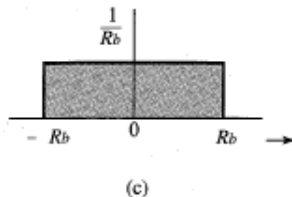
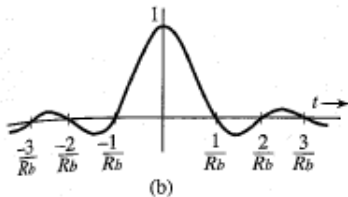
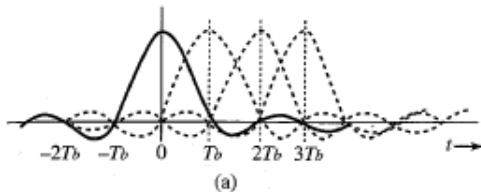
$$\text{sinc}(\pi R_b t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t = \pm nT_b \end{cases}$$

- Além disso,

$$P(\omega) = \frac{1}{R_b} \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi R_b}\right)$$

- Este pulso tem então uma banda de πR_b rad/s ou $R_b/2$ Hz, que é a banda teórica mínima necessária para a transmissão

Critério de Nyquist para ISI Nula

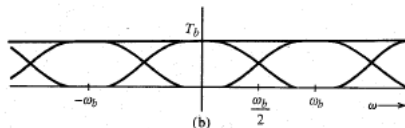
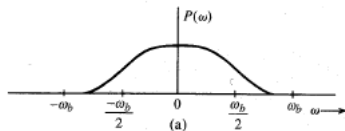


Critério de Nyquist para ISI Nula

- O pulso sinc apresenta alguns problemas que impedem a sua utilização:
 - Seria necessário um tempo infinito para gerá-lo
 - Uma versão truncada desse pulso possui uma banda maior
 - A sua taxa de decaimento é lenta ($1/t$), o que causaria problemas se a taxa de amostragem variar um pouco
 - Em resumo, o sinc só pode ser usado se tudo ocorre perfeitamente
- A solução é usar pulsos que decaem mais rapidamente

Critério de Nyquist para ISI Nula

- O pulso $p(t) \iff P(\omega)$ com largura de banda no intervalo $(R_b/2, R_b)$ satisfaz o critério de Nyquist



- Se esse pulso é amostrado a cada T_b segundos por um trem de impulsos, então:

$$\bar{p}(t) = p(t)\delta_{T_b}(t) = \delta(t)$$

Critério de Nyquist para ISI Nula

- O espectro do sinal amostrado $\bar{p}(t)$ satisfaz a relação:

$$\bar{G}(\omega) = \frac{1}{T_b} \sum_{-\infty}^{\infty} P(\omega - n\omega_b) = 1$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} P(\omega - n\omega_b) = T_b$$

- Na faixa $0 < \omega < \omega_b$, apenas os termos $P(\omega)$ e $P(\omega - \omega_b)$ estão presentes no somatório, logo

$$P(\omega) + P(\omega - \omega_b) = T_b, \quad 0 < \omega < \omega_b$$

Critério de Nyquist para ISI Nula

- Fazendo $\omega = x + \omega_b/2$, então

$$P\left(x + \frac{\omega_b}{2}\right) + P\left(x - \frac{\omega_b}{2}\right) = T_b, \quad |x| < \frac{\omega_b}{2}$$

- Usando o fato de que para sinais reais, $G(\omega) = G^*(-\omega)$, então

$$P\left(x + \frac{\omega_b}{2}\right) + P^*\left(\frac{\omega_b}{2} - x\right) = T_b, \quad |x| < \frac{\omega_b}{2}$$

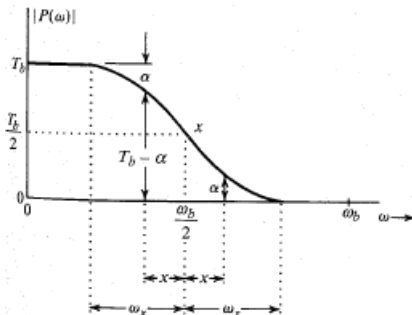
- Se $P(\omega) = |P(\omega)|e^{-j\omega t_d}$, então $e^{-j\omega t_d}$ representa um termo de atraso puro e apenas $|P(\omega)|$ necessita satisfazer a relação anterior

Critério de Nyquist para ISI Nula

- Sendo assim, chega-se a seguinte expressão:

$$|P\left(\frac{\omega_b}{2} + x\right)| + |P\left(\frac{\omega_b}{2} - x\right)| = T_b, \quad |x| < \frac{\omega_b}{2}$$

- O espectro de $p(t)$ satisfazendo a relação obtida é mostrado abaixo



Critério de Nyquist para ISI Nula

- De acordo com a figura, a largura de banda de $P(\omega)$ é $(\omega_b/2) + \omega_x$, sendo ω_x o excesso de banda, então:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\text{Excesso de Largura de Banda}}{\text{Largura de Banda Teórica Mínima}} \\ &= \frac{\omega_x}{\omega_b/2} = \frac{2\omega_x}{\omega_b} \end{aligned}$$

- r é chamado de **fator de roll-off** e é representado muitas vezes percentualmente
- Como $\omega_x < \omega_b/2$, então $0 < r < 1$, além disso:

$$B_T = \frac{R_b}{2} + r \frac{R_b}{2} = \frac{(1+r)R_b}{2}$$

Critério de Nyquist para ISI Nula

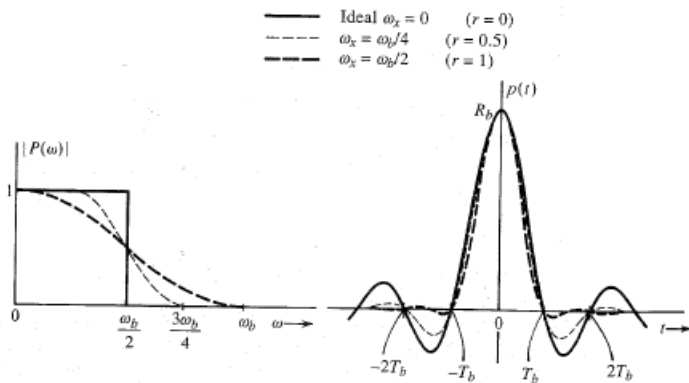
- Como o espectro desses pulsos possuem um decaimento gradual, eles podem ser aproximados facilmente por filtros práticos
- Uma família de espectros que satisfazem o critério de Nyquist é dada por:

$$P(\omega) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sin \left(\frac{\pi[\omega - (\omega_b/2)]}{2\omega_x} \right) \right\}, & |\omega - \frac{\omega_b}{2}| < \omega_x \\ 0, & |\omega| > \frac{\omega_b}{2} + \omega_x \\ 1, & |\omega| < \frac{\omega_b}{2} - \omega_x \end{array} \right\}$$

- Observa-se que quanto maior o ω_x , maior é o decaimento do espectro

Critério de Nyquist para ISI Nula

- Pulsos satisfazendo o critério de Nyquist



Critério de Nyquist para ISI Nula

- Para o valor máximo de ω_x , ou seja $\omega_x = \omega_b/2$, o pulso resultante é chamado **cosseno levantado** (raised-cosine)
- O espectro do pulso cosseno levantado é dado por:

$$\begin{aligned}P(\omega) &= \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\omega}{2R_b} \right) \text{rect} \left(\frac{\omega}{4\pi R_b} \right) \\&= \cos^2 \left(\frac{\omega}{4R_b} \right) \text{rect} \left(\frac{\omega}{4\pi R_b} \right)\end{aligned}$$

- A sua expressão no tempo é dada por:

$$p(t) = R_b \frac{\cos \pi R_b t}{1 - 4R_b^2 t^2} \text{sinc}(\pi R_b t)$$

Critério de Nyquist para ISI Nula

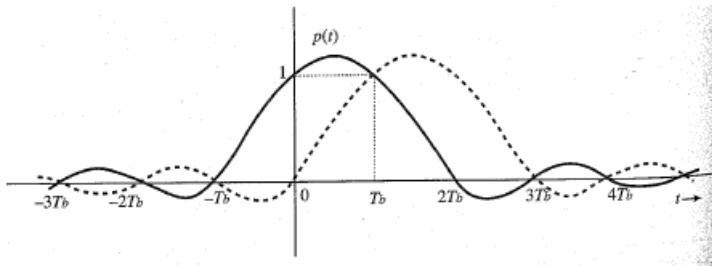
- O pulso cosseno levantado possui as seguintes características:
 - A sua taxa de decaimento é de $1/t^3$, ou seja, ele decai rapidamente
 - Ele se anula não apenas nos instantes de amostragem, mas nos pontos médios entre os instantes de amostragem
 - É bastante insensível ao jitter e a variações na taxa de amostragem e na taxa de transmissão
- É importante ressaltar que as condições para ISI nula se referem a todo o processo de transmissão (transmissor, canal e receptor)
- Se o canal introduzir ISI, esta deve ser cancelada por meio de equalizadores

Sinalização com ISI Controlada

- O preço pago pela ISI nula é a utilização de uma banda superior à banda teórica mínima
- Para reduzir a banda é necessário alargar o pulso, o que pode causar ISI com os pulsos vizinhos
- Para sistemas binários essa ISI pode ser tolerada, pois só existem dois padrões de interferência
- Considerando-se o pulso especificado por:

$$p(nT_b) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & n = 0, 1 \\ 0, & \text{para outro } n \end{array} \right\}$$

Sinalização com ISI Controlada



Sinalização com ISI Controlada

- Utilizando a sinalização polar com este pulso
 - 1 transmitido por $p(t)$
 - 0 transmitido por $-p(t)$
- Nesse esquema, o pulso interfere com o seu vizinho, mas mesmo assim é possível recuperar a informação
 - Se dois pulsos sucessivos são positivos então o valor em T_b (ponto de interferência) é 2
 - Se dois pulsos sucessivos são negativos então o valor em T_b é -2
 - Se dois pulsos sucessivos são de polaridade oposta então o valor em T_b é 0

Sinalização com ISI Controlada

- Pode-se então criar a seguinte regra de decisão:
 - Se o valor da amostra é positivo, o bit atual é 1 e o anterior é 1 também
 - Se o valor da amostra é negativo, o bit atual é 0 e o anterior é 0 também
 - Se o valor da amostra é zero, o bit atual é o complemento do bit anterior

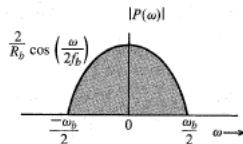
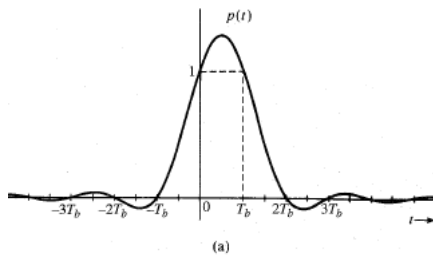
Transmitted sequence	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1
Samples of $x(t)$	1	2	0	0	2	0	-2	-2	0	0	0	2	2
Detected sequence	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1

Sinalização com ISI Controlada

- Este esquema de ISI controlada é o segundo método proposto por Nyquist para lidar com a ISI
- Este esquema também é conhecido como esquema correlativo ou de resposta parcial
- Um pulso que satisfaz este critério é chamado de **pulso duobinário** (duobinary pulse)
- O pulso duobinário é dado por:

$$p(t) = \frac{\sin(\pi R_b t)}{\pi R_b t (1 - R_b t)}$$
$$P(\omega) = \frac{2}{R_b} \cos\left(\frac{\omega}{2R_b}\right) \text{rect}\left(\frac{\omega}{2R_b}\right) e^{-j\frac{\omega}{2R_b}}$$

Pulso Duobinário

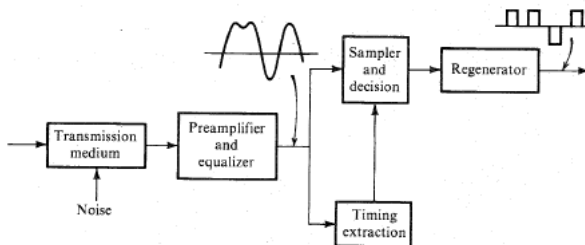


Sinalização com ISI Controlada

- Este esquema de ISI controlada permite a transmissão de dados a R_b bits/s com a banda teórica mínima de $R_b/2$ Hz
- O pulso duobinário não é causal e portanto não é fisicamente realizável
- O pulso decai rapidamente ($1/t^2$) e pode ser aproximado com precisão
- No esquema com ISI controlada pode haver propagação de erros, pois a interpretação do bit atual depende do resultado anterior
 - Esse problema pode ser corrigido usando a codificação diferencial

Repetidor Regenerativo

- Um repetidor regenerativo executa três funções básicas:
 - Reformatar os pulsos que chegam através de um equalizador
 - Extrair a informação de relógio
 - Tomar decisões baseado nas amostras dos pulsos



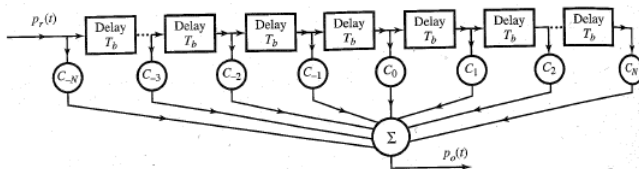
Pré-amplificação e Equalização

- O meio de transmissão atenua e distorce um trem de pulsos
- A atenuação pode ser compensada por um pré-amplificador
- A distorção do canal causa dispersão dos pulsos
- Um equalizador deve ser capaz de desfazer os efeitos do canal restaurando a forma dos pulsos dispersos
- Como a dispersão é causada pela atenuação de certas componentes do sinal, um ganho nessas componentes restauraria o sinal, mas aumentaria o ruído (amplificação do ruído)
- Assim, o projeto de um equalizador tem que representar um compromisso entre reduzir a ISI e reduzir o ruído do canal

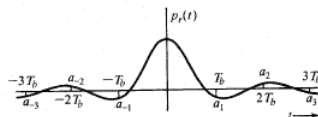
Equalização

- Como a decisão sobre qual bit foi transmitido é realizada nos instantes de amostragem, o equalizador necessita apenas minimizar ou anular a ISI nesses instantes
 - A saída do equalizador deve satisfazer os critérios de Nyquist
- Isto pode ser feito usando um filtro equalizador transversal

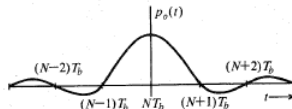
Equalização



(a)



(b)



(c)

Equalização

- Para atender ao critério de Nyquist, o pulso na saída do equalizador $p_o(t)$ deve ser nulo nos múltiplos de T_b
- A saída do equalizador $p_o(t)$ é expressa em função da entrada $p_r(t)$ por:

$$p_o(t) = \sum_{n=-N}^N c_n p_r(t - nT_b)$$

- Nos instantes de amostragem, $p_o(t)$ é dada por:

$$p_o(kT_b) = \sum_{n=-N}^N c_n p_r[(k - n)T_b], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Equalização

- Reescrevendo $p_o(t)$ em uma notação mais conveniente, tem-se:

$$p_o[k] = \sum_{n=-N}^N c_n p_r[k-n], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- Segundo o critério de Nyquist, $p_o[k] = 0$ para $k \neq 0$ e $p_o[k] = 1$ para $k = 0$
- Substituindo-se esses valores na equação anterior, obtém-se um conjunto de equações com $2N + 1$ variáveis
- Esse sistema de equações pode ser melhor visualizado a partir de uma representação matricial

Representação Matricial do Equalizador

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_r[0] & p_r[-1] & \dots & p_r[-2N] \\ p_r[1] & p_r[0] & \dots & p_r[-2N+1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_r[N-1] & p_r[N-2] & \dots & p_r[-N-1] \\ p_r[N] & p_r[N-1] & \dots & p_r[-N] \\ p_r[N+1] & p_r[N] & \dots & p_r[-N+1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_r[2N-1] & p_r[2N-2] & \dots & p_r[1] \\ p_r[2N] & p_r[2N-1] & \dots & p_r[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{-N} \\ c_{-N+1} \\ \dots \\ c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_{N-1} \\ c_N \end{bmatrix}$$

Equalização

Exemplo 7.3

Para o pulso recebido $p_r(t)$ da figura anterior, seja

$$a_0 = p_r[0] = 1$$

$$a_1 = p_r[1] = -0,3; a_2 = p_r[2] = 0,1$$

$$a_{-1} = p_r[-1] = -0,2; a_{-2} = p_r[-2] = 0,05$$

Projete um equalizador de três pontos de tomada (tap) - $N = 1$

Equalização

Solução - Exemplo 7.3

Substituindo os valores, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0,2 & 0,05 \\ -0,3 & 1 & -0,2 \\ 0,1 & -0,3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

A solução desse sistema resulta em $c_{-1} = 0,210$, $c_0 = 1,13$ e $c_1 = 0,318$.

Diagrama do Olho

- As degradações sofridas pelos pulsos e a ISI podem ser visualizadas em um osciloscópio através do diagrama do olho
 - A saída do canal é aplicada na entrada vertical e a base de tempo é gatilhada na mesma taxa de chegada dos pulsos
- O diagrama do olho mostra a superposição dos pulsos em uma mesma tela
- O ponto de maior abertura vertical é o instante ótimo de amostragem
- A ISI sem equalização tende a fechar o olho
- Quanto mais aberto o olho, maior a tolerância a ruído

Diagrama do Olho

- Na figura abaixo, o canal é ideal e os pulsos não apresentam distorção, resultando em um olho totalmente aberto para os pulsos retangulares e em um olho com abertura máxima no centro para o outro formato

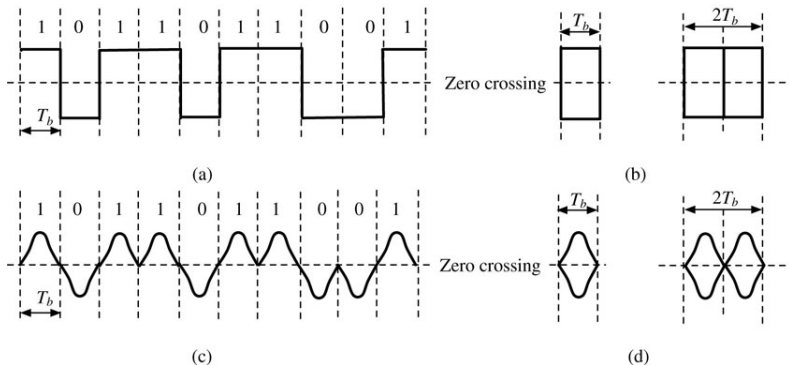


Diagrama do Olho

- Na figura abaixo, o canal causa distorção ou é limitado em banda
- Nesse caso, os pulsos recebidos são arredondados, distorcidos e espalhados e olho não está mais completamente aberto no centro

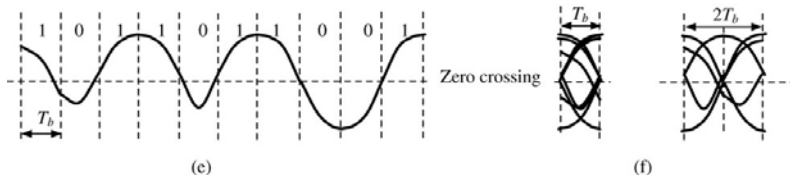
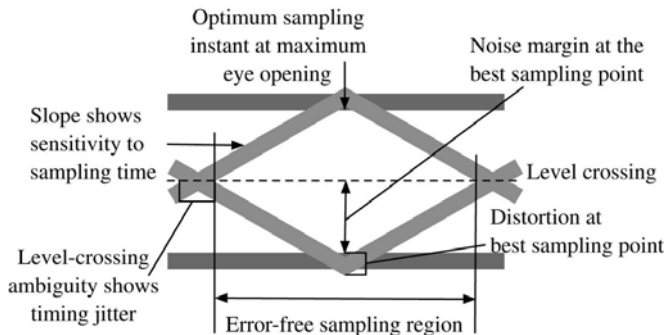


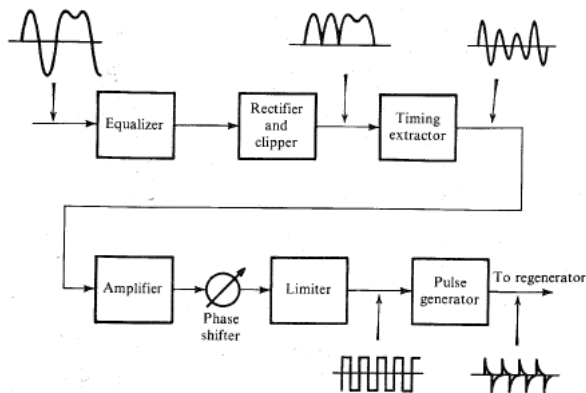
Diagrama do Olho



Extração do Relógio

- Para que o sinal seja amostrado nos instantes de tempo exatos, é necessário que o receptor esteja em sincronismo com o relógio do transmissor
- É possível usar três métodos de sincronização:
 - Tanto o transmissor quanto o receptor recebem o sinal de sincronismo de uma fonte principal - método com maior custo destinado a sistemas com grandes volumes de dados
 - O transmissor envia um sinal de sincronização em separado para o receptor (piloto de relógio) - método usado quando há banda disponível
 - Auto-sincronização a partir da extração do sinal de relógio contida na informação

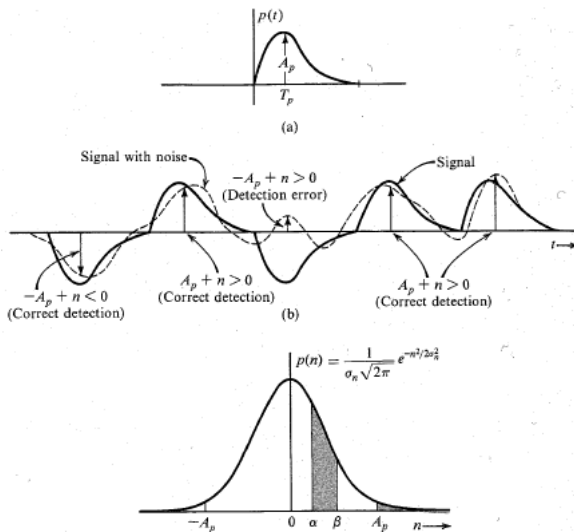
Extração do Relógio para a Sinalização Polar



Probabilidade de Erro de Detecção

- No receptor, o sinal recebido consiste no sinal enviado mais um termo de ruído
 - O ruído é aleatório e depende das características do canal
- Na ausência de ruído, o processo de amostragem resulta na correta recuperação da informação enviada
- Se o ruído for considerável, a decisão tomada a partir do valor da amostra pode ser errada
 - Erro de detecção
 - Como o ruído é aleatório, pode-se calcular a probabilidade do erro de detecção ocorrer

Efeito do Ruído na Sinalização Polar



Probabilidade de Erro para a Sinalização Polar

- Um modelo muito usado para o ruído é o modelo gaussiano
- No modelo gaussiano, o ruído é representado por uma variável aleatória n com função densidade de probabilidade (fdp) dada por:

$$p(n) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}}$$

- Sendo A_p a amplitude do pulso positivo (1) e $-A_p$ a amplitude do pulso negativo (0) no instante de amostragem
 - Um erro ocorre se ao transmitir o bit 0, a amostra obtida $-A_p + n > 0$, ou seja, $n > A_p$
 - Um erro ocorre se ao transmitir o bit 1, a amostra obtida $A_p + n < 0$, ou seja, $n < -A_p$

Probabilidade de Erro para a Sinalização Polar

- Sendo ϵ o evento erro de detecção, então:

$$P(\epsilon|0) = P(n > A_p)$$

$$P(\epsilon|1) = P(n < -A_p)$$

- Assim, se n possui distribuição gaussiana, tem-se:

$$\begin{aligned} P(\epsilon|0) &= \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \int_{A_p}^{\infty} e^{-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}} dn = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{A_p/\sigma_n}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= Q\left(\frac{A_p}{\sigma_n}\right) \end{aligned}$$

- Sendo $Q(y)$ definido por:

$$Q(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Probabilidade de Erro para a Sinalização Polar

- $Q(y)$ é em geral tabelado ou pode ser aproximado por:

$$Q(y) \simeq \frac{1}{y\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{0,7}{y^2}\right) e^{-y^2/2}, \quad y > 2$$

- Analogamente, $P(\epsilon|1)$ é calculado como:

$$\begin{aligned} P(\epsilon|1) &= \frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-A_p} e^{-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}} dn = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-A_p/\sigma_n} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{A_p/\sigma_n}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = Q\left(\frac{A_p}{\sigma_n}\right) \end{aligned}$$

Probabilidade de Erro para a Sinalização Polar

- Admitindo-se que o bit 0 e o bit 1 possuem a mesma probabilidade de serem enviados, a probabilidade de erro $P(\epsilon)$ é dada por:

$$\begin{aligned}P(\epsilon) &= P(\epsilon|0)P(0) + P(\epsilon|1)P(1) \\&= \frac{1}{2}[P(\epsilon|0) + P(\epsilon|1)] = Q\left(\frac{A_p}{\sigma_n}\right)\end{aligned}$$

Probabilidade de Erro para a Sinalização On-Off

- Para a sinalização On-Off, A_p é a amplitude do pulso correspondente ao (1) e o (0) é representado por nenhum pulso
 - O limiar de decisão é $A_p/2$ (ponto médio entre 0 e A_p)
 - Um erro ocorre se ao transmitir o bit 0, a amostra obtida $0 + n > A_p/2$, ou seja, $n > A_p/2$
 - Um erro ocorre se ao transmitir o bit 1, a amostra obtida $A_p + n < A_p/2$, ou seja, $n < -A_p/2$
- Assim,

$$P(\epsilon|0) = P(n > \frac{A_p}{2}) = Q\left(\frac{A_p}{2\sigma_n}\right)$$

$$P(\epsilon|1) = P(n < -\frac{A_p}{2}) = Q\left(\frac{A_p}{2\sigma_n}\right)$$

Probabilidade de Erro para a Sinalização On-Off

- Admitindo-se que o bit 0 e o bit 1 possuem a mesma probabilidade de serem enviados, a probabilidade de erro $P(\epsilon)$ é dada por:

$$\begin{aligned}P(\epsilon) &= P(\epsilon|0)P(0) + P(\epsilon|1)P(1) \\&= \frac{1}{2}[P(\epsilon|0) + P(\epsilon|1)] = Q\left(\frac{A_p}{2\sigma_n}\right)\end{aligned}$$

Probabilidade de Erro para a Sinalização Bipolar

- Para a sinalização bipolar, o bit 1 é transmitido por um pulso positivo ou negativo e o bit 0 é representado por nenhum pulso
- Se as amostras detectadas se situam na faixa $(-A_p/2, A_p/2)$ se decide pelo bit 0, caso contrário se decide pelo bit 1
 - Um erro ocorre se ao transmitir o bit 0, a amostra obtida $0 + n > A_p/2$ ou $0 + n < -A_p/2$, ou seja, $|n| > A_p/2$
 - Um erro ocorre se ao transmitir o bit 1, a amostra obtida $A_p + n < A_p/2$ (pulso positivo) ou $-A_p + n > -A_p/2$ (pulso negativo), ou seja, $n < -A_p/2$ ou $n > A_p/2$

Probabilidade de Erro para a Sinalização Bipolar

- Assim,

$$P(\epsilon|0) = 2Q\left(\frac{A_p}{2\sigma_n}\right)$$

$$P(\epsilon|1) = Q\left(\frac{A_p}{2\sigma_n}\right)$$

- Admitindo-se que o bit 0 e o bit 1 possuem a mesma probabilidade de serem enviados, a probabilidade de erro $P(\epsilon)$ é dada por:

$$P(\epsilon) = \frac{1}{2}[P(\epsilon|0) + P(\epsilon|1)] = 1,5Q\left(\frac{A_p}{2\sigma_n}\right)$$

Probabilidade de Erro

Exemplo 7.4

- 1 Pulsos binários polares são recebidos com amplitude de pico $A_p = 1\text{ mV}$. A amplitude RMS do ruído do canal é de $192,3\text{ }\mu\text{V}$. Utilizando a detecção por limiar e sendo 0 e 1 igualmente prováveis, obtenha a probabilidade de erro de detecção.
- 2 Obtenha a probabilidade de erro para: (i) a sinalização on-off e (ii) a sinalização bipolar se são usados pulsos da mesma forma do item anterior, mas suas amplitudes são ajustadas tal que a potência transmitida é a mesma do item anterior.

Probabilidade de Erro

Exemplo 7.4 - Solução

1 Para o caso polar:

$$\frac{A_p}{\sigma_n} = \frac{1 \times 10^{-3}}{192,3 \times 10^{-6}} = 5,2$$

$$P(\epsilon) = Q\left(\frac{A_p}{\sigma_n}\right) = Q(5,2) = 0,9964 \times 10^{-7}$$

2 (i) On-Off - Para manter a mesma potência $A'_p = \sqrt{2}A_p = 1,414mV$

$$P(\epsilon) = Q\left(\frac{A'_p}{2\sigma_n}\right) = Q(3,68) = 1,166 \times 10^{-4}$$

(ii) Bipolar - Para manter a mesma potência $A'_p = \sqrt{2}A_p = 1,414mV$

$$P(\epsilon) = 1,5Q\left(\frac{A'_p}{2\sigma_n}\right) = 1,5Q(3,68) = 1,749 \times 10^{-4}$$

Comunicações M-árias

- No lugar de associar único bit a uma forma de onda (pulso), pode-se associar um grupo maior de bits
- Em geral, com M pulsos pode-se associar $I_M = \log_2 M$ bits de informação
- Nesse caso, ao se manter fixa a duração dos pulsos, a taxa de transmissão em bits por segundo é multiplicada por I_M
- O inconveniente é que a potência transmitida deve aumentar para manter a probabilidade de erro nos níveis desejados

Comunicações M-árias

