



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**

FILIPE CARDOSO DE OLIVEIRA

**MODELAGEM MATEMÁTICA DO PONTO DE EQUILÍBRIO DE
PRODUÇÃO EM UM SISTEMA NÃO HOMOGÊNIO**

**Juazeiro - BA
2019**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**

FILIPPE CARDOSO DE OLIVEIRA

**MODELAGEM MATEMÁTICA DO PONTO DE EQUILÍBRIO DE
PRODUÇÃO EM UM SISTEMA NÃO HOMOGÊNEO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
como requisito parcial para obtenção do título de
Bacharel em Engenharia de Produção, pela
Universidade Federal do Vale do São Francisco.
Orientador: Prof. Dr. Lino Marcos da Silva

**Juazeiro - BA
2019**

	Oliveira, Filipe Cardoso de.
O48m	Modelagem matemática do ponto de equilíbrio de produção em um sistema não homogêneo / Filipe Cardoso de Oliveira – Juazeiro, 2019.
	x, 44 f.: il. ; 29 cm.
	Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia de Produção) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro-BA, 2019.
	Orientador: Prof. Dr. Lino Marcos da Silva.
	1. Pesquisa Operacional. 2. Modelagem Matemática. 3. Programação Linear. I. Título. II. Silva, Lino Marcos. III. Universidade Federal do Vale do São Francisco.
	CDD 658.4034

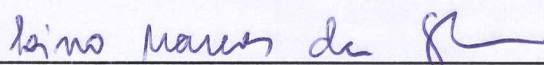
**UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**

FOLHA DE APROVAÇÃO

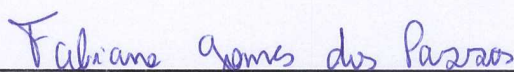
FILIPE CARDOSO DE OLIVEIRA

**MODELAGEM MATEMÁTICA DO PONTO DE EQUILÍBRIO DE
PRODUÇÃO EM UM SISTEMA NÃO HOMOGÊNEO**

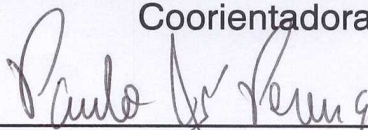
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
como requisito parcial para obtenção do título
de Bacharel em Engenharia de Produção, pela
Universidade Federal do Vale do São Francisco.



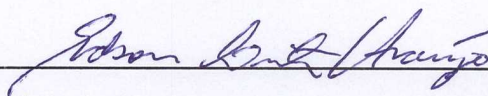
Lino Marcos da Silva, Dr. – UNIVASF
Orientador



Fabiana Gomes dos Passos, M.Sc - UNIVASF
Coorientadora



Paulo José Pereira, Dr. - UNIVASF
Avaliador Interno



Edson Leite Araújo, M.Sc – UNIVASF
Avaliador Externo

Aprovado pelo Colegiado de Engenharia de Produção em 25 / 03 / 19

Dedico este trabalho à minha família, em especial a minha mãe, por todo o esforço empregado para realização dessa graduação em engenharia de produção e pelo entusiasmo que sempre demonstrava ao ver minhas conquistas.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer, em primeiro lugar, à minha família pelo apoio emocional e financeiro proporcionados ao longo dessa jornada, de forma especial, à minha mãe Sandra Cardoso de Carvalho pela dedicação durante esses mais de 5 anos. Agradeço também à minha tia, Suzete Cardoso, e ao meu avô, Belmiro Cardoso, pela ajuda financeira que proporcionou minha estabilidade durante a graduação.

Aos meus amigos de curso, que me auxiliaram nas dificuldades, agradeço fortemente à Tayllen Emídio, Deise Oliveira, Raquel Damasceno, Bruna Peixoto, Joice Beanes, Edvaldo Junior, Vitor Miranda, Lincoln Solano, Wesley Souza, Ricardo Medeiros e Ruan Bahia. Aos meus amigos íntimos, pela consideração e apoio nos momentos de dificuldades, aos quais tenho uma grande consideração e amizade, Airton Lucas, Igor França e Thiago Lino.

Gostaria de agradecer, em especial, a Tainara Nadinny que, enquanto minha companheira e amiga, me ajudou de formas inimagináveis, sempre me motivando e enaltecendo minhas conquistas, além de me criticar de forma dura, porém amorosa, sempre que necessário, contribuindo, desta forma, em minha formação, não apenas profissional, mas também pessoal.

Agradeço aos meus mestres, em especial ao meu orientador Dr. Lino Marcos pela paciência e empenho em me ensinar da melhor forma possível os seus conhecimentos em sua área de pesquisa que eu tanto admiro. Agradeço também ao meu mestre M.Sc Fabio Henrique de Carvalho por seu empenho e dedicação em suas aulas. A sua paixão pela matemática despertou em mim um incrível interesse pela área, que, além de me moldar como pessoa, ainda contribuíram de forma fundamental para a elaboração das ideias contidas neste trabalho. Também sou grato ao meu mestre Dr. Abdinardo Oliveira pela excelente formação nos ciclos financeiro e estatístico nos quais tive a sorte de participar e aprender.

Por fim, agradeço a todos que mesmo não citados aqui, permearam meu caminho durante esse breve período, e que contribuíram de forma positiva e construtiva para minha formação.

“ Viver no mundo sem tomar consciência do significado do mundo é como vagar por uma imensa biblioteca sem tocar os livros. ”
(Dan Brown)

OLIVEIRA, Filipe Cardoso de. **O uso da pesquisa operacional como ferramenta para modelagem matemática do ponto de equilíbrio de produção em um sistema não homogêneo.** Trabalho Final de Curso. Juazeiro (BA). Universidade Federal do Vale do São Francisco, 2018.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma formulação matemática para o problema de Ponto de Equilíbrio. Este problema trata da definição do melhor *mix* de produtos que se deve fabricar em uma planta industrial não homogênea, com o menor custo possível. Foi utilizado como base teórica para esse trabalho os conceitos existentes dentro do ramo da Pesquisa Operacional, uma das grandes áreas da Engenharia de Produção, mais especificamente da programação linear inteira. A metodologia utilizada na pesquisa foi a axiomática normativa, que tem como foco analisar modelos quantitativos idealizados com o propósito de entender o sistema modelado. Utilizou-se desses conceitos para formulação de uma função objetivo e um conjunto de restrições teóricas que representam as limitações reais de uma planta industrial não homogênea genérica. O modelo proposto teve como finalidade a representação matemática das limitações de operações e a definição do conjunto ótimo de produtos a serem fabricados sob estas condições, além de fornecerem informações importantes para um planejamento e programação da produção e para um planejamento de venda e marketing, sob o ponto de vista estratégico de sobrevivência de mercado. O modelo foi testado com dados reais e os resultados indicam que o *mix* de produtos encontrado através do modelo proposto possui vantagens econômicas em relação ao modelo padrão utilizado.

Palavras-chaves: Pesquisa Operacional. Modelagem Matemática. Ponto de Equilíbrio.

OLIVEIRA, Filipe Cardoso de. **The use of operational research as a tool for mathematical modeling of the equilibrium point of production in an inhomogeneous system.** Final Work Project. Juazeiro (BA). Federal University of the São Francisco Valley, 2018.

ABSTRACT

This paper presents a mathematical formulation for the Break Even Point problem. This problem deals with the definition of the best mix of products that must be manufactured in an inhomogeneous industrial plant, with the lowest possible cost. It was used as a theoretical basis for this work the existing concepts within the field of Operational Research, one of the great areas of Production Engineering, more specifically of the entire linear programming. The methodology used in the research was the normative axiomatic, which focuses on analyzing idealized quantitative models with the purpose of understanding the modeling system. We used these concepts to formulate an objective function and a set of theoretical constraints that represent the real limitations of a generic non-homogeneous industrial plant. The purpose of the proposed model was the mathematical representation of the limitations of operations and the definition of the optimum set of products to be manufactured under these conditions, as well as providing important information for production planning and scheduling and sales and marketing planning, the strategic point of view of market survival. The model was tested with real data and the results indicate that the product mix found through the proposed model has economic advantages over the standard model used.

Key-words: Operational Research. Mathematical Modeling. Break Even Point.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	10
1.1 PROBLEMÁTICA	12
1.2 OBJETIVOS	13
1.2.1 Objetivo Geral	13
1.2.2 Objetivos Específicos	13
2 REFERENCIAL TEÓRICO	15
2.1 PESQUISA OPERACIONAL	15
2.2 PROGRAMAÇÃO LINEAR	16
2.2.1 O modelo de Programação Linear	16
2.2.2 Forma-padrão do Model	17
2.2.3 Terminologia para Soluções de Modelos	18
2.2.4 Garantia de Solução	18
2.3 PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA	20
2.4 CONTABILIDADE GERENCIAL	21
2.4.1 Custeio Variável	22
2.4.2 Margem de Contribuição	22
2.4.3 Ponto de Equilíbrio	23
2.5 ESTRUTURA DE DADOS	24
2.6 MÉTODO DE BRANCH AND BOUND	26
3 METODOLOGIA	28
4 MODELAGEM MATEMÁTICA DO PONTO DE EQUILÍBRIO	31
5 RESULTADOS E DISCUSSÕES	37
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	42
REFERÊNCIAS	44

1 INTRODUÇÃO

Após o fim da Segunda Guerra Mundial, o centro da relação comercial de compra e venda se desloca, partindo de um eixo inicial em direção ao intuito primordial de satisfazer o cliente. Com isto, o modelo de hegemonia mercadológica vivenciado até aquele momento por empresas se remodela para dar lugar a um panorama em que o cliente apresenta exigência de qualidade e reclama prazos ágeis, além da variedade de produtos. A esse fenômeno deu-se o nome de *Marketing-in* (KOTLER, 1998).

O aumento da concorrência comercial fez com que as empresas passassem a enxergar o mercado de uma nova forma, dando maior atenção ao alcance da satisfação de seus clientes. Os produtos, que antes seguiam regras de extrema padronização, passaram a atender as tendências e requisitos ditados pelos consumidores, caracterizando uma inversão do modelo de mercado. Esta nova relação de mercado teve efeito significativo nas margens de lucro, que ficaram cada vez menores. Desta forma as empresas começaram a buscar resultados mais eficientes em suas operações ao invés de tentar passar os custos de sua ineficiência ao consumidor (CHING, 2006).

Entendendo esta necessidade das empresas modernas de minimizar seus custos de produção, para que assim mantenham-se competitivas no mercado, a utilização da matemática como ferramenta fundamental na solução de problemas de decisão diários é imprescindível para uma boa gestão de custos e operações.

Diariamente gestores de empresas de diversos setores se deparam com problemas dentro de suas organizações, decisões difíceis de se tomar de modo empírico, levando em conta apenas a experiência dos envolvidos como base para solução. Um desses problemas é a definição do ponto de equilíbrio para uma produção não homogênea, que segundo CREPALDI (2004, p. 130) “a expressão

ponto de equilíbrio, tradução de break-even-point, refere-se ao nível de venda em que não há lucro nem prejuízo, ou seja, onde os custos totais são iguais às receitas totais”.

Uma importante ferramenta da Engenharia de Produção são os modelos matemáticos fornecidos pela subárea da Programação Matemática chamada Pesquisa Operacional. O modelo matemático desta área tem como objetivo primal a minimização ou maximização de determinadas funções. Estes modelos são amplamente utilizados e possuem diversas aplicações.

A Pesquisa Operacional é uma das grandes áreas da Engenharia de Produção que auxilia no processo de tomada de decisão na qual podemos citar duas temáticas consideradas importantes nesse estudo: a programação linear e a programação linear inteira. Segundo ABEPRO a área da Engenharia de Produção tem como objetivo precípuo a

Resolução de problemas reais envolvendo situações de tomada de decisão, através de modelos matemáticos habitualmente processados computacionalmente. Aplica conceitos e métodos de outras disciplinas científicas na concepção, no planejamento ou na operação de sistemas para atingir seus objetivos. Procura, assim, introduzir elementos de objetividade e racionalidade nos processos de tomada de decisão, sem descuidar dos elementos subjetivos e de enquadramento organizacional que caracterizam os problemas (ABEPRO,2009).

Neste trabalho também foram abordadas temáticas da Contabilidade Gerencial, uma subárea da Engenharia Econômica, outro grande ramo existente dentro da engenharia de produção, que se preocupa com a gestão eficiente dos custos de produção e operações e do gerenciamento dos recursos existentes para execução das atividades administrativas.

Academicamente este problema é bastante pertinente, visto que não há muitos trabalhos que abordem esta problemática do ponto de vista da otimização fornecida pela Pesquisa Operacional. Existe também uma relevância técnica para

Universidade Federal do Vale do São Francisco pelo fato de ser inovador, já que através do Trabalho de Conclusão de Curso de MAIA FILHO (2017) foi possível perceber a escassa quantidade de trabalhos nas áreas de modelagem matemática e simulação feito nos últimos anos pelos alunos do curso de Engenharia de Produção.

Um outro aspecto importante é a sua pertinência prática, pois é de grande interesse de gestores industriais as informações fornecidas pela solução teórica do problema exposto, já que a otimização deste problema pode gerar lucros para as empresas e indústrias que a adotarem como prática operacional.

Desta forma este trabalho se apoiou na extrapolação de um conceito já existente dentro da Contabilidade Gerencial empenhando-se em apresentar uma modelagem matemática dentro do escopo da PO que represente um sistema de produção não homogêneo, de forma que sua solução forneça a quantidade e diversidade ideal de produtos a serem manufaturado, que possuam o menor custo variável e alcancem o ponto de equilíbrio.

A metodologia utilizada no trabalho foi a pesquisa axiomática normativa, esta é uma metodologia de pesquisa específica para modelagem matemática que envolvem problemas de pesquisa operacional, geralmente problemas de programação matemática. Este tipo de pesquisa desenvolve normas, políticas, estratégias e ações para melhorar o desempenho de problemas já existentes na literatura ou comparar estratégias de solução para um mesmo problema (MORABITO E PUREZA, 2012).

1.1 PROBLEMÁTICA

O problema do ponto de equilíbrio é comum em atividades de contabilidade gerencial, porém sua abordagem nos livros da área, em geral, não expressa a complexidade existente nesse problema, por exemplo, no caso em que

uma linha de produção qualquer possui mais de um tipo de produto sendo manufaturado.

Conforme definido por CREPALDI (2004, p. 130) “a expressão ponto de equilíbrio, tradução de break-even-point, refere-se ao nível de venda em que não há lucro nem prejuízo, ou seja, onde os custos totais são iguais às receitas totais”.

Matematicamente esse problema pode ser representado por uma equação, cuja a raiz é o ponto de equilíbrio. A partir desta ideia é possível recolher informações úteis para formulação do problema em questão.

Para realizar o cálculo do ponto de equilíbrio são necessárias informações acerca do preço de venda, custo unitário, também chamado de custo variável unitário, e do custo fixo total. De posse dessas informações pode-se calcular a margem de contribuição, e após isso, dividir o custo fixo pela margem de contribuição.

Este problema pode ser expresso através de um gráfico em duas dimensões, já bastante utilizado na literatura, conforme pode ser visto em CREPALDI (2004, p. 59) na Figura 4.2 Ponto de Equilíbrio. Desta forma surge o problema de pesquisa a que este trabalho se dedica: é possível desenvolver uma modelagem matemática alternativa para o ponto de equilíbrio de produção, de modo a contribuir para redução dos custos de fabricação em uma planta industrial não homogênea?

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

Analisar como a modelagem matemática pode contribuir para redução dos custos variáveis de fabricação em uma planta industrial genérica não homogênea.

1.2.2 Objetivos Específicos

Estudar os métodos usuais de cálculo do ponto de equilíbrio e os métodos de solução de problemas de programação linear e programação linear inteira. Em seguida, construir uma modelagem matemática em forma de problema de Programação Matemática que descreva um sistema de produção não homogêneo. O terceiro objetivo consistiu em simular numericamente o sistema descrito, de forma a identificar as flutuações existentes entre decisões. Por fim, analisar a viabilidade da aplicação do modelo em problemas reais.

Este trabalho está estruturado em cinco capítulos, além deste capítulo de introdução, o restante do trabalho está estruturado da seguinte forma: No Capítulo II formaliza-se a elaboração de um referencial teórico necessário para o embasamento das discussões feitas no trabalho. Apresenta-se algumas referências sobre Pesquisa Operacional, Programação Linear, Programação Linear Inteira, Contabilidade Gerencial, Estrutura de Dados e Método Branch and Bound; No Capítulo III apresentam-se os procedimentos metodológicos utilizados neste trabalho, sendo exposto o método escolhido para realização da pesquisa como também o passo-a-passo seguido para elaboração da modelagem proposta; No Capítulo IV desenvolve-se a modelagem matemática do problema do ponto de equilíbrio em forma de Programação Linear Inteira. Finalmente, na Capítulo V expõe-se os resultados da pesquisa, além da realização de uma discussão sobre a importância gerencial do mesmo. Também são feitas sugestões para trabalhos futuros e discute-se como a complexidade deste problema pode ser explorada mais profundamente.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 PESQUISA OPERACIONAL

A Pesquisa Operacional surgiu nos primórdios da Segunda Guerra Mundial, quando a necessidade de alocação de recursos humanos em operações militares levou a uma abordagem científica da gestão das operações por parte dos generais e comandantes. Foi então que os comandos britânicos e norte-americanos contrataram diversos cientistas para tratar de assuntos estratégicos como alocação de recursos para operações militares (HILLIER, 2013).

Foram solicitados a estes grupos de cientistas que realizassem pesquisas sobre operações militares, daí o surgimento do nome de Pesquisa Operacional. Essas pesquisas tiveram grande influência na guerra, especificamente na Batalha Aérea na Grã-Bretanha e na Batalha do Atlântico (HILLIER, 2013).

Após o fim da guerra houve um grande crescimento industrial e o grande sucesso da Pesquisa Operacional despertou o interesse da indústria. A medida que os sistemas industriais se tornavam maiores e mais complexos, as decisões tornaram-se mais difíceis. Foi então que em 1950 a Pesquisa Operacional foi implementada como ferramenta de otimização da gestão em diversos setores como as indústrias, o comércio e o governo (HILLIER, 2013).

É possível identificar dois grandes fatores que contribuíram para o avanço do campo da Pesquisa Operacional. Um primeiro grande fator foi o avanço das técnicas de solução de problemas de programação linear, como por exemplo o *método simplex* desenvolvido por George Dantzig, em 1947, este algoritmo possibilitou a solução de problemas de programação linear com um grande número de variáveis. Um segundo fator foi a *revolução computacional* ocorrida na década de 60. A criação de computadores pessoais com alta capacidade de cálculos, resultou em desenvolvimento de novos algoritmos para solução de problemas de programação linear. Computadores com maior capacidade de cálculos, permitiram aos pesquisadores realizar cálculos com um maior número de variáveis e assim representar melhor a complexidade dos novos sistemas estudados (HILLIER, 2013).

A Pesquisa Operacional não é um ramo acabado, ainda possui muitas pesquisas voltadas a construção de novos modelos e implementação de algoritmos capazes de solucionar estes de maneira mais eficiente. A construção de novos modelos e a capacidade de solucionar problemas cada vez mais complexos permite uma aproximação cada vez maior dos fenômenos reais estudados, trazendo mais

confiabilidade aos resultados e uma maior implantação dos métodos por parte de empresas, indústrias, governos e pesquisadores de outras áreas.

2.2 PROGRAMAÇÃO LINEAR

O desenvolvimento da Programação Linear pode ser considerado um dos maiores avanços científicos do século XX. O seu impacto desde os anos de 1950 é notório em diversas áreas do conhecimento. Atualmente a maior parte da computação científica é dedicada à solução de problemas de Programação Linear (HILLIER, 2013).

O problema de Programação Linear consiste em encontrar o melhor conjunto de pontos que maximizem ou minimizem uma determinada função linear sujeita a um conjunto de restrições lineares. Segundo HILLIER (2013, p. 20), “em programação linear, o tipo mais comum de informação envolve o problema genérico de alocar da melhor forma possível (isto é, de forma ótima) *recursos limitados* para *atividades que competem entre si*”. Esta definição possui uma enorme variedade de situações em que podem ser aplicadas. Porém, em todas elas o fator comum é a necessidade de alocação de recursos em atividades a um determinado nível (HILLIER, 2013).

2.2.1 O modelo de Programação Linear

O modelo de Programação Linear possui algumas terminologias próprias e notações básicas. Na Tabela 1 podemos verificar algumas dessas terminologias. Os termos mais comuns são *recursos* e *atividades*, sendo que nestes termos m e n representam os m -recursos disponíveis e as n -atividades a serem feitas (HILLIER, 2013).

Tabela 1: Terminologia comum para a Programação Linear

Exemplo-Prótipo	Probema Genérico
Capacidade de Produção de três fábricas industriais	Recursos, m -recursos
Fabricação de Produtos	Atividades
Dois Produtos	n -atividades
Taxa de produção do produto j , x_j	Nível de atividade j , x_j

Lucro Z	Medida de desempenho global
---------	-----------------------------

Fonte: Adaptado de HILLIER, 2013 p. 27

Uma maneira mais formal de representar um problema de Programação Linear é a utilização de notação matemática. Essa notação é chamada de forma-padrão de modelo (HILLIER, 2013).

2.2.2 Forma-padrão do Modelo

A partir dessa formulação matemática foi possível adotar uma terminologia padrão. A função linear que está sendo maximizada é chamada de função objetivo, e é o alvo principal da solução geral. As demais funções são chamadas de restrições, elas são as limitações do modelo, geralmente representam limitações físicas reais. Também se têm as restrições de não negatividade, estas são restrições importantes em alguns modelos onde as variáveis estudadas não podem assumir um valor negativo (HILLIER, 2013).

$$\text{Maximizar } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

Sujeito às restrições

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

e

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

(1)

Este modelo é chamado por HILLIER (2013) de forma-padrão de um problema de Programação Linear. Todos os problemas que podem ser descritos utilizando um modelo como este é chamado de Problema de Programação Linear.

O problema (1) também pode ser representado na forma matricial.

$$\max c^T x$$

Sujeito às restrições

$$Ax = b \tag{2}$$

$$x \geq 0$$

O conjunto do ponto $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ que satisfazem as restrições em (1) é chamado de região viável do problema de Programação Linear. Um ponto dentro dessa região é um candidato a solução ótima do problema.

2.2.3 Terminologia para Soluções de Modelos

As soluções para problemas de Programação Linear também possuem terminologias próprias. Problemas de Programação Linear podem possuir mais de uma solução, ou às vezes, nenhuma solução. Desta forma podemos classificar as soluções em diferentes grupos (HILLIER, 2013).

É possível classificar as soluções encontradas em quatro diferentes nomenclaturas: Solução Viável, Solução Inviável, Nenhuma Solução Viável e Solução Ótima. Uma solução viável é aquela em que todas as restrições são satisfeitas, porém não há garantias de que seja ótima. Por sua vez, uma solução inviável possui pelo menos uma restrição não satisfeita. Há também o caso em que nenhuma das combinações das variáveis resulta em uma solução, neste caso, pode-se dizer que não foi encontrada nenhuma solução viável. Por fim, há ainda o caso da solução ótima que ocorre quando a solução é viável e ao mesmo tempo possui o melhor valor para Z , seja este de maximização ou minimização.

2.2.4 Garantia de Solução

O conceito de função côncava ou convexa está alinhado com o tipo de curvatura de uma função. De fato, uma função pode ter curvatura “para cima” ou “para baixo” ou até mesmo ambas ao longo de um eixo. O teste de convexidade de uma função pode dar informações importantes sobre a garantia de solução ótima por alguns algoritmos.

Um conjunto convexo é um conjunto Ω de pontos, que para cada par de pontos pertencentes ao conjunto, o segmento de reta que une esses dois pontos também se encontra dentro do conjunto. Isto é, Ω é um conjunto convexo se e somente se $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in \Omega$ para todo $x_1, x_2 \in \Omega$ e $\alpha \in [0,1]$. Logo é possível notar que “na realidade, a região de soluções viáveis para *qualquer* problema de programação linear é um conjunto convexo” HILLIER (2013, p. 521).

Definição 1: Uma função f definida em um conjunto convexo Ω é dita convexa se, para todo $x_1, x_2 \in \Omega$ e todo $\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1$, vale a desigualdade

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \quad (3)$$

Se, para $0 \leq \alpha \leq 1$ e $x_1 \neq x_2$, vale a desigualdade

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \quad (4)$$

então a função f é dita ser estritamente convexa.

Geometricamente, a desigualdade em (3) indica um segmento de reta do ponto $(x_1, f(x_1))$ para $(x_2, f(x_2))$ fica sempre acima do gráfico de f conforme mostrado na Figura 1.

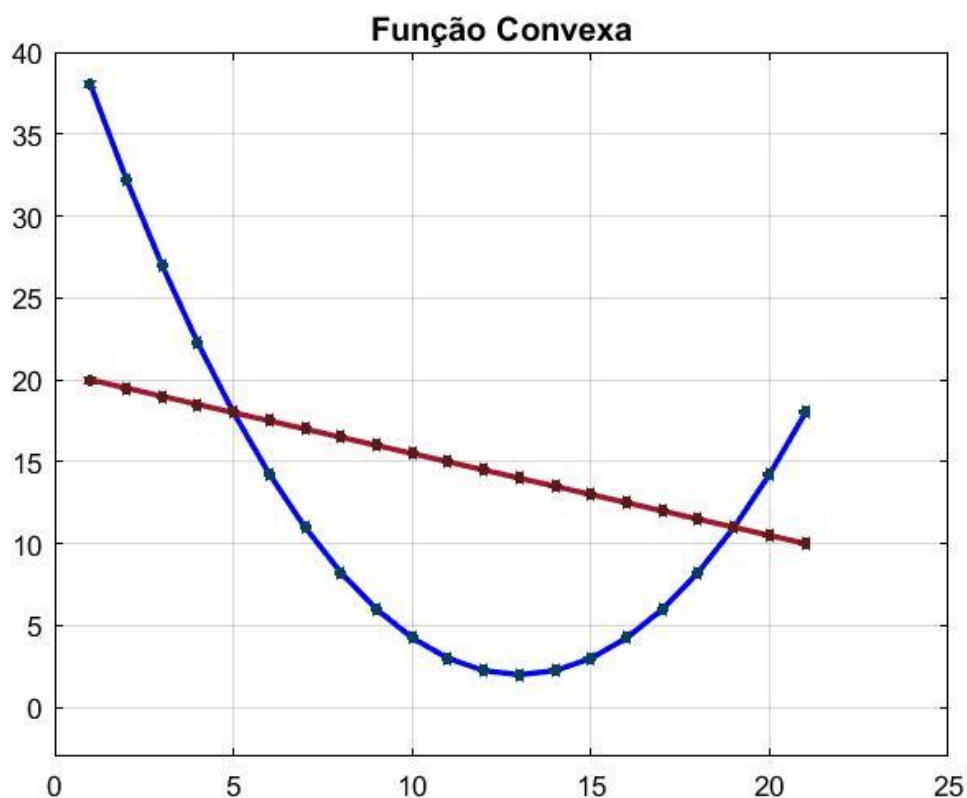


Figura 1: Função Convexa

É possível mostrar que se a função objetivo for uma função convexa e a região de soluções viáveis for um conjunto convexo, então, há garantia de que o mínimo local é também um mínimo global (HILLIER, 2013). No problema de Programação Linear a função objetivo é convexa e a região viável é um conjunto convexo.

2.3 PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA

A Programação Linear Inteira (PLI) é uma variação do problema de PL descrito anteriormente, onde é adicionada ao modelo uma restrição que impede a divisibilidade das variáveis de decisão, ou seja, permite apenas que estas sejam inteiras. Em muitos problemas práticos, as variáveis de decisão só fazem sentido se possuírem valores inteiros. Por exemplo, alocar pessoas, máquinas e veículos às atividades requer o valor de variáveis inteiras.

Desta forma, se as restrições do problema for a necessidade de valores inteiros em suas variáveis de decisão, e esta for a única forma pela qual o problema se afaste da formulação de um problema de PL, então este será um caso de Programação Linear Inteira.

Existem também dentro da PLI outras classes de problemas, como a Programação Linear Binária (PLB). Em particular, este tipo de programação ocorre quando as variáveis de decisão devem ser inteiras, porém, seus valores só podem assumir 0 (zero) ou 1 (um) (BELFIORE E FÁVERO, 2013).

Tabela 2: Características dos problemas de Programação Linear Inteira e suas Extensões

Tipo de Modelo	Função Objetivo	Restrições	Tipo de Variável de Decisão
Programação Linear Inteira (PLI ou PI)	Linear	Linear	Discreta
Programação Linear Inteira Mista (PLIM ou PIM)	Linear	Linear	Discreta e Contínua
Programação Linear Binária (PLB ou PB)	Linear	Linear	Binária
Programação Linear Binária Mista (PLBM ou PBM)	Linear	Linear	Binária e Contínua
Programação Linear Inteira Binária (PLIB) ou (PIB)	Linear	Linear	Discreta e Binária

Fonte: Adaptado de BELFIORE E FÁVERO, 2013 p. 356

A Tabela 2 mostra um resumo dos tipos de modelo de Programação Inteira conforme descrito por BELFIORE E FÁVERO (2013, p. 356).

2.4 CONTABILIDADE GERENCIAL

Antes da revolução industrial a economia era constituída basicamente por empresas comerciais e artesão. Estes, utilizavam a contabilidade financeira basicamente para avaliação dos resultados em um determinado período de atividade comercial. A avaliação era feita subtraindo-se da receita do período o custo das mercadorias obtidas anteriormente, obtendo-se assim o lucro bruto. Desse lucro eram deduzidos custos extraordinários incorridos para o funcionamento da empresa naquele período. Esse processo ficou conhecido como demonstrativo de resultado e ainda hoje é a base da contabilidade de custos (BORNIA, 2009).

Com o surgimento de empresas industriais após a revolução industrial, surgiu também a necessidade de uma contabilidade de custos mais precisa, com o intuito de determinar o custo dos produtos por unidade produzida. Empresas industriais precisavam agora determinar o custo de um produto, pois este não era mais comprado pronto e sim manufaturado em uma linha de produção a partir de diversos insumos e mão de obra. O crescimento das empresas trouxe também o aumento da complexidade na avaliação e determinação dos custos em sistemas de produção. Com isso, percebeu-se que as informações fornecidas pela contabilidade de custos eram úteis no auxílio gerencial e na tomada de decisão por gestores (BORNIA, 2009).

Tabela 3: Demonstrativo de Resultado

Tipo	Natureza
(+)	Vendas
(-)	Custos dos Produtos Vendidos
	Lucro Bruto
(-)	Despesas Administrativas
(-)	Despesas Comerciais
(-)	Despesas Financeiras
	Lucro Líquido

A Tabela 3 mostra a estrutura resumida do demonstrativo de resultado. Onde o Tipo são as operações algébricas realizadas e a Natureza referem-se as variáveis.

2.4.1 Custeio Variável

Um dos métodos desenvolvidos para calcular o custo de produção em um período chama-se custeio variável. Este método consiste em classificar os custos em Custos Fixos e Custos Variáveis, sendo estes em função do volume de produção. Os custos fixos independem do volume de produção e permanecem o mesmo ao longo de um determinado período de atividade. Em contrapartida, os custos variáveis estão fortemente ligados ao volume de produção e aumentam proporcionalmente com o nível de produção

As decisões de uma empresa estão relacionadas a saber quanto produzir de cada item de sua linha de produtos, de modo a tirar o maior proveito possível de informações sobre custos. Desta forma, o custo variável de manufatura é uma informação crucial no processo decisório sobre programação da produção (BORNIA, 2009).

2.4.2 Margem de Contribuição

A Margem de Contribuição é um indicador técnico muito útil que os gerentes ou *Controllers*¹ podem utilizar para uma tomada de decisão eficiente. Informações sobre a margem de contribuição de produtos podem ser úteis para decisões como: aumentar ou reduzir uma linha de produção, decidir sobre estratégias de preço e volume ou analisar desempenho de uma linha de produção (CREPALDI, 2004).

Desta forma, a mesma pode ser definida como a diferença entre o preço de venda e a soma dos custos e despesas variáveis. De forma mais conceitual, segundo CREPALDI (2004, p. 129), “ podemos entender a margem de contribuição como a parcela do preço de venda que ultrapassa os custos e despesas variáveis e que contribuirá (daí o seu nome) para absorção dos custos fixos e, ainda, para formar lucro”.

Sendo *MC* a Margem de Contribuição, *PV* o Preço de Venda, *CV* o Custo Variável e *DV* as Despesas Variáveis, podemos definir, a equação para o cálculo da margem de contribuição do seguinte modo:

¹ É o profissional responsável pelo planejamento, coordenação, direção e controle das atividades de curto, médio e longo prazo executadas nas áreas de planejamento, controladoria e finanças.

$$MC = PV - CV - DV \quad (5)$$

2.4.3 Ponto de Equilíbrio

O ponto de equilíbrio ou *break-even-point* (BEP) é um conceito muito importante para a contabilidade gerencial, pois a informação cedida pelo cálculo do ponto de equilíbrio é de suma importância para um bom planejamento da produção, além de ser um excelente indicador para se fazer planejamento de vendas eficaz já que a expressão ponto de equilíbrio refere-se ao nível de venda onde as receitas totais são iguais aos custos totais. sendo as receitas totais o valor monetário recebido pela venda dos produtos. De forma análoga, os custos totais são os valores monetários incorridos para se manufaturar os produtos (CREPALDI, 2004).

O termo Ponto de Equilíbrio, também conhecido como ponto de ruptura, ou ainda como, equilíbrio comercial, é geralmente representado na forma de equações que diferem um pouco de autor para autor. CREPALDI (2004, p. 132), define o ponto de equilíbrio como sendo a razão entre o custo fixo total (CF_T) pela margem de contribuição (MC). Ou seja,

$$q = \frac{CF_T}{MC} \quad (6)$$

Desta forma, obtém-se o número q de produtos que ao serem vendidos cobririam os custos variáveis e o custo fixo da linha de produção.

Outra forma de calcular o ponto de equilíbrio é apresentada por Potkanya e Krajcirova (2015). Neste modelo, os autores incorporam a receita total no cálculo do ponto de equilíbrio.

$$BEP = \frac{CF_T}{1 - \frac{CV}{R_T}} \quad (7)$$

em que CF_T é o custo fixo total, CV representa o custo variável total e R_T diz respeito a receita total.

A representação gráfica do ponto de equilíbrio se dá geralmente através de um plano cartesiano relacionando receita versus volume de produção, conforme apresentado a seguir na Figura 3.

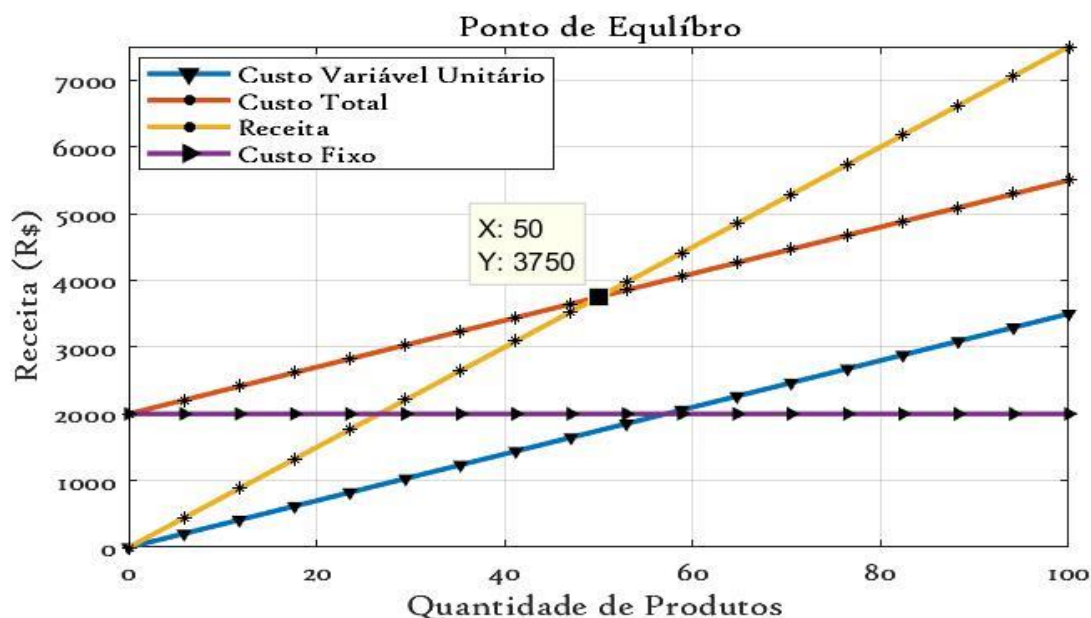


Figura 2: Ponto de Equilíbrio

A Figura 2 apresenta o gráfico do ponto de equilíbrio em um sistema de produção homogêneo. O ponto de equilíbrio se localiza na intersecção das retas que definem a Receita e o Custo Total. O resultado mostra que o ponto de equilíbrio para essa situação genérica seria de 50 produtos, que teria uma receita de R\$ 3.750,00.

2.5 ESTRUTURA DE DADOS

Estrutura de Dados é o nome dado ao campo da ciência que estuda como organizar e separar dados, transformando-os em um conjunto de informações úteis. Uma maneira de estruturar dados é a *Árvore*, estas podem ser *Árvore Binárias Completas* ou *Árvore Binárias Incompletas*, conforme ilustrado nas Figuras 4 e 5 (TENENBAUM, 1995).

Uma árvore é um conjunto finito de elementos que pode ser particionado em três subconjuntos disjuntos. O primeiro subconjunto é chamado *raiz* da árvore. Os outros dois subconjuntos são os *ramos* da árvore, estes são referenciados como ramos da esquerda ou ramos da direita. Um ramo de uma árvore pode se tornar a raiz de um novo conjunto de ramos, no caso de árvores binárias completas, uma raiz gera sempre dois ramos. Cada elemento de uma árvore é chamado de *nó* da árvore (TENENBAUM, 1995).

Existem, dentro da estrutura de dados em árvore, estratégias de busca por nós. Duas destas estratégias são chamadas de Busca em Profundidade e

Busca em Largura. A Busca em Profundidade consiste em escolher como ponto de partida o nó criado mais recentemente, desta forma, a busca por um determinado nó de uma árvore avança através de um de seus ramos, até encontrar o nó procurado, ou finalizar esse ramo da árvore. Já a Busca em Largura consiste em se escolher o nó mais antigo da árvore como ponto de partida para a busca, desta forma, todos os ramos criados por uma raiz são verificados, antes que se passe para o próximo ramo (BELFIORE E FÁVERO, 2013).

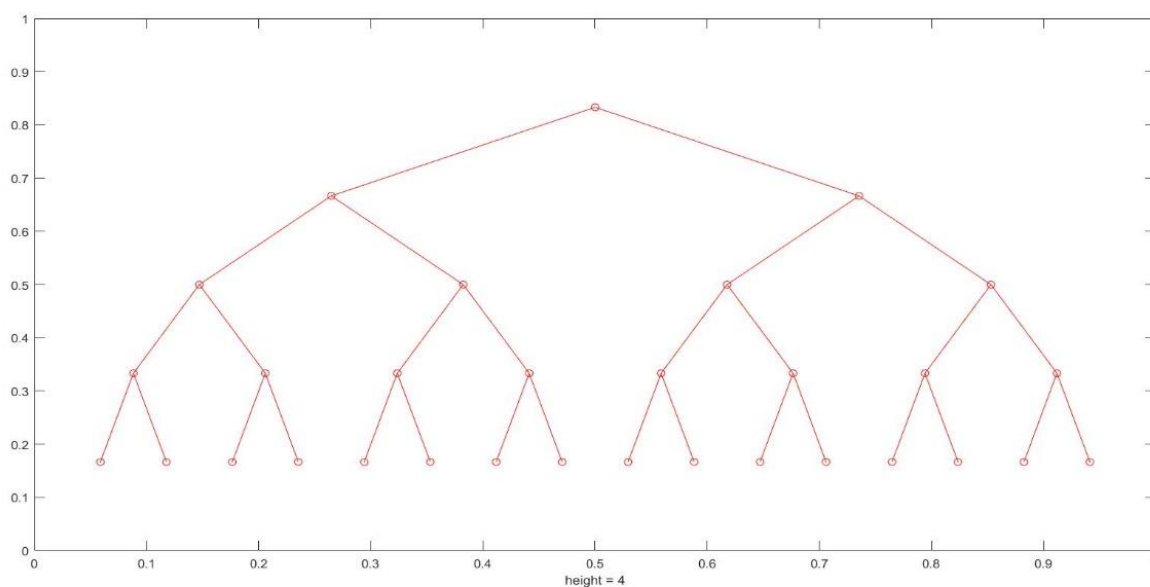


Figura 3: Árvore Binária Completa

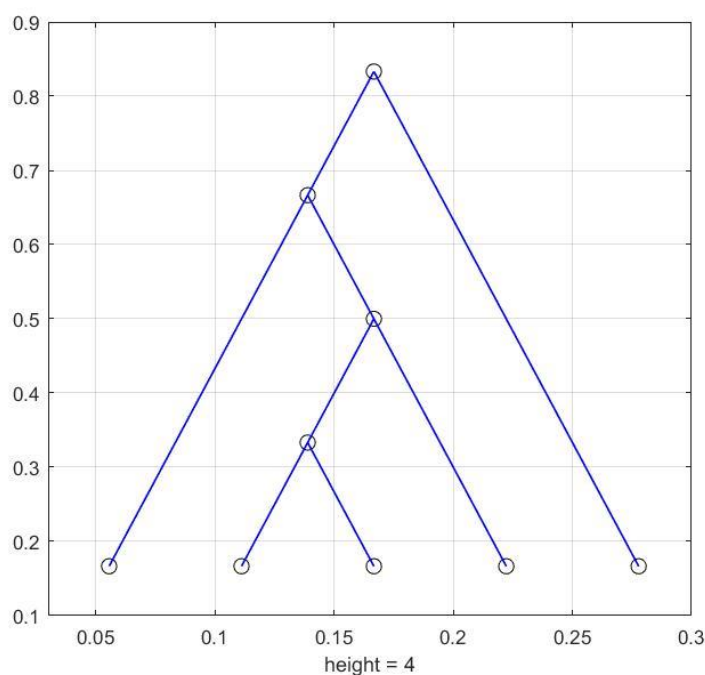


Figura 4: Arvore Binária Incompleta

2.6 MÉTODO DE BRANCH AND BOUND

O algoritmo de Branch and Bound (B&B) é um método de divisão e conquista para busca por soluções de problemas do tipo PLI. Foi proposto por Land e Doig em 1960. O algoritmo se baseia em dividir o problema primal em dois subproblemas menores, resolve-se então estes problemas de instâncias menores, ou, quando não é possível, divide-se estes novamente em dois novos subproblemas. Desta forma, as soluções dos subproblemas menores são combinadas até que se obtenha uma solução ótima para o problema original, ou até que todos os subproblemas não possuam solução.

O algoritmo de B&B tem como estrutura de solução uma árvore binária incompleta, onde cada nó representa um subproblema do problema existente no nó anterior. O método de busca por solução utilizado no algoritmo B&B é a busca em largura. Este método de busca é utilizado por ser computacionalmente mais econômico em termos de tempo de busca e gasto de memória (BELFIORE E FÁVERO, 2013).

Os subproblemas criados no método de B&B são problemas de PL, obtido por meio de “relaxações” no problema de PLI e, por sua vez, devem ser resolvidos por algoritmos específicos, como por exemplo, o algoritmo Simplex ou o Método de Pontos Interiores que são métodos eficientes para este tipo de problema. Estas relaxações no problema substituem a restrição de integridade, por limites ou cortes que passam por números inteiros, desta forma garante-se que ao encontrar um valor para uma das variáveis de decisão, este valor será inteiro.

Com relação ao método Simplex e Pontos Interiores ambos os são iterativos e uma comparação simples, e usual entre eles, revela que o método simplex realiza muito mais iterações que os métodos de pontos interiores, porém estas possuem um custo computacional menor. De fato, de um modo geral, o número de iterações do método de pontos interiores do tipo primal-dual é pequeno, porém cada iteração do método envolve um alto custo computacional devido a necessidade de resolução de pelo menos um sistema linear a cada iteração. Contudo, os métodos de pontos interiores têm se mostrado uma excelente alternativa ao método Simplex na resolução de problemas lineares de grande porte.

No contexto do método B&B, o cálculo de pontos iniciais avançados por meio da resolução de um problema de PL oriundo de relaxações de problemas de

programação linear inteira é uma necessidade prática e a utilização de métodos de pontos interiores pode ser única opção para a solução desse tipo de problema quando o número de variáveis envolvidas é muito grande. A teoria básica de métodos de pontos interiores pode ser consultada em (WRIGHT, 1997).

3 METODOLOGIA

A construção do modelo matemático proposto neste trabalho seguiu algumas etapas, conforme descrito nesse capítulo. Este trabalho, pode ser classificado metodologicamente de acordo com GANGA (2012), possui metodologia de pesquisa de natureza **Aplicada**, de abordagem **Quantitativa**, de objetivos **Descritivos** e com procedimentos técnicos de **Modelagem e Simulação**.

A sua natureza é aplicada devido a sua característica de gerar conhecimentos para aplicação prática no chão de fábrica e remete a proposição inicial de um engenheiro de produção.

Um profissional com sólida formação científica e profissional geral que o capacite a identificar, formular e solucionar problemas ligados às atividades de projeto, operações e gerenciamento do trabalho e de sistemas de produção de bens e/ou serviços, considerando seus aspectos humanos, econômicos, sociais e ambientais, com visão ética e humanista em atendimento as demandas da sociedade (GANGA, 2012, p. 207).

Quanto a abordagem da pesquisa, a mesma pode ser classificada como quantitativa uma vez que existe a capacidade de se quantificar variáveis numericamente e confirmar relações de causa e efeito, aceitando ou rejeitando estatisticamente uma hipótese ao seu respeito. Com relação aos objetivos, os mesmos são descritivos, pois descrevem as características de um determinado fenômeno ou as relações entre determinadas variáveis. Do ponto de vista dos procedimentos técnicos, os recursos utilizados serão de modelagem e simulação, pois pode-se construir um modelo como uma representação da realidade, idealização ou abstração de um sistema real. Desta forma, o modelo objetiva criar uma representação válida reunindo dados, restrições e variáveis, para fornecer ao usuário informações otimizadas para uma gama de cenários (GANGA, 2012).

Por outro lado, do ponto de vista dos objetivos a metodologia que conduziu o desenvolvimento deste trabalho baseou-se no método de pesquisa **Axiomática Normativa**. Neste tipo de pesquisa novos modelos de otimização ou variações de modelos existentes podem ser propostos pelo pesquisador, como um modelo idealizado, o pesquisador utiliza-se de métodos conhecidos e amplamente desenvolvidos para solucionar os problemas. Também podem ser desenvolvidos novos métodos de solução de problemas já existentes, métodos mais eficientes

geralmente em relação ao custo computacional ou a complexidade do problema (MORABITO E PUREZA, 2012).

A construção de um modelo matemático de Pesquisa Operacional envolve a abstração do sistema real em um sistema idealizado. Primeiramente, o modelo real e idealizado é descrito de forma verbal pelo pesquisador. Isso é chamado de *modelo conceitual*. Em seguida, o modelo conceitual é transformado em um modelo matemático ou *Analítico* através da abstração matemática do pesquisador. No entanto é razoável esperarmos que o modelo matemático possua simplificações em relação ao sistema real, estas simplificações não retiram a validade do modelo se forem feitas de modo a representar satisfatoriamente o sistema estudado (MORABITO E PUREZA, 2012).

Ainda na fase de construção do modelo é que o pesquisador define quais variáveis entraram no modelo e quais as relações existentes entre essas variáveis. Além disso, na dedução do problema são utilizadas técnicas matemáticas, e em casos mais complexos, são usados algoritmos para sua dedução. Por fim, discute-se se o modelo encontrado possui significado ou lógica com a realidade observada e a partir daí segue-se para solução do modelo proposto (MORABITO E PUREZA, 2012).

Na terceira fase, que é a solução do modelo, o pesquisador utiliza algoritmos computacionais para solucionar o problema por meio do modelo proposto na fase anterior. Estes algoritmos geralmente já são bastante conhecidos na literatura e possuem implementações prontas em alguns softwares, porém pode ser também desenvolvido um novo algoritmo para solucionar o problema, caso este tenha especificações únicas. É nessa fase também que são realizadas testes de sensibilidade (questões do tipo *what-if*) para identificar possíveis erros de modelagem ou mal desempenho do algoritmo escolhido (MORABITO E PUREZA, 2012).

Essa fase de solução do modelo é de suma importância para pesquisas axiomáticas principalmente pesquisas do tipo axiomática normativa, da qual se trata este trabalho. É comum nesta fase fazer comparações entre métodos já utilizados na literatura e o método escolhido podendo assim verificar a robustez dos resultados obtidos (MORABITO E PUREZA, 2012).

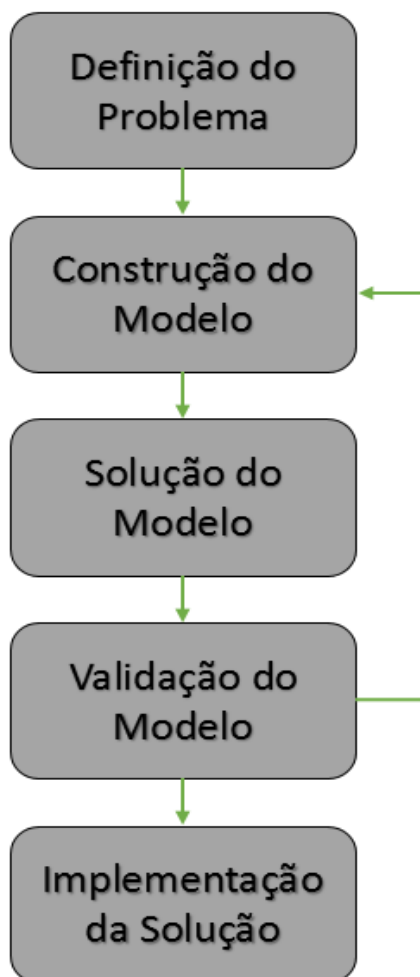


Figura 5- Fluxograma das etapas de modelagem

Fonte: Adaptado de GANGA, 2012 p. 254

Na Figura 5 podemos ver o fluxograma das etapas de modelagem matemática de um problema de Pesquisa Operacional. Neste trabalho não foram realizadas todas as etapas descritas por GANGA (2012), atendo-se apenas as primeiras três fases que são: definição do problema, construção do modelo e solução do modelo.

Sendo assim, o desenvolvimento deste trabalho seguiu as etapas descritas por MORABITO E PUREZA (2012) e GANGA (2012) para realização dos procedimentos de modelagem matemática do problema em forma de problema de Pesquisa Operacional, mais especificamente problema de Programação Linear Inteira.

4 MODELAGEM MATEMÁTICA DO PONTO DE EQUILÍBRIO

Inicialmente, são apresentadas duas definições do problema de ponto de equilíbrio. A primeira definição, mais didática, aparece mais frequentemente na literatura especializada, enquanto que a segunda é uma extensão da primeira para os casos em que existem mais de um produto na linha de produção. Nesta segunda definição são agregados os conceitos da Pesquisa Operacional, mais especificamente de PLI, de forma que a sua solução represente o melhor resultado possível para um determinado conjunto de dados iniciais.

Definição 2: Problema Particular Para Produção Homogênea

Seja CF_t o Custo Fixo Total, CV_u o Custo Variável Unitário, PV o Preço de Venda, CT o Custo Total e q as Quantidades a serem produzidas, temos que o custo total de produção é:

$$CT = CF_t + (q * CV_u) \quad (8)$$

Seja RT a Receita Total de vendas da produção definida como:

$$RT = PV * q \quad (9)$$

Desta forma quando a Receita Total de vendas for igual ao Custo Total de produção, o lucro é igual a zero e então o ponto de equilíbrio é definido como:

$$RT = CT \quad (10)$$

$$PV * q = CF_t + (q * CV_u) \quad (11)$$

$$q = \frac{CF_t}{(PV - CV_u)} \quad (12)$$

Sendo assim q é ponto de equilíbrio para produção em uma empresa qualquer que fabrique apenas um tipo de produto. De fato, um problema trivial, porém no mundo real as empresas não possuem linhas de produção altamente tecnológicas e bastante custosas para produzirem apenas um produto específico, salvo em casos muito específicos, para produtos consolidados no mercado, e que possuem uma alta taxa de venda, o mais comum é que estas empresas utilizem de suas plantas industriais para produção de um *mix* de produtos, ou ainda de um mesmo seguimento,

com características bem semelhantes, porém o produto final é diferente um do outro. Como exemplo existe a linha branca de utensílios domésticos como geladeiras, micro-ondas, máquinas de lavar e fogões.

Desta forma o problema (12) se torna um pouco mais complexo necessitando de artifícios matemáticos mais arrojados para encontrar sua solução ótima.

Definição 3: Problema Geral Para Produção Não Homogênea.

Seja CF_t o Custo Fixo Total, CV_{u_i} o Custo Variável Unitário, PV_i o Preço de Venda, CT o Custo Total e q_i as Quantidades a serem produzidas, temos que o custo total de produção é:

$$CT = CF_t + (q_1 * CV_{u_1} + q_2 * CV_{u_2} + q_3 * CV_{u_3} + \dots + q_n * CV_{u_n}) \quad (13)$$

$$RT = q_1 * PV_1 + q_2 * PV_2 + q_3 * PV_3 + \dots + q_n * PV_n \quad (14)$$

simplificando os termos em forma de somatório temos:

$$CT = CF_t + \sum_{i=1}^n (q_i * CV_{u_i}) \quad (15)$$

$$RT = \sum_{i=1}^n (q_i * PV_i) \quad (16)$$

Desta forma quando a Receita Total for igual ao Custo Total de produção, o lucro é zero e então o ponto de equilíbrio é definido como:

$$\sum_{i=1}^n (q_i * PV_i) = CF_t + \sum_{i=1}^n (q_i * CV_{u_i}) \quad (17)$$

$$\sum_{i=1}^n (q_i * PV_i) - \sum_{i=1}^n (q_i * CV_{u_i}) = CF_t \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^n [q_i * (PV_i - CV_{u_i})] - CF_t = 0 \quad (19)$$

Assim, a equação (19) representa o ponto de equilíbrio para os vários produtos que devem ser fabricados a um custo variável e comercializados a um preço de venda.

Aqui temos uma limitação da nossa modelagem, pois o custo variável unitário e o preço de venda são funções que dependem do tempo e têm seus valores variando ao longo de um período muito grande. Para simplificar o problema e torná-lo mais acessível para aplicações, utilizamos estas variáveis como constantes, desta forma é como se tivéssemos retirando uma "fotografia" de um determinado momento no tempo, seja este momento diário, semanal ou mensal, e calculando para aquele estado, o *mix* ótimo de produtos ideal. Uma maneira mais formal e elaborada de se fazer é utilizar o método de Monte Carlo para descobrir as funções de probabilidade que descrevem o preço de venda e o custo variável unitário ao longo de um intervalo, e resolver o problema para um conjunto de valores utilizando assim simulações numéricas de vários estados diferentes ao longo da distribuição de probabilidade que representam essas funções. Porém esta abordagem foge aos propósitos deste trabalho e não são utilizadas, ficando como sugestão para posteriores trabalhos.

Desta forma, cabe ao gerente de produção de uma fábrica descobrir os valores do vetor quantidade $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$ tal que, os custos variáveis de produção sejam os menores possíveis e a equação de ponto de equilíbrio (19) seja respeitada.

Um outro aspecto importante que deve ser levado em consideração na modelagem deste problema são as restrições de capacidade de produção e de demanda dos produtos, pois não teria sentido algum obter um resultado que esteja acima da capacidade de produção da fábrica, isto inviabilizaria a obtenção dos resultados ótimos na prática. Da mesma forma é necessário atender as demandas de mercado, pois a satisfação dos clientes é um objetivo primal para as empresas, sendo assim, a produção deve ter um valor mínimo requerido, limitando o nosso problema a um intervalo definido, com valor mínimo igual a demanda de mercado e valor máximo igual a capacidade de produção.

Em relação a definição de capacidade de produção de uma fábrica, segundo MOREIRA (2008, p. 137) "chamamos de capacidade a quantidade máxima de produtos e serviços que podem ser produzidos em uma unidade produtiva, em um dado intervalo de tempo". A demanda segundo VASCONCELLOS (2006, p. 31) "demanda (ou procura) é a quantidade de determinado bem ou serviço que os

consumidores desejam adquirir, num dado período, dada sua renda, seus gastos e o preço de mercado”.

Desta forma, como a quantidade individual de produtos a serem fabricados de forma a alcançar o ponto de equilíbrio, representadas no vetor \mathbf{q} , não pode ser superiores a capacidade de produção representados no vetor \mathbf{k} . Isto é,

$$q_i \leq k_i \quad (20)$$

Para $i = 1, 2, \dots, n$. Assim, escrevendo

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T \quad (21)$$

$$\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)^T \quad (22)$$

e

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

a restrição de capacidade pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} \quad (24)$$

ou de modo reduzido

$$\mathbf{I}\mathbf{q} \leq \mathbf{k} \quad (25)$$

Em que \mathbf{k} representa o vetor coluna de capacidade máxima de produção para cada um de seus produtos, \mathbf{I} é a matriz identidade e \mathbf{q} é o vetor coluna das incógnitas.

Neste ponto é necessário comentar sobre redundâncias em restrições, poderia ser questionado o porquê de não haver uma restrição de capacidade de armazenamento na modelagem, a resposta para esse questionamento é que se tornaria redundante, caso a capacidade de armazenamento seja maior que a capacidade de produção, desta forma, a restrição da capacidade de produção cria um limite inferior em relação a capacidade de armazenamento, restrição esta que não pode ser ultrapassada, levando a conclusão que o espaço de armazenamento ficaria ocioso, já que se produz menos do que o que se pode guardar. Da mesma forma se a capacidade de armazenamento for menor que a de produção, esta deveria ser utilizada na modelagem pois não faria sentido algum produzir mais do que se pode

armazenar. Com esta visão em mente, abordou-se a ideia de que a capacidade de produção é sempre igual a de armazenamento, sendo ela utilizada como uma restrição no problema.

De forma análoga ao que foi feito com os valores de capacidades individuais, é possível representar as restrições de demandas individuais pelo vetor

$$d = (d_1, d_2, \dots, d_n)^T \quad (26)$$

e usando o vetor q em (21) e a matriz I em (23), pode-se escrever a restrição de demanda da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$Iq \geq d \quad (28)$$

em que I é uma matriz identidade, q é um vetor coluna de variáveis e d é um vetor coluna das respectivas demandas. Os valores do vetor d podem ser obtidos através de técnicas de previsão de demanda utilizando dados históricos das vendas da organização com um intervalo de tempo significativamente representativo e com relativa confiança.

Um fato relevante em relação a restrição de demanda é que esta não pode ser a demanda real, visto que, se o ponto de equilíbrio estiver acima da demanda média real, este não poderá ser alcançado, visto que não existe demanda para tal. Uma solução para essa problemática está em utilizar um fator λ , tal que $\lambda \in (0,1)$ multiplicando o vetor d , este artifício fará com que o vetor λd se localize abaixo da demanda média real, como consequência o ponto de equilíbrio estará localizado dentro da região onde se encontra a demanda média real. Desta forma a inequação (28) se modifica para tal configuração:

$$Iq \geq \lambda d \quad (29)$$

Em última análise, definiremos a função objetivo da modelagem partido da definição de Custo Total (15). Como o Custo Total foi definido como a soma do Custo Fixo Total mais o Custo Variável Unitário, e o Custo Fixo Total permanece

constante ao longo do período analisado, a única maneira de reduzir o custo total é reduzindo o Custo Variável Total.

$$CT = CF_t + \sum_{i=1}^n (q_i * CV_{u_i}) \quad (15)$$

$$Min \sum_{i=1}^n (q_i * CV_{u_i}) \quad (30)$$

Com tais fatos devidamente expostos, podemos formular uma modelagem adequada para o problema de ponto de equilíbrio na forma de um problema de pesquisa operacional, da seguinte forma:

Função Objetivo:

$$Min \sum_{i=1}^n (q_i * CV_{u_i}) \quad (30)$$

Sujeito as Restrições:

$$\sum_{i=1}^n [q_i * (PV_i - CV_{u_i})] - CF_t = 0 \quad (19)$$

$$Iq \leq k \quad (25)$$

$$Iq \geq \lambda d \quad (29)$$

$$q_i \geq 0; PV_i > CV_{u_i}; q_i \in \mathbb{Z}; \lambda \in (0,1)$$

Assim é possível descrever matematicamente através desta formulação de um problema de Pesquisa Operacional um sistema de produção não homogêneo em que suas restrições representam tanto limitações físicas como a capacidade de produção, quanto limitações teóricas como o Ponto de Equilíbrio.

No próximo capítulo são apresentados os resultados numéricos obtidos a partir da aplicação do modelo proposto em dados retirados do trabalho de Potkanya e Krajcirova (2015). Além disso, são realizados cálculos com dados reais obtidos em uma empresa localizada no Vale do São Francisco.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A seguir são apresentados os resultados obtidos através da modelagem proposta e do modelo vigente, faz-se um comparativo geral entre os custos variáveis de produção entre os dois métodos na Tabela 8. Os dados utilizados para os cálculos foram obtidos em uma empresa local, esta possui em seu *mix* de produtos cerca de dez variedades diferentes de uvas. No entanto, neste trabalho foram utilizados apenas três produtos diferentes, com duas variedades de uva, sendo estes: caixa de uva Mista, caixa de uva Arra15 e caixa de uva Vitória. A caixa de uva Mista contém as duas variedades sendo, metade Arra15 e metade Vitória.

Os dados a seguir foram coletados com a empresa em questão, durante o período de julho de 2018 a outubro de 2018.

Tabela 4: Dados dos Produtos

	Caixa Mista	Caixa Arra 15	Caixa Vitória
Preço de Venda (R\$/Cx)	R\$ 45,000	R\$ 46,000	R\$ 47,000
Custo Variável Unitário (R\$/Cx)	R\$ 6,256	R\$ 9,384	R\$ 15,640
Demanda Média	2475	3465	3960
Demanda Média Corrigida ($\lambda = 0.3$)	742	1039	1188

Tabela 5: Margens de Contribuição

	Caixa Mista	Caixa Arra 15	Caixa Vitória
Margem de Contribuição (abs)	R\$ 38,744	R\$ 36,616	R\$ 31,360
Margem de Contribuição (%)	86,10%	79,60%	66,72%

As Tabelas 4 e 5 mostram os dados coletados na cooperativa. Estes são referentes aos preços de venda, custo variável unitário e demanda média do período e demanda corrigida, conforme descrito na Tabela 4. Na Tabela 5 temos as margens de contribuição unitária de cada produto, estas estão em valores absolutos e porcentagem. É possível notar que a Caixa Mista contribui com a maior parcela, enquanto a Caixa Vitória contribui com a menor porção para amortização do custo fixo e geração de lucro.

O Custo Fixo Total do período é de R\$ 195.200,00 reais. Este custo é composto por diversas atividades relacionadas ao beneficiamento dos produtos, seu valor não se altera durante o período de atividade aqui considerado. Os valores referentes a capacidade e as demandas são de 80520 e 9900 caixas respectivamente.

A demanda corrigida pelo fator $\lambda = 0,3$ é de 2969 unidades, e tem sua distribuição especificada na Tabela 4.

A seguir na Tabela 6 são realizados os cálculos necessários para a determinação do Ponto de Equilíbrio a partir do método de Custeio Variável. Este método está descrito com maiores detalhes no artigo Potkanya e Krajcirova (2015) e utiliza a equação (7) para determinação do BEP.

Tabela 6: Determinação do Lucro/Prejuízo de uma Operação

	Caixa Mista	Caixa Arra 15	Caixa Vitória	TOTAL
Receita Total	R\$ 111.375,00	R\$ 159.390,00	R\$ 186.120,00	R\$ 456.885,00
Custo Variável	R\$ 15.483,60	R\$ 32.515,56	R\$ 61.934,40	R\$ 109.933,56
Margem de Contribuição	R\$ 95.891,40	R\$ 126.874,44	R\$ 124.185,60	R\$ 346.951,44
Custo Fixo Total	-	-	-	R\$ 195.200,00
Lucro/Prejuízo				R\$ 151.751,44

Estes cálculos levam em consideração a demanda média por produto que estão evidenciadas na Tabela 4. Aqui é possível verificar que a receita total da operação é de R\$ 456.885,00 e o custo variável total é de R\$ 109.933,56 o que gera uma margem de contribuição total de R\$ 346.951,44. O lucro da operação é obtido após a subtração do custo fixo total. O Ponto de Equilíbrio calculado a partir desde dados é evidenciado na Tabela 7.

Tabela 7: Ponto de Equilíbrio Custeio Variável e Modelagem Proposta

	λ	Caixa Mista	Caixa Arra 15	Caixa Vitória	TOTAL
BEP (Custeio Variável)	-	1393	1950	2228	5571
BEP (Modelagem Proposta)	0,3	2947	1167	1221	5335

O Ponto de Equilíbrio de 5571 caixas calculado a partir do Custeio Variável está bem abaixo do valor da Demanda Média Total do período que é de 9900 o que resulta em uma margem de segurança de 4329 caixas, porém este Ponto de Equilíbrio deixa um resíduo de R\$ 41,67, sendo assim, um Ponto de Equilíbrio aproximado que não atende as especificações teóricas.

Na Tabela 6 podemos ver também o Ponto de Equilíbrio calculado pelo modelo proposto no trabalho, para $\lambda = 0.3$. Com um total de 5335 caixas o Ponto de Equilíbrio do modelo também se encontra abaixo da Demanda Média Total do período,

gerando uma margem de segurança de 4565 caixas. Porém, este ponto de equilíbrio se encontra acima da demanda média corrigida que é de 2969 caixas, respeitando assim, a modelagem proposta. O resíduo deixado por esse Ponto de Equilíbrio é R\$ 0,00, atendendo assim as especificações teóricas.

A Tabela 8 faz um comparativo geral entre os dois métodos aplicados. É possível observar que o Ponto de Equilíbrio da modelagem proposta possui um Custo de Produção muito menor, sendo este 21,62% menor que o Custo de Produção para o Ponto de Equilíbrio pelo método de Custeio Variável.

Tabela 8: Comparativo entre os métodos

	Lucro/Prejuízo	Custo de Produção	BEP
Custeio Variável	R\$ 41,67	R\$ 61.859,33	5571
Modelo Proposto	R\$ 0,00	R\$ 48.484,00	5335
	Caixa Mista	Caixa Arra 15	Caixa Vitória
BEP (Custeio Variável)	1393	1950	2228
BEP (Modelo Proposto)	2947	1167	1221

A modelagem também foi aplicada a um conjunto de dados retirados de Potkanya e Krajcirova (2015). A Tabela 9 mostra os dados da linha de produção utilizado no artigo, estes dados são referentes as três linhas de produção da fábrica e seus nove produtos.

Tabela 9: Dados da Linha de Produção

	Linha de Produção								
	Alder			Cherry			Walnut		
	Alexa	Alica	Aurélia	Elsa	Ema	Erika	Daniela	Diana	Denisa
Preço de Venda	€ 35.00	€ 40.00	€ 50.00	€ 25.00	€ 25.00	€ 25.00	€ 36.00	€ 32.00	€ 34.00
Custo Variável	€ 15.00	€ 20.00	€ 30.00	€ 17.00	€ 17.00	€ 17.00	€ 32.40	€ 28.80	€ 30.60
Demanda Média	200	400	800	400	450	380	500	1500	400

Fonte: Potkanya e Krajcirova (2015).

A Tabela 10 apresenta os valores das margens de contribuição absoluta e relativa para cada um dos produtos da linha de produção.

Tabela 10: Margens de Contribuição

	Linha de Produção								
	Alder			Cherry			Walnut		
	Alexa	Alica	Aurélia	Elsa	Ema	Erika	Daniela	Diana	Denisa
MC (Absoluta)	€ 20.00	€ 20.00	€ 20.00	€ 8.00	€ 8.00	€ 8.00	€ 3.60	€ 3.20	€ 3.40
MC (Relativa)	57.14%	50.00%	40.00%	32.00%	32.00%	32.00%	10.00%	10.00%	10.00%

Fonte: Potkanya e Krajcirova (2015).

A partir destes dados foi então possível calcular o ponto de equilíbrio através do método de custeio variável e também através da modelagem proposta. Os resultados destes cálculos foram resumidos nas Tabelas 11 e 12 e apresentam o ponto de equilíbrio por produto e por linha de produção.

Tabela 11: Ponto de Equilíbrio (Custeio Variável)

	Condição Inicial		Cenários					
			1		2		3	
BEP (€)	€ 73.60		€ 53.60		€ 65.60		€ 21.80	
BEP (und)	1654		1653		1653		1637	
	und	Σ	und	Σ	und	Σ	und	Σ
Alexa	66		361		66		65	
Alica	132	461	82	460	132	461	130	455
Aurélia	263		17		263		260	
Elsa	132		132		328		130	
Ema	148	405	148	405	33	404	147	401
Erika	125		125		43		124	
Daniela	164		164		164		390	
Diana	492	788	492	788	492	788	98	781
Denisa	132		132		132		293	

Fonte: Adaptado de Potkanya e Krajcirova (2015).

A Tabela 11 mostra o Ponto de Equilíbrio calculado através do método de Custeio Variável. É possível notar que o BEP (€) para a condição inicial e também para os cenários 1 2 e 3 são aproximados, visto que deixam resíduos de valores monetários maiores que zero.

Tabela 12: Ponto de Equilíbrio (Modelagem Proposta)

	Condição Inicial		Cenário					
			1		2		3	
BEP (\$)	€ 0.00		€ 0.00		€ 0.00		€ 0.00	
BEP (und)	1298		1298		1298		1296	
	und	Σ	und	Σ	und	Σ	und	Σ
Alexa	200		512		200		200	
Alica	212	572	50	572	212	572	207	567
Aurélia	160		10		160		160	
Elsa	80		80		200		80	
Ema	90	246	90	246	20	246	90	249
Erika	76		76		26		79	
Daniela	100		100		100		240	
Diana	300	480	300	480	300	480	60	480
Denisa	80		80		80		180	

A Tabela 12 apresenta os resultados dos cálculos do Ponto de Equilíbrio através da modelagem proposta. É possível observar que a modelagem atingiu o Ponto de Equilíbrio idealizado, visto que para todas as condições o resíduo final foi de zero unidades monetárias.

Por fim, a Tabela 13 mostra um comparativo do custo de produção entre os métodos utilizados.

Tabela 13: Comparativo de Custo de Produção

Custo de Produção				
	Custeio Variavel	Modelagem Proposta	Diferença Absoluta	Diferença Relativa
Condição Inicial	€ 41,927.40	€ 30,550.00	€ 11,377.40	27.14%
Cenário 1	€ 37,972.40	€ 27,490.00	€ 10,482.40	27.61%
Cenário 2	€ 41,910.40	€ 30,550.00	€ 11,360.40	27.11%
Cenário 3	€ 42,616.20	€ 31,185.00	€ 11,431.20	26.82%

É possível verificar que a modelagem proposta possui um custo de produção menor para todos os cenários, sendo que, o cenário 1 obteve o menor custo de produção, sendo este 27,61% menor em comparação com o Custeio Variável. É possível concluir que o modelo proposto atingiu seu objetivo prepúcio de reduzir os custos variáveis de produção ao passo que encontra o Ponto de Equilíbrio ideal.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi proposto a construção de um modelo matemático para o cálculo do ponto de equilíbrio de produção em um sistema não homogêneo. O objetivo disto foi expandir o conceito de ponto de equilíbrio que usualmente é abordado na literatura de forma mais simplificada. O modelo desenvolvido ao longo do trabalho foi testado em dados reais de uma empresa local. Os resultados obtidos foram satisfatórios, visto que apresentam valores melhores que o modelo até então utilizado na literatura especializada.

O modelo proposto não está pronto e acabado, tendo este que ser testado para uma gama maiores de problemas, com diferentes especificidades. Uma sugestão de melhoria seria, por exemplo, incorporar ao modelo proposto os preços de venda e os custos fixos como funções que dependem do tempo, visto que estas são consideradas como constantes neste trabalho, porém, variam ao longo de períodos relativamente grandes.

A partir dos resultados obtidos pela modelagem proposta, é possível então realizar um planejamento agregado de forma a adiantar a produção dos bens que contribuem mais para a amortização do custo fixo e geração de lucro bruto, este planejamento agregado levaria em consideração as quantidades específicas a serem produzidas, criando-se uma hierarquia no sistema de manufatura e possibilitando assim, uma melhor organização da matéria prima necessária. Uma organização prévia da produção reduz indiretamente os custos de produção, devido à redução de movimentações desnecessárias, além de reduzir a possibilidade de erro durante o processo de beneficiamento.

Um outro aspecto relevante é a possibilidade de um planejamento de vendas bem estruturado, já que, conhecendo previamente os produtos que precisam ser vendidos e suas quantidades específicas, a equipe de vendas pode criar através de um plano de ação, as metas de vendas para um período. De forma análoga, a equipe de marketing também pode se beneficiar das informações, visto que, ao saber qual produto precisa ter uma maior quantidade de vendas, esta poderia focar seus esforços em publicidade e propaganda direcionada a um produto específico.

Por fim, podemos concluir que o conhecimento prévio do *mix* de produção ideal fornece informações importantes para um bom planejamento de curto e médio prazo. Essas informações podem ser utilizadas por diversos setores desde o

chão de fábrica até equipes de gestão, todos esses fatores contribuem para uma melhor gestão dos recursos disponíveis, otimizando assim o seu uso e alocação.

REFERÊNCIAS

- ABEPRO. **Áreas e Sub-áreas de Engenharia de Produção**. Disponível em:
<<https://www.abepro.org.br/interna.asp?p=399&m=424&ss=1&c=362>> Acesso em:
13 jan. 2018.
- BELFIORE, Patrícia; FÁVERO, Luiz Paulo. **Pesquisa Operacional para Cursos de Engenharia**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2013.
- BORNIA, Antonio Cezar. **Análise gerencial de custos: aplicação em empresas modernas**. 2. ed. São Paulo: Atlas, 2009.
- MARTINS, R. A.; MELLO, C. H. P.; TURRIONI, J. B. **Guia para Elaboração de Monografia e TCC em Engenharia de Produção**. São Paulo: Atlas, 2014.
- GANGA, Gilberto Miller Devós. **Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) na engenharia de produção: um guia prático de conteúdo e forma**. São Paulo: Atlas, 2012.
- CREPALDI, Silvio Aparecido. **Contabilidade Gerencial: Teoria e Prática**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 2004.
- MOREIRA, Daniel Augusto. **Administração da Produção e Operações**. 2. ed. rev. e ampl. São Paulo: Cengage Learning, 2015.
- VASCONCELLOS, Marco Antonio Sandoval de. **Economia: Micro e Macro**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2006.
- KOTLER, Philip; KELLER, Kevin Lane. **Administração de Marketing: Análise, Planejamento e Controle**. São Paulo: Atlas, 1998.
- TENENBAUM, Aaron M. **Estruturas de dados usando C**. São Paulo: MAKRON Books, 1995.
- MORABITO, Reinado; PUREZA, Vitória. **Metodologia de pesquisa em Engenharia de Produção e Gestão de Operações**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012.
- HILLIER, Frederick S; LIEBERMAN, Gerald J. **Introdução à Pesquisa Operacional**. 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.
- CHING, Hong Yuh. **Gestão de estoques na cadeia de logística integrada**. São Paulo: Atlas, 2006.
- WRIGHT, S. J. **Primal-Dual Interior Point Methods**. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997.