

UNIVASF

Análise de Sinais e Sistemas



Introdução aos Sinais

Prof. Rodrigo Ramos
godoga@gmail.com

Classificação de Sinais



Sinais

- Sinais geralmente transportam informações a respeito do estado ou do comportamento de um sistema físico e, geralmente, são sintetizados para a comunicação entre humanos ou entre humanos e máquinas
- Sinais são representados matematicamente como funções de uma ou mais variáveis independentes
 - Um sinal de voz pode ser representado matematicamente como uma função do tempo
 - Uma imagem fotográfica pode ser representada matematicamente como a variação do brilho e da cor em função de duas variáveis no espaço

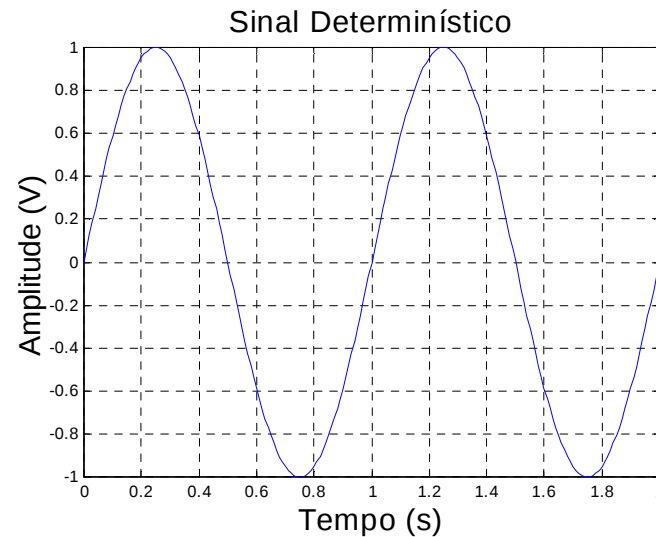


Sinais Determinísticos x Sinais Aleatórios

- Sinais Determinísticos

- Podem ser representados por uma função analítica

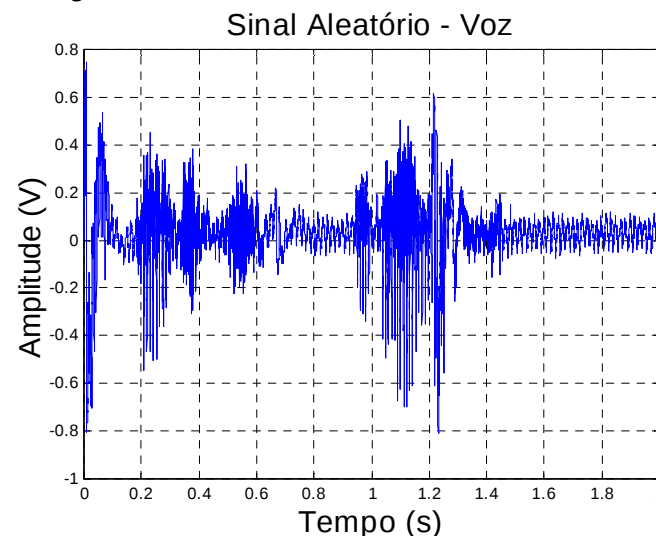
- É possível determinar precisamente o valor do sinal em um dado instante de tempo
 - ex: $f(t) = A \cos(\omega_0 t)$, onde A e ω_0 são constantes



Sinais Determinísticos x Sinais Aleatórios

- Sinais Aleatórios

- Sinal sobre o qual há incerteza antes de sua ocorrência.
- Só podem ser representados por suas características estocásticas (média, variância, autocorrelação etc)
- Não podem ser representados por uma função analítica (não é possível determinar precisamente o valor do sinal em um dado instante de tempo)
- ex: $f(t) = A \cos(\omega_0 t)$, onde A é uma V.A. contínua Gaussiana
- ex: $f(t)$ é un



Tempo Contínuo x Tempo Discreto

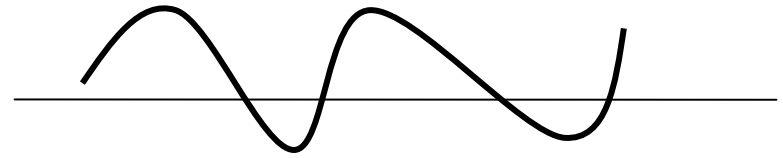
- Sinais em Tempo Contínuo
 - Definidos ao longo de todos os instantes de tempo num intervalo possível de valores. Portanto, podem ser representados por uma variável independente contínua
 - $x(t)$ onde t pode assumir qualquer valor real
- Sinais em Tempo Discreto
 - Definidos apenas em instantes distintos do tempo num intervalo possível de valores. Portanto, podem ser representados por uma variável independente discreta
 - São matematicamente representados como sequências de números
 - $x[n]$ onde $n \in \{...-3,-2,-1,0,1,2,3...\}$
 - Normalmente são derivados de sinais em tempo contínuo através do processo de amostragem



Sinais Digitais x Sinais Analógicos

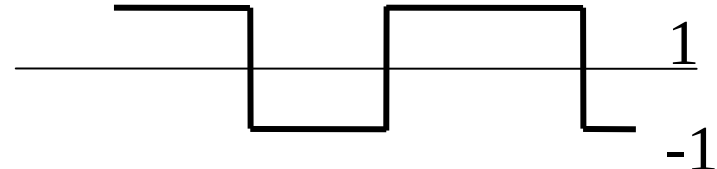
- Sinais Analógicos

- Variação contínua da amplitude
- Número infinito de símbolos

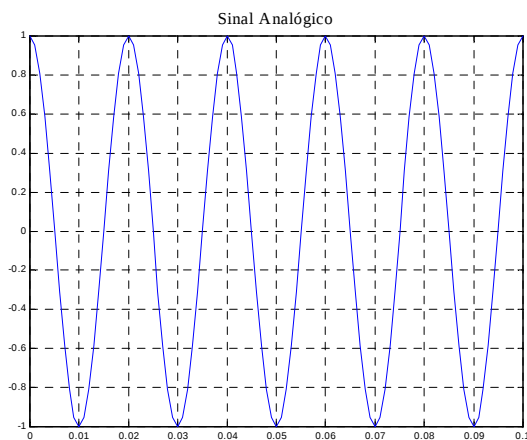


- Sinais Digitais

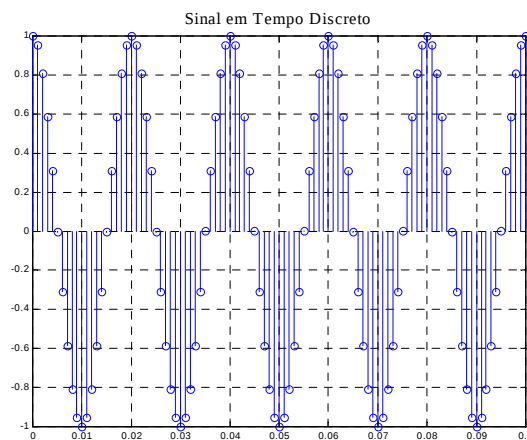
- Variação discreta da amplitude
- Número finito de símbolos
- Maior imunidade ao ruído e distorção do canal
- Regeneração do sinal empregando repetidores (TX noise free)
- Codificação
 - Multiplexação de sinais digitais é mais simples e eficiente



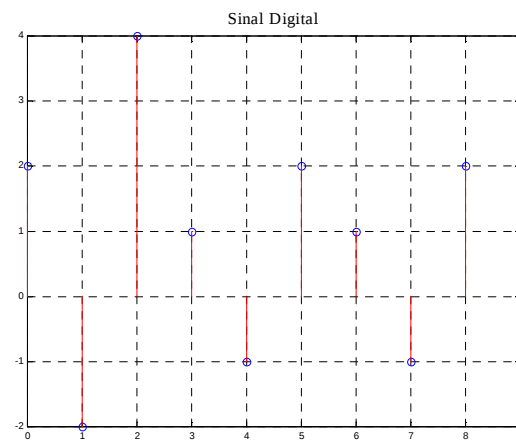
Sinais Digitais x Sinais Analógicos



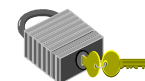
Sinal Contínuo
em Amplitude e
no Tempo
(Sinal Analógico)



Sinal Contínuo
em Amplitude e
Discreto no Tempo



Sinal Discreto
em Amplitude e
no Tempo
(Sinal Digital)



Tempo Contínuo x Tempo Discreto

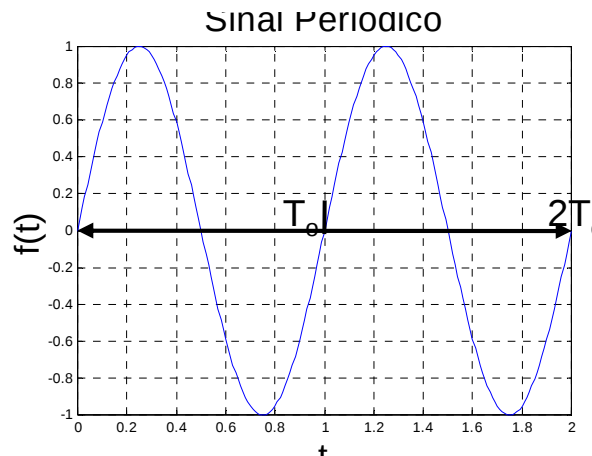
- Tempo-Contínuo x Tempo-Discreto
 - O termo discreto significa quantização no tempo
- Analógico x Digital
 - Digital significa quantização na amplitude
- Um processador de sinais digitais (DSP) é um sistema digital em tempo discreto
 - Um DSP é adequado para implementação de filtros digitais LTI



Sinais Periódicos x Sinais Aperiódicos

- Sinais Periódicos

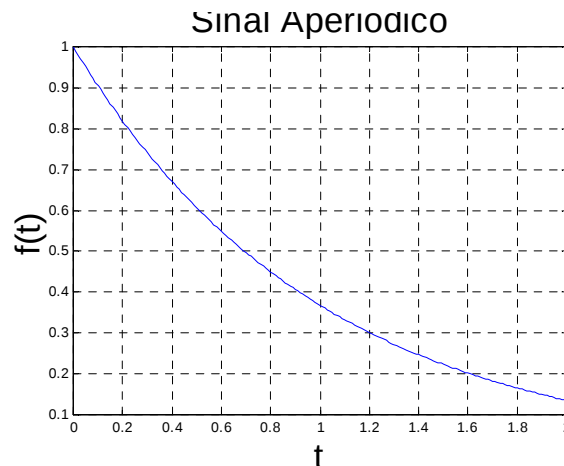
- Apresentam uma repetição de seus valores de amplitude a intervalos regulares de tempo
- Satisfazem a condição:
 - $f(t) = f(t + kT_0)$, para todo t
 - Onde, T_0 é o período fundamental de repetição e k é um nº inteiro
 - De forma equivalente, $f_0 = 1/T_0$ é a frequência fundamental
- A área sob qualquer intervalo de duração igual a kT_0 é a mesma
 - Integrar de 0 a T_0 é equivalente a integrar de $-T_0/2$ a $T_0/2$



Sinais Periódicos x Sinais Aperiódicos

- Sinais Aperiódicos

- Não existe T_0 que satisfaça a condição de periodicidade
- Não apresentam uma repetição de seus valores de amplitude a intervalos regulares de tempo



Sinais Causais x Sinais Não-Causais

- Sinais Causais
 - Definidos apenas para $t > 0$
- Sinais Não-Causais
 - Definidos para $t > 0$ e $t < 0$
- Sinais Anti-Causais
 - Definidos apenas para valores de $t < 0$



Sinais de Potência x Sinais de Energia

- Energia e Potência de Sinais (Tamanho do sinal)
 - A energia e a potência de um sinal podem ser definidas considerando uma resistência normalizada de 1Ω
 - Deste modo, tem-se que a energia total e potência média de um sinal podem ser obtidas por:

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt$$

$$P = v^2 / R$$

$$P = i^2 \cdot R$$

- Para sinais periódicos, a potência média do sinal é dada por:

$$P = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} |f(t)|^2 dt$$



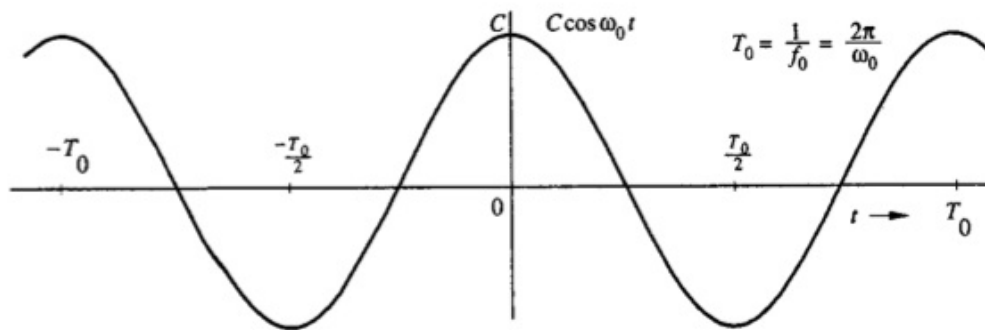
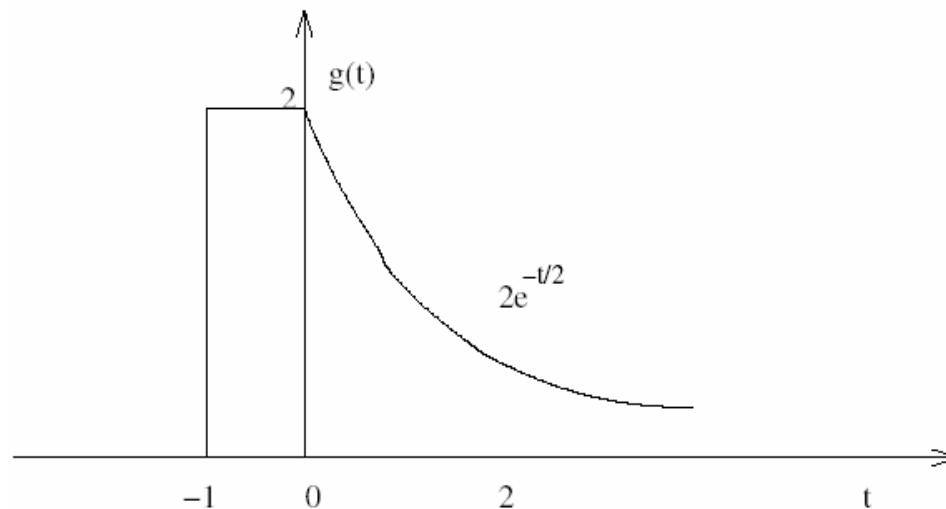
Sinais de Potência x Sinais de Energia

- Sinal de Energia
 - Um sinal é dito de energia se $0 < E < \infty$
- Sinal de Potência
 - Um sinal é dito de potência se $0 < P < \infty$
- Regra geral
 - Sinais periódicos e os aleatórios são sinais de potência (*power signal*)
 - Sinais determinísticos aperiódicos são sinais de energia (*energy signal*)



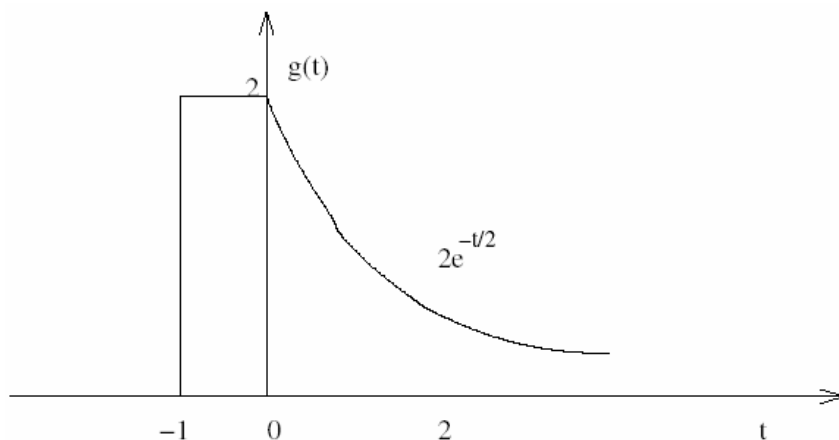
Sinais de Potência x Sinais de Energia

- Exemplo: Determinar as medidas adequadas para os sinais abaixo:

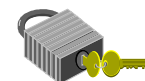


Sinais de Potência x Sinais de Energia

- Exemplo de Sinal de Energia



$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt = \int_{-1}^0 (2)^2 dt + \int_0^{\infty} 4e^{-t} dt = 4 + 4 = 8$$



Sinais de Potência x Sinais de Energia

- Exemplo de Sinal de Potência

$$g(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$$

$$\begin{aligned} P_g &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 \cos^2(\omega_0 t + \theta) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{A^2}{2} [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\theta)] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\omega_0 t + 2\theta) dt \\ &= A^2/2 \end{aligned}$$



Sinais de Potência x Sinais de Energia

- Sinais de Potência

- Duração infinita
- Potência normalizada finita e não-zero
- Energia média normalizada sobre um intervalo infinito igual a infinito
- Tratável matematicamente

- Sinais de Energia

- Duração finita
- Energia normalizada finita e não-zero
- Potência média normalizada sobre um intervalo infinito igual a zero
- Fisicamente realizável



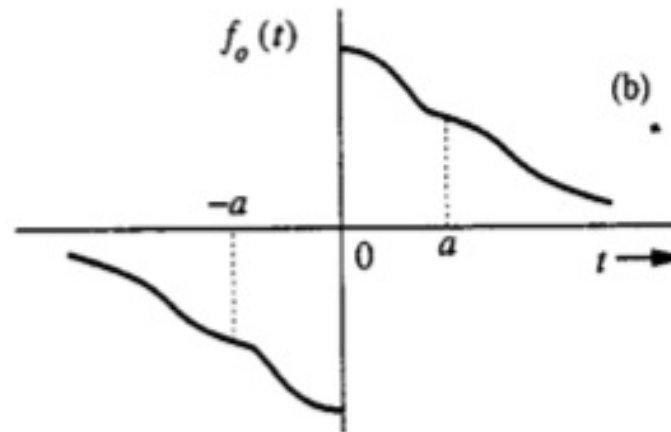
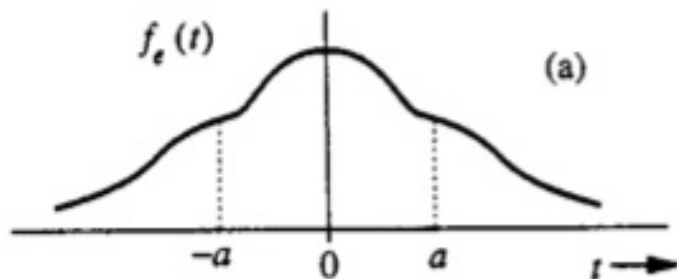
Sinais Pares x Sinais Ímpares

- Sinal Par

- Um sinal $x_e(t)$ é dito ser par se $x_e(t) = x_e(-t)$.
- Um sinal par possui os mesmos valores para os instantes t e $-t$ (simétrico).

- Sinal Ímpar

- Um sinal $x_o(t)$ é dito ser ímpar se $x_o(t) = -x_o(-t)$.
- O valor do sinal ímpar no instante t é o negativo de seu valor em $-t$ (anti-simétrico).



Sinais Pares x Sinais Ímpares

- Área
 - Sinais pares

$$\int_{-a}^a f_e(t) dt = 2 \int_0^a f_e(t) dt$$

- Sinais ímpares

$$\int_{-a}^a f_o(t) dt = 0$$



Operações Básicas com Sinais



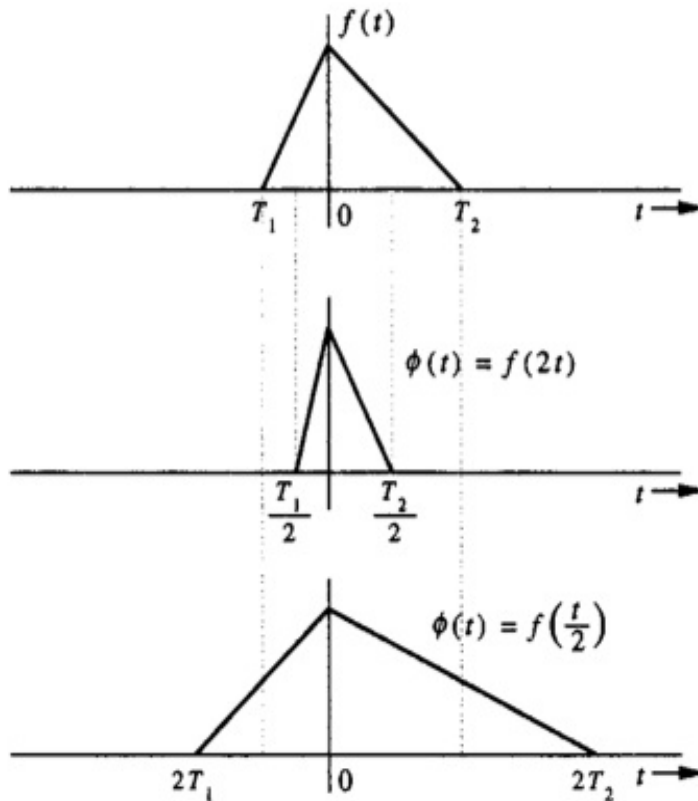
Operações Básicas com Sinais

- Multiplicação por escalar
 - Modifica a amplitude do sinal original
 - Se $x(t)$ for um sinal, uma mudança de escala é dado pelo sinal $y(t) = cx(t)$
 - Se $c > 1$ tem-se uma amplificação
 - Se $0 < c < 1$ tem-se uma atenuação



Operações Básicas com Sinais

- Escalonamento temporal
 - Modifica a duração do sinal original



O sinal $f(2t)$ é $f(t)$ comprimido por um fator de 2.

O sinal $f(t/2)$ é $f(t)$ expandido por um fator de 2.

Em geral:

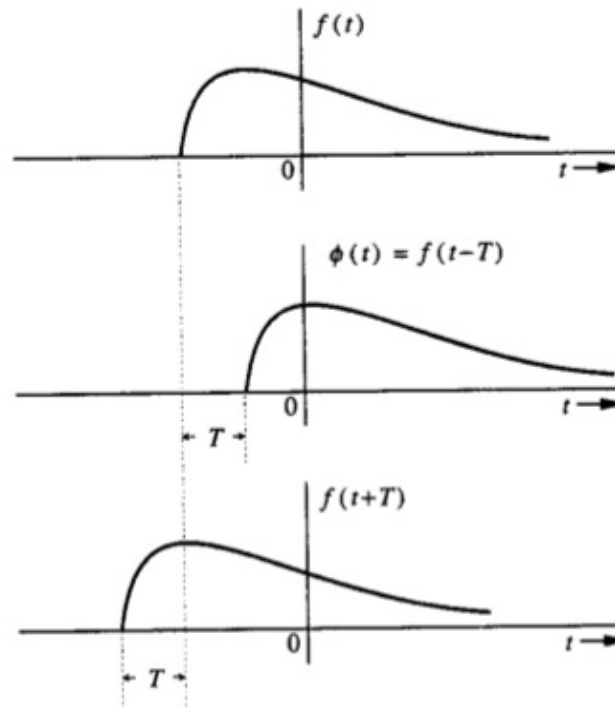
- se $f(t)$ é comprimido de um fator $a > 1$, o sinal resultante será $f(at)$.
- se $f(t)$ é expandido de um fator $a > 1$, o sinal resultante será $f(t/a)$.



Operações Básicas com Sinais

- Deslocamento Temporal

- Realiza o deslocamento do sinal original sobre o eixo do tempo
- $y(t) = x(t - T)$
 - Se $T > 0$ tem-se atraso no tempo
 - Se $T < 0$ tem-se adiantamento no tempo

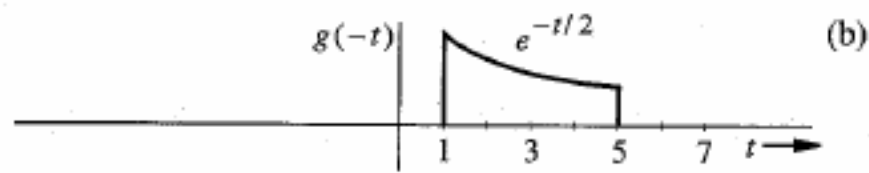
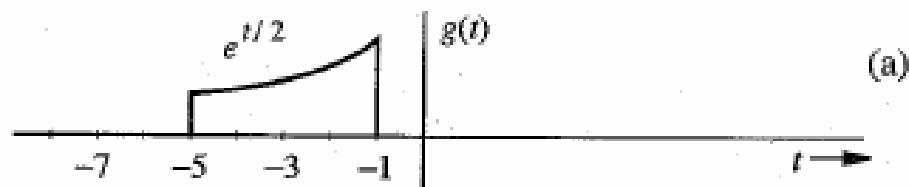


Operações Básicas com Sinais

- Reversão Temporal

- Realiza o rebatimento do sinal em relação ao eixo do tempo
- $y(t) = x(-t)$

Exemplo: Dado $g(t)$, encontrar $g(-t)$



Tipos de Sinais



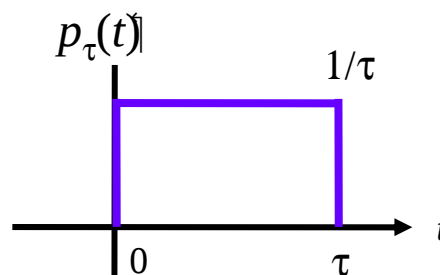
Pulso Unitário

- Pulso Unitário com largura τ e amplitude $1/\tau$

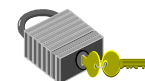
$$p_{\tau}(t) = \begin{cases} 1/\tau & 0 < t < \tau \\ 0 & t < 0 \text{ ou } t > \tau \end{cases}$$

- cuja área é unitária:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_{\tau}(t) dt = 1$$



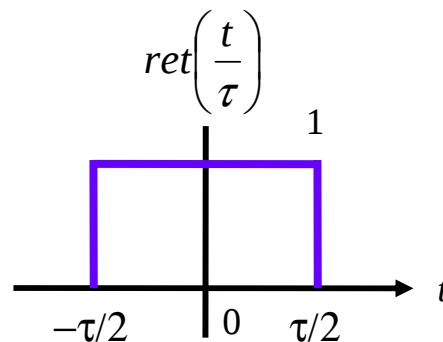
Área Unitária



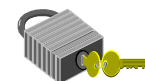
Pulso Porta Unitário

- Um Pulso Porta Unitário tem largura Δ e amplitude 1

$$ret(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$



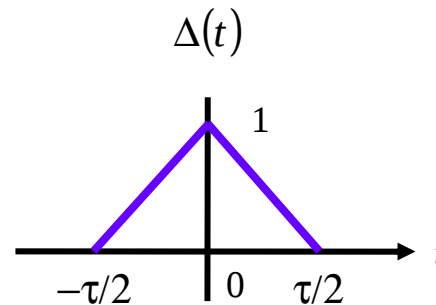
Nota: para $\tau = 1$, a área do pulso é unitária



Pulso Triangular Unitário

- Um Pulso Triangular Unitário tem base Δ e altura 1

$$\Delta(t) = \begin{cases} 1 - 2\left|\frac{t}{\tau}\right| & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| \geq \frac{\tau}{2} \end{cases}$$



Impulso Unitário

- Idealismo matemático para um evento instantâneo

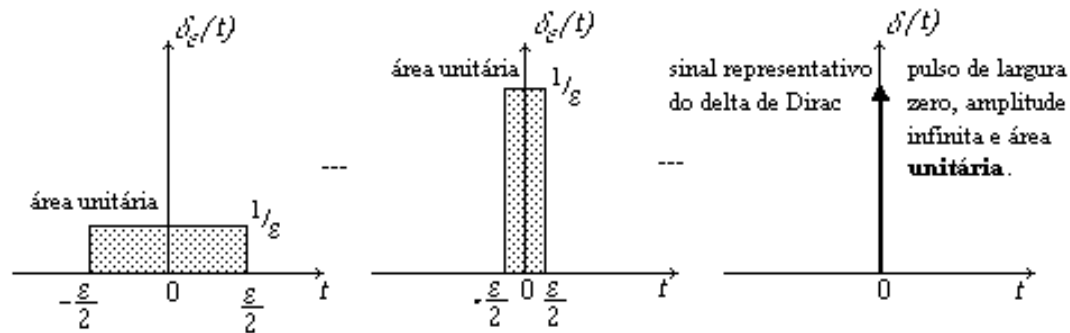
- Função Delta de Dirac

- $\delta(t) = 0$ para $t \neq 0$
- $\delta(0)$ é indefinida, mas tem área unitária:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \text{Área Unitária}$$

- Caso limite do pulso retangular unitário:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p_{\varepsilon}(t)$$



Impulso Unitário

- Principais Propriedades

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - t_o) dt = f(t_o)$$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \cdot \delta(t)$$

$$\delta(t) = \delta(-t)$$

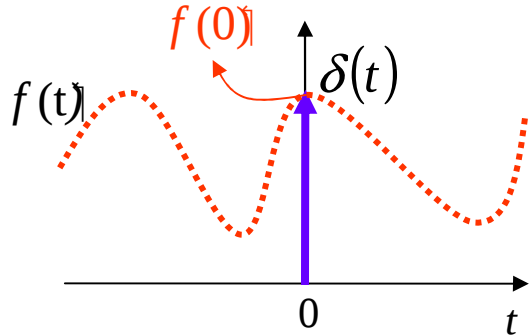
$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

$$x(t)\delta(t - T) = x(T)\delta(t - T)$$



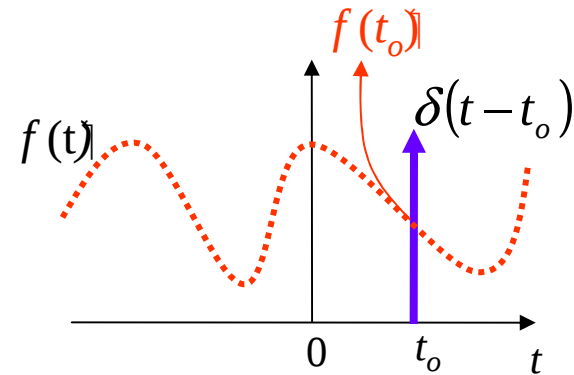
Impulso Unitário

- Operações com a função $\delta(t)$



Área Unitária

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t) dt = f(0)$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t-t_o) dt = f(t_o)$$



Impulso Unitário

- Pode-se simplificar $\delta(t)$ sob a operação de integração

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t) dt = f(0)$$

- O que resulta de

$$\int_{-\infty}^{-1} f(t) \cdot \delta(t) dt = ?$$

Resposta: 0



Impulso Unitário

- Outros exemplos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-2) \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) dt = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(x-t)} \delta(2-t) dt = e^{-2(x-2)}$$

- O que ocorre nas vizinhanças da origem?

$$\int_{-\infty}^0 \delta(t) dt = ?$$

$$\int_{-\infty}^{0^-} \delta(t) dt = 0 \quad \text{Antes do Impulso}$$

$$\int_{-\infty}^{0^+} \delta(t) dt = 1 \quad \text{Após o Impulso}$$

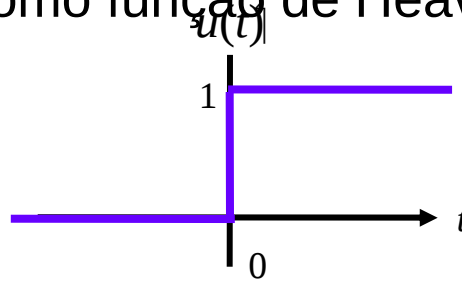


Degrau Unitário

- Degrau Unitário

- A função degrau foi introduzida por Heaviside e é comumente referida na matemática como função de Heaviside

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



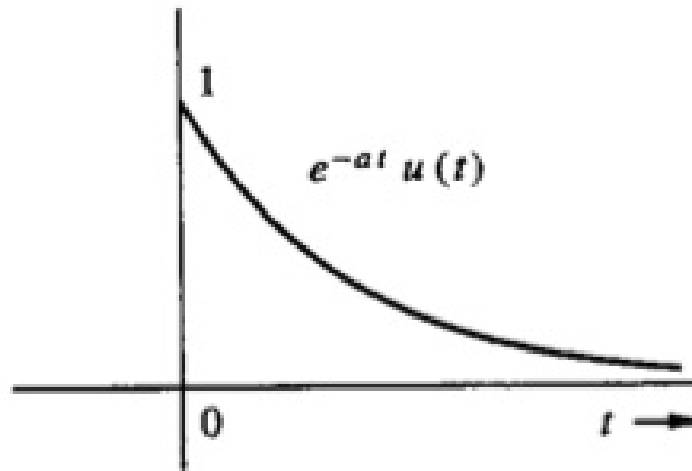
- Relação entre o Impulso Unitário e o Degrau Unitário

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \longleftrightarrow \frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$$



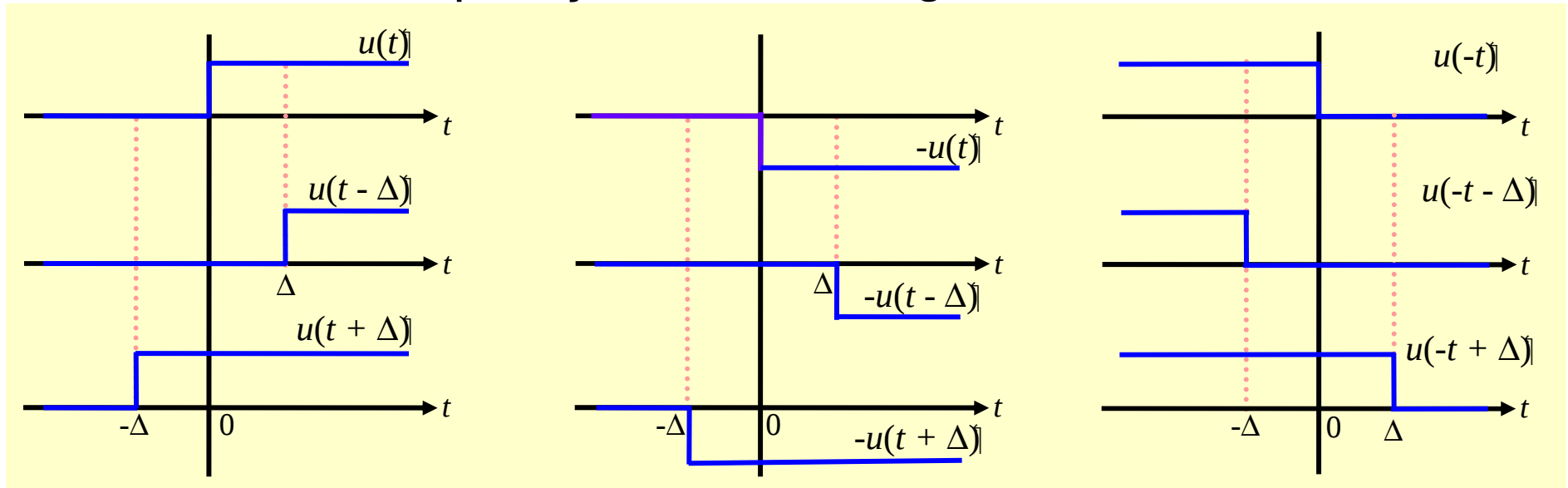
Degrau Unitário

- Se quisermos um sinal que comece em $t = 0$, basta multiplicá-lo por $u(t)$.
- Por exemplo, e^{-at} representa uma exponencial não-causal. Para obtermos sua forma causal, fazemos $e^{-at}u(t)$



Função Degrau Unitário

- Resumo de operações com o Degrau Unitário



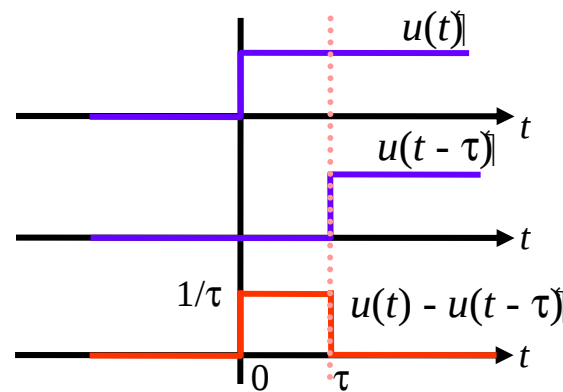
t	$u(t)$	$-u(t)$	$u(t-1)$	$u(t+1)$	$u(-t-1)$	$u(-t+1)$
-2	$u(-2)=0$	$u(-2)=0$	$u(-3)=0$	$u(-1)=0$	$u(1)=1$	$u(3)=1$
-1	$u(-1)=0$	$u(-1)=0$	$u(-2)=0$	$u(0)=1$	$u(0)=1$	$u(2)=1$
0	$u(0)=1$	$u(0)=-1$	$u(-1)=0$	$u(1)=1$	$u(-1)=0$	$u(1)=1$
1	$u(1)=1$	$u(1)=-1$	$u(0)=1$	$u(2)=1$	$u(-2)=0$	$u(0)=1$
2	$u(2)=1$	$u(2)=-1$	$u(1)=1$	$u(3)=1$	$u(-3)=0$	$u(-1)=0$



Função Degrau Unitário

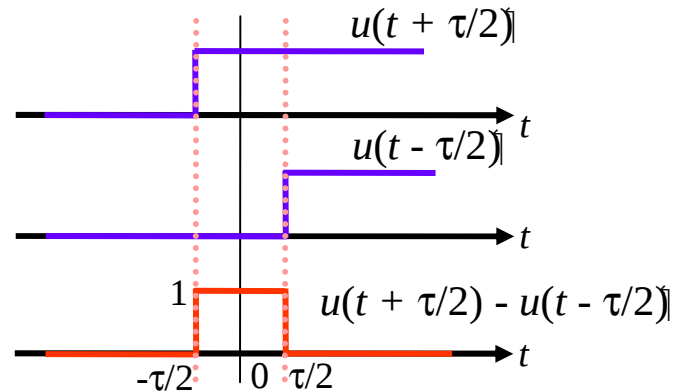
- Relação entre o Pulso Unitário e o Degrau Unitário

$$p_{\tau}(t) = \frac{1}{\tau} [u(t) - u(t - \tau)]$$



- Relação entre o pulso Porta Unitário e o Degrau Unitário

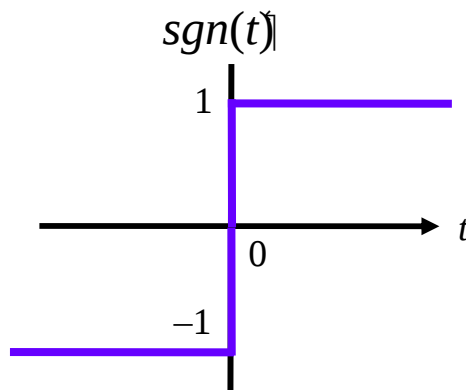
$$ret(t) = u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$



Função Sign (Sinal)

- Função Sign

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

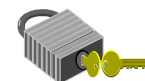
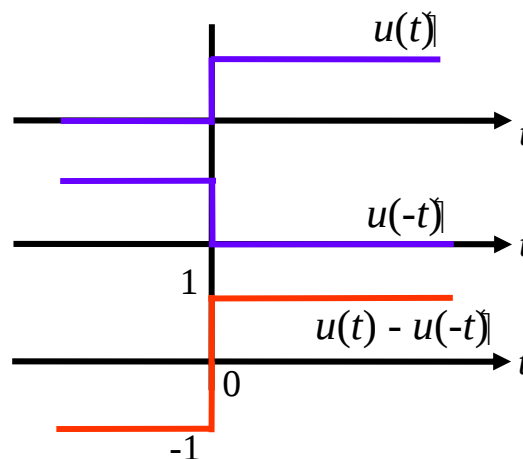


Função Sign (Sinal)

- Relação entre a função Sign e o Degrau Unitário

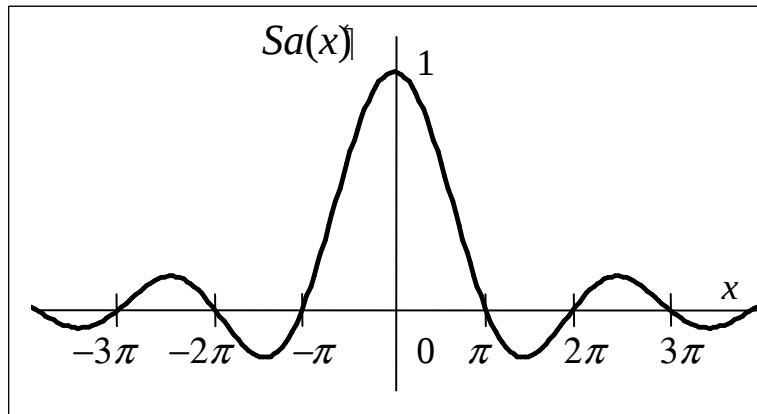
$$\text{sgn}(t) = u(t) - u(-t)$$

$$\text{sgn}(t) = 2 \cdot u(t) - 1$$



Função de Amostragem

- Função de Amostragem (Sampling)
 - Função Par
 - Zeros em $\pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$
 - Amplitude decai proporcionalmente à $1/x$



$$Sa(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

Em vários livros de comunicação (Lathi) costuma-se usar a mesma definição para as funções de amostragem (Sa) e de interpolação (Sinc)



Sinal Senoidal

- Propriedades Básicas das Funções Senoidais

Property	Equation
Equivalence	$\sin \theta = \cos(\theta - \pi/2)$ or $\cos(\theta) = \sin(\theta + \pi/2)$
Periodicity	$\cos(\theta + 2\pi k) = \cos \theta$, when k is an integer
Evenness of cosine	$\cos(-\theta) = \cos \theta$
Oddness of sine	$\sin(-\theta) = -\sin \theta$
Zeros of sine	$\sin(\pi k) = 0$, when k is an integer
Ones of cosine	$\cos(2\pi k) = 1$ when k is an integer
Minus ones of cosine	$\cos\left[2\pi\left(k + \frac{1}{2}\right)\right] = -1$, when k is an integer

Table 2.1: Basic properties of the sine and cosine functions.



Sinal Senoidal

- Principais Identidades Trigonométricas

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$$

$$\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2} (\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

$$\sin(x) \sin(y) = -\frac{1}{2} (\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

$$\cos(x) \sin(y) = \frac{1}{2} (\sin(x+y) - \sin(x-y))$$

$$\sin(x) = (1/2j)(e^{jx} - e^{-jx})$$

$$\cos(x) = (1/2)(e^{jx} + e^{-jx})$$

Identity Number	Equation
1	$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
2	$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$
3	$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$
4	$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
5	$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$

Table 2.2: Some basic trigonometric identities.

