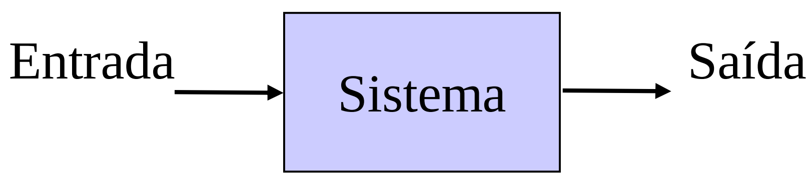
UNIVASF
Análise de Sinais e Sistemas

Sistemas

Prof. Rodrigo Ramos
godoga@gmail.com

Sistemas

- Definição:
  - Entidade que manipula um ou mais sinais para realizar uma função, produzindo, assim, novos sinais.
  - A descrição dos sinais de entrada e saída dependem da aplicação.
  - Exemplos:
    - Sistema de reconhecimento de fala: entrada é o sinal de voz, o sistema é o computador e a saída a identidade do interlocutor.
    - Sistema de comunicação: entrada são dados que se deseja transmitir, o sistema é a combinação do transmissor, canal e receptor e a saída é uma estimativa da mensagem original.
  - Representação:



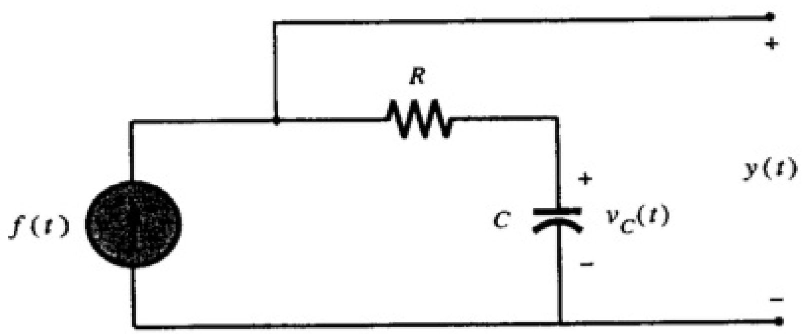
Sistemas

- Em termos matemáticos, um sistema pode ser visto como uma interconexão de operações, ou uma transformação do sinal de entrada em um sinal de saída com propriedades distintas.
  - Representação:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{T\{\,\cdot\,\}} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = T\{\,x(t)\,\}$$

  - Exemplo:



$$y(t) = v_C(t_0) + Rf(t) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau$$

Classificação

de

Sistemas

Sistemas em Tempo Contínuo e Discreto

- Sistemas em Tempo Contínuo
  - Sistemas cujas entradas e saídas são sinais em tempo contínuo.
    - $y(t) = T\{x(t)\}$
- Sistemas em Tempo Discreto
  - Sistemas cujas entradas e saídas são sinais discretos no tempo
    - $y[n] = T\{x[n]\}$
- Na maior parte do curso, trataremos de sistemas contínuos no tempo, a menos que explicitamente seja especificado o contrário.

Sistemas Lineares e Não-lineares

- **Sistema Linear**
  - Considere o sistema representado abaixo:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{T\{\,\cdot\,\}} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = T\{\, x(t) \,\}$$

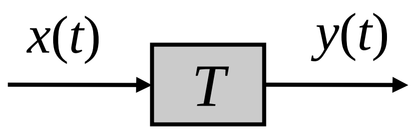
  - Ele será chamado de linear se atender aos seguintes princípios:
    - Adição: Se $T\{x_1(t)\} = y_1(t)$ e $T\{x_2(t)\} = y_2(t) \Rightarrow T\{x_1(t) + x_2(t)\} = y_1(t) + y_2(t)$
    - Homogeneidade: Se $T\{x(t)\} = y(t) \Rightarrow T\ \{\alpha \,.\, x(t)\} = \alpha \,.\, T\{x(t)\} = \alpha \,.\, y(t)$
  - A associação desses 2 princípios resulta no chamado "Princípio da Sobreposição"
    - Se $T\{x_1(t)\} = y_1(t)$ e $T\{x_2(t)\} = y_2(t) \Rightarrow$
    - $T\{\alpha \,.\, x_1(t) + \beta \,.\, x_2(t)\} = \alpha \,.\, y_1(t) + \beta \,.\, y_2(t)$

Sistemas Lineares e Não-lineares

- O princípio da sobreposição afirma que, se várias entradas atuam no sistema, o efeito total pode ser determinado considerando cada entrada separadamente.
- A resposta total será, então, a soma de todas as componentes de efeito.
- Caso o princípio da sobreposição não seja satisfeito, o sistema é dito não-linear.
- Apesar de os sistemas reais serem não-lineares, sua análise é difícil. É sempre preferível aproximar estes sistemas por sistemas lineares, devido à facilidade de manipulação que os mesmos oferecem.

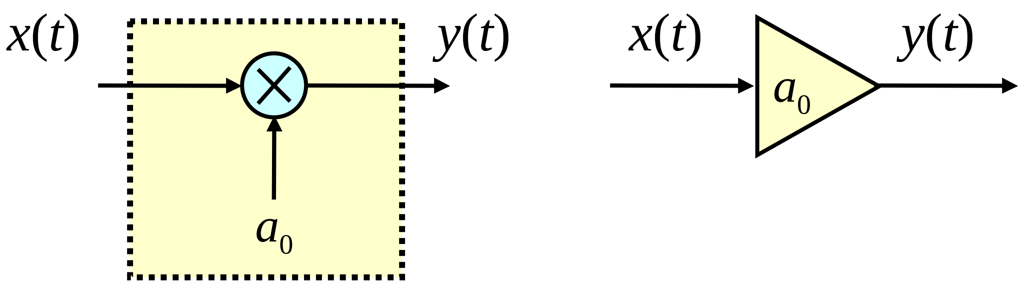
Exemplos de Sistemas Lineares

- Atraso Ideal de *T* segundos. Linear?



$$y(t) = x(t - T)$$

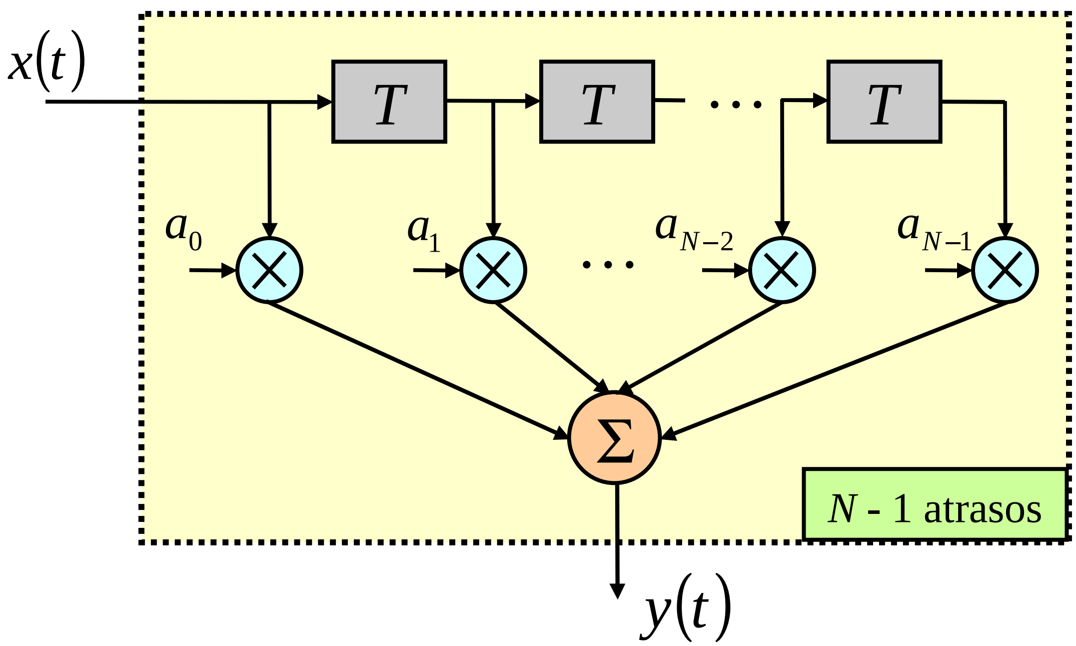
- Escalonamento por uma constante (amplificação). Linear?
  - Duas formas diferentes de representação em diagrama de blocos



$$y(t) = a_0 \, x(t)$$

Exemplos de Sistemas Lineares

- Tapped Delay Line. Linear?



Sistema de Tempo Contínuo

Cada bloco T representa um atraso de T unidades de tempo

$$y(t) = a_0\, x(t) + a_1\, x(t-T) + \cdots + a_{N-1}\, x(t-(N-1)T) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k\, x(t-kT)$$

Exemplos de Sistemas Lineares

- Sistema Transcendental $y(t) = \cos[x(t)]$
  - R: Não-linear (falha nos dois princípios)
- Sistema Quadrático $y(t) = x^2(t)$
  - R: Não-linear (falha nos dois princípios)
- Diferenciação $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}(\cdot)} \longrightarrow y(t)$$

  - Homogeneidade: $\frac{d}{dt}[a \cdot x(t)] = a\frac{d}{dt}x(t)$
  - Adição: $\frac{d}{dt}[x_1(t) + x_2(t)] = \frac{d}{dt}x_1(t) + \frac{d}{dt}x_2(t)$
  - R: Linear

Exemplos de Sistemas Lineares

- Integração $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(u)\, du$

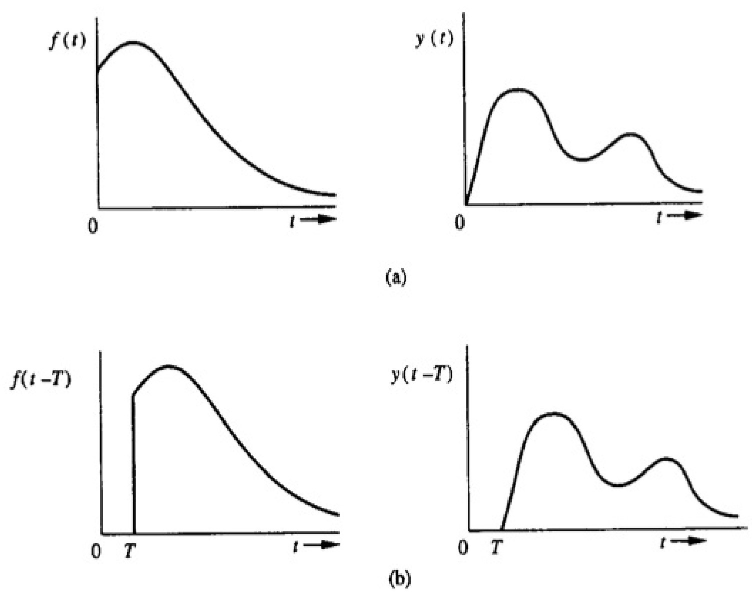
$$x(t) \longrightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{t} (\cdot)\, dt} \longrightarrow y(t)$$

  - Homogeneidade: $\int_{-\infty}^{t} a\, x(u)\, du = a \int_{-\infty}^{t} x(u)\, du$
  - Adição: $\int_{-\infty}^{t} \left(x_1(u) + x_2(u)\right) du = \int_{-\infty}^{t} x_1(u)\, du + \int_{-\infty}^{t} x_2(u)\, du$
  - R: Linear

- Ouvido Humano
  - Responde logaritmicamente à intensidade do som
  - R: Não-linear (falha nos dois princípios)

Sistemas Variantes e Invariantes no Tempo

- Sistemas Invariantes no Tempo
  - O sistema é chamadado de invariante no tempo (IT) se um atraso ou avanço de tempo na entrada provoca deslocamento idêntico na saída.
  - Isto implica em:
    - Se $T\{x(t)\} = y(t) \Rightarrow T\{x(t-\tau)\} = y(t-\tau)$
- Caso contrário, o sistema é dito variante no tempo



Exemplos de Sistemas IT

- Sistema Identidade

$$y(t) = x(t)$$

  - Deslocar de *t* o lado esquerdo e o lado direito separadamente e verificar se os resultados são iguais

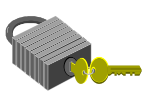
$$x(t-\tau) = y(t-\tau)$$

  - R: Invariante no Tempo

- Tapped Delay Line

$$y(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \; x(t-kT)$$

  - R: Invariante no Tempo



Exemplos de Sistemas IT

- Sistema Transcendental

$$y(t) = \cos(x(t))$$

  - R: Invariante no Tempo

- Sistema Quadrático

$$y(t) = x^2(t)$$

  - R: Invariante no Tempo

- Diferenciação

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t) \qquad \frac{d}{dt}x(t-\tau) = y(t-\tau)$$

  - R: Invariante no Tempo

Exemplos de Sistemas IT

- Integração

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\lambda) d\lambda$$

$$y(t-\tau) = \int_{-\infty}^{t-\tau} x(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{t} x(\lambda-\tau) d\lambda$$

  - R: Invariante no Tempo

- Sistema variante no tempo:

$$y(t) = [\cos(t)]x(t-2)$$

Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo

- Sistema Linear Invariante no Tempo (LIT)
  - Os sistemas LIT são aqueles que atendem às propriedades de linearidade e invariância no tempo simultaneamente, ou seja:

- Se $y_1(t-\tau) = T\{x_1(t-\tau)\}$ e $y_2(t-\tau) = T\{x_2(t-\tau)\} \Rightarrow$
- $T\{\alpha \,.\, x_1(t-\tau) + \beta \,.\, x_2(t-\tau)\} = \alpha \,.\, y_1(t-\tau) + \beta \,.\, y_2(t-\tau)$

- A maior parte dos sistemas pode ser modelado como sendo LIT.
- Definição de sistemas LIT leva à utilização da convolução para análise de sistemas.

Sistema Causal e Não-causal

- Sistema Causal
  - A saída em um instante t_0 só depende da entrada $x(t)$ para instantes $t < t_0$
  - O sistema é não antecipativo ou realizável, pois a saída não depende da entrada em instantes futuros (a saída não se antecipa à entrada)
  - Considere o sistema abaixo:

$$y(t) = x(t-2) + x(t) + x(t+2)$$

    - Ele é <u>não causal</u>, pois a saída no instante atual (t) depende da entrada em instantes futuros ($t + 2$)

Sistema Causal e Não-causal

- Por que estudar sistemas causais?
  - Importante em sistemas em que a variável não é o tempo.

Exemplo: Densidade de carga colocada em um ponto do eixo $x > 0$ produz um campo elétrico em todo o eixo x.

  - Pode ser implementado ou satisfatoriamente aproximado no tempo real se for permitido um atraso.

Exemplo: Se y(t) = x(t-2) + x(t+2), podemos aproximá-lo pelo sistema y2(t) = y(t-2) = x(t-4) + x(t).

  - Fornecem limite superior para o desempenho de sistemas causais (realizáveis).

Sistemas Estáveis

- Sistema Estável
  - Também chamado de Sistema BIBO (*bounded in, bounded out*)
  - Se e somente se TODA entrada limitada resulta em uma saída também limitada.
  - Ou seja, a saída não diverge se a entrada não divergir.

Se $$|x(t)| < B_x < \infty \quad \text{para todo } t$$

Então $$|y(t)| < B_y < \infty \quad \text{para todo } t$$

- Onde Bx e By são, respectivamente, os valores máximos em módulo de $x(t)$ e $y(t)$

Exemplos de Sistemas Estáveis

- O sistema quadrático é estável.

$$y(t) = x^2(t)$$

- O sistema cuja relação é definida por

$$y(t) = r^n x(t)$$

é instável, para $r > 1$.

Sistemas Com e Sem Memória

- Sistema com memória
  - Sistema cuja saída depende de valores passados e/ou futuros da entrada.
- Sistema sem memória
  - Caso a saída só dependa do valor presente da entrada, o sistema é dito sem memória.
- Exemplos
  - Sem memória: $i(t) = v(t)/R$

$$y(t) = \int_{-5}^{5} f(\tau)\, d\tau$$

  - Com memória:

$$y(t) = x(t - 1) + x(t) + x(t + 2)$$