UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

WAGNER FERREIRA DE SANTANA

CONTEXTUALIZANDO O CONCEITO DE DETERMINANTES E SUAS APLICAÇÕES

JUAZEIRO-BA
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

WAGNER FERREIRA DE SANTANA

CONTEXTUALIZANDO O CONCEITO DE DETERMINANTES E SUAS APLICAÇÕES

Dissertação apresentada à Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF, Campus Juazeiro, como requisito da obtenção do título de Mestre através do Programa Nacional de Mestrado Profissional em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Lino Marcos da Silva

JUAZEIRO - BAHIA
2016

	Santana, Wagner Ferreira de.
S586c	Contextualizando o conceito de determinantes e suas aplicações / Wagner Ferreira de Santana.--Juazeiro-BA, 2016
	ix, 68 f.: il., 29 cm
	Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro - BA, 2016.
	Orientador: Prof. Dr. Lino Marcos da Silva.
	1. Álgebra linear. 2. Sistemas Lineares 3. Matrizes.4 Determinante I. Título. II. Silva, Lino Marcos da. III. Universidade Federal do Vale do São Francisco.
	CDD 512.5

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Biblioteca SIBI/UNIVASF
Bibliotecário: Márcio Pataro

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT/UNIVASF

CONTEXTUALIZANDO O CONCEITO DE DETERMINANTES E SUAS APLICAÇÕES

Por:

WAGNER FERREIRA DE SANTANA

Dissertação aprovada em 22 de agosto de 2016.

Lino Marcos da Silva

Prof. Dr. Lino Marcos da Silva
Orientador - PROFMAT/UNIVASF

Alison M. V. D. L. Mello

Prof. Dr. Alison Marcelo Van Der Laan Melo
Examinador Interno - PROFMAT/UNIVASF

Rinaldo Vieira da Silva Jr.

Prof. Dr. Rinaldo Vieira da Silva Júnior
Examinador Externo – UFAL

Juazeiro
2016

À Deus toda honra e toda glória pelos séculos dos séculos. Amém

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, quero agradecer à Deus, o Todo-Poderoso, que tem me sustentado por toda a minha existência.

Aos meus pais, por toda dedicação a mim devotada e por sempre acreditar que a educação dos seus filhos era primordial.

Aos meus irmãos pelo companheirismo de sempre e pelas riquezas que me deram enquanto tio.

À minha esposa Annakele Santana pelo carinho, cumplicidade, paciência, enfim pelo amor dedicado a mim. Obrigado por sempre acreditar em mim.

Aos meus sobrinhos, que amo tanto, às minhas cunhadas, à minha sogra, que sempre me suportaram e terão que continuar suportando enquanto Deus me der vida.

Aos colegas de mestrado, obrigado pela parceria nesses dois anos e meio. Em particular aos meus irmãos Wagner Santiago e Roberto Rayala, muito obrigado pela amizade que, com certeza, será para a vida toda.

Ao professor Lino Marcos da Silva, cuja orientação foi fundamental para o desenvolvimento deste trabalho, muito obrigado pela compreensão e paciência para comigo.

Aos professores Beto Rober, Felipe Wergete e Lucília Batista pelos ensinamentos durante as disciplinas no mestrado.

Aos amigos e colegas de trabalho que tanto contribuíram no transcorrer deste mestrado. Continuo contando com vocês!

“Um bom ensino da matemática forma melhores hábitos de pensamento e habilita o indivíduo a usar melhor a sua inteligência.”

(Irene de Albuquerque)

RESUMO

Este trabalho propõe uma abordagem contextualizada dos determinantes considerando o seu contexto histórico e suas aplicações. O mesmo busca dar um significado à definição de determinantes de modo a tornar esse conceito mais acessível aos docentes e alunos da educação básica. Para tanto, dispôs-se de uma pesquisa bibliográfica pautada na história dos determinantes e em sua estreita relação com a resolução dos sistemas lineares. Nessa perspectiva, os determinantes de matrizes quadradas de ordem até três foram definidos a partir da resolução de um sistema linear da mesma ordem da respectiva matriz. A partir dessa definição, e usando matrizes de ordem até três, são demonstradas algumas propriedades dos determinantes. O cálculo de determinantes de matrizes de ordens superiores é determinado recursivamente por meio da regra de Chió. Por sua vez, a definição de determinantes para matrizes de uma ordem qualquer é apresentada por meio do uso de permutações. As aplicações dos determinantes apresentadas são a regra de Cramer, como consequência imediata da relação entre determinantes e sistemas lineares; o cálculo da matriz inversa, sendo o determinante fundamental para sua condição de existência; a condição de alinhamento de três pontos no plano cartesiano, uma aplicação à geometria analítica que pode convergir para o estudo da equação da reta ou do cálculo da área de um triângulo; e por fim, o produto vetorial, como uma proposta de ampliação das aplicações que podem ser utilizadas na educação básica. Acreditamos que os resultados apresentados neste trabalho poderão contribuir significativamente para a melhoria do ensino desse tema na educação básica, uma vez que esse tipo de abordagem não é comum nos materiais didáticos disponíveis aos professores de matemática do Ensino Médio.

Palavras-chave: Determinantes. Matrizes. Sistemas lineares. Contextualização. Aplicações.

ABSTRACT

The present work proposes to perform an approach of the determinant of a matrix considering its historical context and applications, because it is believed that it provides a theoretical and practical meaning more accessible to students and teachers of basic education. Therefore, at first it was performed a bibliographic search seeking the history of determinants. By realizing that this topic can not be explained isolated, the research includes linear systems and matrices, subjects that complement and guide the main topic. Linear systems are studied since the old age, while matrices appear only on the XIX century after the emergence of determinants. In this way, and in the reverse order in which this subject is usually presented in high school, we defined the determinant of a square matrix of order up to three from the resolution of a linear system using the scaling method. Moreover, we presented the main properties of determinants, the Chio's rule, as a proposal to solve determinants of order higher than three; and the general definition of determinant through the use of permutations. Examples of application of determinants are shown in the Cramer's rule, the calculation of inverse matrix, the alignment condition of three points in the Cartesian plane, and finally, the vector product. It is concluded that the approach presented in this work can contribute to the teaching of mathematics and especially to teachers of basic education, considering the lack of bibliographic material presenting the historical and practical aspects of determinants.

Keywords: Determinants. Matrix. Linear systems. Contextualization. Application.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A história geral mostra que o ser humano vive em constante progresso do seu conhecimento, geralmente alimentado pelas suas necessidades ou pela curiosidade de entender fenômenos que acontecem ao seu redor. Para muitas pessoas, utilizar algo inventado pelo ser humano é simples: precisa-se simplesmente saber quais os passos de utilização. Não interessa ao mesmo, qual foi o processo de desenvolvimento dessa invenção.

O estudo da matemática para boa parte dos estudantes possui a mesma perspectiva que abordamos acima, é difícil de ser entendido, mas, pior do que isso, não apresenta relevância para o seu cotidiano. É comum os professores da disciplina ouvir piadas sobre isso: “passou mais um dia e eu não usei a fórmula de Bháskara”, “isso não serve pra nada em minha vida” e outras mais. Essa percepção da matemática por parte dos alunos leva os docentes a um grande desafio, que é o de ensinar a matemática de forma contextualizada, mostrando o desenvolvimento da mesma dentro da história da humanidade e na prática do cotidiano.

Porém, como professores, conseguimos expor o conteúdo, mas não conseguimos, na maioria das vezes, fazer essa contextualização com a história da humanidade ou estabelecer relações com o nosso cotidiano. Estamos na direção contrária do que afirma os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN’s): “Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam [...] que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído” (BRASIL, 2002). Na experiência de sala de aula, percebemos que muitas vezes estamos nessa situação, que os recursos disponíveis são escassos e, por fim, nossas aulas não têm um contexto.

Durante o estudo da disciplina Álgebra Linear no Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, nos deparamos com algumas definições, propriedades e demonstrações que nos despertou o interesse em buscar algo mais sobre os conteúdos da introdução à Álgebra Linear: matrizes, determinantes e sistemas lineares. Em particular, percebemos o quanto não entendíamos o conceito de determinantes, nem a relação desse conceito com os sistemas lineares, expandindo assim as possibilidades de metodologias para o ensino do conteúdo.

Enquanto professores de matemática do Ensino Médio, víamos na grande maioria dos livros didáticos utilizados, que o conteúdo de determinantes aparece de forma injustificada entre os conteúdos de matrizes e sistemas lineares. Geralmente, o mesmo é definido como sendo simplesmente um número real originado de algumas operações entre os elementos quando a matriz quadrada é de ordem maior ou igual a 2. Essa abordagem dá a impressão de que o conceito está sendo imposto pelo professor, pois não existe nenhum contexto na definição.

A inquietação sobre tal situação nos remeteu a um questionamento sobre a nossa postura enquanto docentes. Podemos ensinar determinantes abordando o conteúdo de uma forma contextualizada, quer seja na origem do seu conceito, ou nas suas aplicações?

Nesse sentido procuramos investigar elementos sobre o tema que pudesse proporcionar aos docentes e interessados, um material que apresente o conteúdo de determinantes de uma forma intuitiva, trazendo seu contexto histórico, seu desenvolvimento ao longo do tempo e suas aplicações.

Para atingir o nosso objetivo, traçamos algumas metas que nos nortearam no transcorrer da pesquisa. Foram elas: historiar a origem dos determinantes, mostrando a sua necessidade; abordar definições e propriedades, trabalhando-as de uma forma intuitiva, a partir de outros conteúdos; e apresentar algumas aplicações dos determinantes, principalmente no estudo da Geometria Analítica e Álgebra Linear.

Afim de alcançarmos tais objetivos, buscamos nos apoiar nos historiadores da matemática e em suas referências sobre o tema. Pois entendemos que a abordagem do conteúdo de determinantes não deve estar dissociada do que aconteceu nos estudos sobre sistemas lineares e matrizes. Além disso, sentimos a necessidade de buscar também a essência do contexto de tais estudos, os fundamentos, como foram formados, quais suas propriedades e quais suas aplicações, visando nortear mais solidamente o nosso trabalho.

Para tanto, lançamos mão da pesquisa de cunho bibliográfico, traçando o perfil do conteúdo, analisando a sua cronologia, as suas definições e propriedades, bem como suas possíveis aplicações, visando fornecer uma abordagem deste conteúdo de uma forma que consideramos mais contextualizada.

Diferentemente do que estamos acostumados a observar sobre as definições de determinantes em livros didáticos, como por exemplo, HAZZAN (2012), STEINBRUCH (2008) e FILHO (2003), procuramos estruturar este trabalho numa ordem, não usual, às aulas de introdução à Álgebra Linear. Para tal, apresentamos no primeiro capítulo os conceitos básicos de sistemas lineares e matrizes, com breves relatos históricos, definições e propriedades. No segundo capítulo, como busca de solução para os sistemas lineares, apresentamos o determinante como uma alternativa para tal solução. Também relatamos o seu contexto histórico, algumas formas de demonstrá-lo e suas propriedades. O terceiro capítulo traz algumas das aplicações dos determinantes e, a priori, trazemos a conhecida Regra de Cramer como resultado fundamental dos estudos anteriores. Por fim, trazemos as conclusões as quais chegamos, durante todo o processo dessa pesquisa.

O que estamos propondo neste trabalho é, basicamente, uma ampliação dos conceitos, propriedades e aplicações sobre determinantes, normalmente apresentados nos livros didáticos, visando dar um maior suporte aos professores de matemática do Ensino Médio e Superior, que poderão contar com mais uma fonte de informação para planejarem suas aulas. Para este trabalho, consideraremos apenas, matrizes com elementos reais.

CAPÍTULO 1

SISTEMAS LINEARES

O estudo dos sistemas lineares é o caminho que, a priori, percorreremos para abordar a definição dos determinantes, pois foi nesse contexto histórico que começaram a surgir os primeiros tratados sobre o assunto. Perceberemos na história de ambos os temas que sistemas lineares são estudados há muito mais tempo, e que os determinantes são consequência dos avanços em tais estudos.

> *Na matemática ocidental antiga são poucas as aparições de sistemas de equações lineares. No Oriente, contudo, o assunto recebeu atenção bem maior. Com seu gosto especial por diagramas, os chineses representavam os sistemas lineares por meio de seus coeficientes escritos com barras de bambu sobre os quadrados de um tabuleiro. Assim acabaram descobrindo o método de resolução por eliminação que consiste em anular coeficientes por meio de operações elementares. Exemplos desse procedimento encontram-se nos Nove capítulos sobre a arte da matemática, um texto que data provavelmente do século 111 a.C. (GONÇALVES, 2012. p.63)*

1.1 DEFINIÇÃO

Um sistema linear é um conjunto de equações lineares. Esse tipo de equação se caracteriza por envolver somente somas e produtos de constantes e incógnitas do primeiro grau. Formalmente, chamamos de equação linear, nas incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$, toda equação do tipo

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b,$$

onde os números reais $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ são chamados *coeficientes,* e b, é denominado *termo independente,* pois não está vinculado a nenhuma das incógnitas x_i.

Dizemos que uma equação linear $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b$ tem solução, se existem números reais $s_1, s_2, \dots, s_n$, tais que a identidade

$$a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \dots + a_{1n}s_n = b$$

seja uma sentença verdadeira.

Podemos definir, então, um sistema linear como sendo um conjunto de *m* equações lineares, onde *m* ∈ ℕ e *m* ≥ *1*, nas incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$, do seguinte modo:

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Dizemos que um sistema linear S tem solução se existem números reais $s_1, s_2, \dots, s_n$, que satisfaçam todas as *m* equações do sistema *S*. Caso contrário, dizemos que *S* é um sistema *Impossível*.

Uma outra maneira de apresentarmos um sistema linear *S* é reescrevendo-o na forma matricial. Devido a relevância dessa representação no cálculo da solução do sistema linear, passaremos a apresentar o conceito de matriz e algumas operações com essas importantes estruturas matemáticas.

1.2 CONCEITOS BÁSICOS DE MATRIZES

Segundo GONÇALVES (2012), um dos pioneiros no estudo das matrizes foi Arthur Cayley (1821-1895) que por volta de 1850, divulgou o termo matriz e passou a demonstrar sua aplicação. Porém, inicialmente, as matrizes eram usadas, na grande maioria das vezes para solucionar sistemas lineares. "*No entanto, o primeiro uso implícito da noção de matriz se deve a Joseph Louis Lagrange (1736-1813), em 1790*". (GONÇALVES, 2012. p. 19)

Ainda, conforme GONÇALVES (2012), primeiramente chamavam as matrizes, simplesmente de "tabelas", nomenclatura que aparece nos escritos de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). O nome "matriz" aparece através de James Joseph Sylvester (1814-1897), em 1850. "*Sylvester ainda via as matrizes como mero ingrediente dos determinantes. Somente com Cayley elas passaram a ter vida própria e, gradativamente, começaram a suplantar os determinantes em importância".* (GONÇALVES, 2012. p. 20)

1.2.1 Definição

Podemos definir uma matriz *M,* de ordem *mxn* (escreve-se: $M_{(mxn)}$), como uma tabela com *m* linhas e *n* colunas, formada por números reais em cada entrada a_{ij}, onde *i* representa o número da respectiva linha e *j* o número da respectiva coluna do elemento. Por exemplo, a matriz $M_{(3x2)}$ dada por

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

é uma matriz com três linhas e duas colunas, onde o elemento $a_{32} = 6$.

Algumas matrizes possuem características específicas e, portanto, possuem nomenclatura especial. Veremos algumas matrizes importantes, as quais serão utilizadas para escrever um sistema linear S na forma matricial:

i) *Matriz coluna* é uma matriz que possui uma única coluna;

$$\text{M} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

ii) *Matriz quadrada* possui o número de linhas igual ao número de colunas. Nessas matrizes aparecem as diagonais principal e secundária. Em uma matriz quadrada de ordem *n*, a diagonal principal contém os elementos cujo índice da linha é igual ao índice da coluna, $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$, e a diagonal secundária possui os elementos cuja soma dos índices é igual a ordem da matriz mais um, isto é, *n*+1. Por exemplo, se *M* é de ordem 3, então os elementos a_{31}, a_{22}, a_{13} formam a diagonal secundária. A Figura 1.1 ilustra as diagonais de uma matriz quadrada de ordem *n*.

$$\text{M} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Diagonal Secundária — Diagonal Principal

Figura 1.1: Diagonal principal e diagonal secundária

1.2.2 Operações Matriciais

É possível efetuarmos operações entre matrizes e números reais, bem como entre duas matrizes. Essas operações podem ser também, manipuladas algebricamente, porém devemos nos atentar às suas propriedades que nem sempre coincidem com àquelas entre números reais, que estamos habituados a usar. Mas antes de falarmos sobre operações envolvendo matrizes, precisamos comentar sobre a igualdade de matrizes. Duas matrizes *A* e *B* são iguais se os elementos correspondentes de ambas as matrizes são iguais, ou seja, ambas as matrizes devem ter a mesma estrutura (número de linhas de *A* deve ser igual ao número de linhas de *B*, a mesma coisa deve acontecer com o número de colunas) e cada elemento a_{ij} de *A* deve ser igual ao número b_{ij} de *B*. Das operações entre matrizes, destacaremos a de uso imediato na escrita dos sistemas lineares, o produto de matrizes.

O produto de matrizes aparece historicamente, quando Cayley apresenta um artigo em 1858 sobre a teoria das transformações lineares, no qual ele apresenta um resultado já mostrado antes por Gauss em 1801, nas *Disquisitiones arithmeticae,* porém acrescentando a demonstração da não-comutatividade do produto das matrizes (BOYER, 2012).

No produto de duas matrizes definido por Cayley, é necessário que o número de colunas da primeira matriz seja igual ao número de linhas da segunda matriz, caso contrário, o produto entre tais matrizes não é possível. O resultado deste produto será uma nova matriz com o número de linhas da primeira matriz e com o número de colunas da segunda matriz. Por exemplo, no produto da matriz $A_{(3x2)}$ com a matriz $B_{(2x4)}$ teremos uma nova matriz $C_{(3x4)}$, conforme ilustrado na Figura 1.2.

$$A_{(3x2)} \,.\, B_{(2x4)} = C_{(3x4)}$$

Condição de existência do produto

Figura 1.2. Produto de Matrizes

Sejam as matrizes $A_{(m \times n)}$ *e* $B_{(n \times p)}$, onde o número de colunas da matriz *A* é igual ao número de linhas da matriz *B*, e portanto, é possível fazermos o produto *A.B*. Chamemos de *C* a matriz resultante desse produto, isto é, *C = A.B,* então cada elemento c_{ij} de *C* será dado pela soma dos produtos dos elementos da linha *i* de A com os elementos da coluna *j* de *B*. Isto é,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Observe que, se o número de linhas de *A* é diferente do número de colunas de *B*, não é possível realizarmos o produto *B.A.* Este fato nos remete a uma importante afirmação sobre o produto de matrizes: a comutatividade não é válida no produto de matrizes. Isto é, em geral, *A.B ≠ B.A.* Somente em alguns casos, como por exemplo: no produto de uma matriz por sua inversa, ou no produto de uma matriz pela matriz identidade, a comutatividade entre o produto de duas matrizes é válida.

Agora estamos em condições de reescrever o sistema linear S na forma matricial. Esta representação, que usa o produto de matrizes, é dada pela seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} .$$

Esta representação nos permitirá estabelecer a relação entre o determinante de um sistema linear e sua matriz correspondente, principalmente nas aplicações que apresentaremos no Capítulo 3.

1.3 SISTEMAS EQUIVALENTES

Existem algumas operações que podem ser efetuadas com as equações dos sistemas lineares sem que altere a sua solução. Quando realizamos quaisquer uma dessas operações, obtemos um novo sistema linear, o qual é um s*istema equivalente* ao sistema original no sentido de que ambos possuem a mesma solução. Tais operações são conhecidas como *operações elementares.*

Nas equações de um sistema linear, podemos efetuar três tipos de operações elementares:

i) Multiplicação de uma equação qualquer por um número real não-nulo;
ii) Troca de posição de equações;
iii) Substituir uma equação pela soma da mesma com outra equação previamente multiplicada por um número real não-nulo.

Com essas operações o sistema linear original pode ser transformado em um sistema linear equivalente, através do qual podemos chegar à solução do sistema linear original. Essas operações serão utilizadas no processo chamado de *escalonamento de um sistema linear*, o qual descreveremos na próxima seção.

1.4 ESCALONAMENTO DE UM SISTEMA LINEAR

O escalonamento de um sistema linear *S* consiste no uso das operações elementares sobre suas equações para obtermos sistemas lineares *S'* equivalentes ao sistema linear *S* dado, mas de forma tal que possuam equações com uma quantidade menor de incógnitas, permitindo assim que a solução do sistema seja calculada de uma forma mais simples.

Mostraremos a seguir, os três passos necessários para escalonar um sistema linear.

(i) Precisamos primeiramente, ter como primeiro coeficiente da primeira equação, um número igual a 1 (Isto facilitará os próximos passos). Para isso podemos trocar equações de posição ou dividir uma equação por um número real diferente de zero;
(ii) Após o primeiro passo, podemos eliminar das equações subsequentes à primeira, a primeira incógnita, zerando os seus coeficientes. Para tanto, faremos a soma de cada equação subsequente com a primeira equação, previamente multiplicada pelo oposto do coeficiente que queremos anular (teremos assim, ao final desse passo, uma equação com todas as incógnitas e *n-1* equações com *n-1* incógnitas);
(iii) Voltamos ao passo (i), desconsiderando a primeira equação.

Prosseguindo com esse processo, podemos obter uma última equação com somente uma incógnita, a qual nos dará valor imediato de uma das incógnitas, facilitando assim a descoberta da solução do sistema linear, porém, haverá casos em que podemos encontrar essa última equação com mais de uma incógnita. Utilizaremos a seguir um sistema linear de ordem 3 para mostrarmos na prática o processo de escalonamento.

Exemplo 1.1. Determinar a solução do sistema linear:

$$S: \begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ -2x + y + 2z = 6 \\ x - y + z = 2 \end{cases}.$$

<u>*Solução*</u>:

Primeiramente, vamos considerar, em todos os sistemas lineares apresentados a seguir, que as equações dos mesmos estão numeradas de (1), (2) e (3), na mesma ordem em que aparecem no sistema linear. Como o primeiro coeficiente da primeira equação é diferente de 1,

1) Trocaremos as equações (1) e (3) de posição (passo (*i*)), e obtemos o novo sistema S_1 que é um sistema equivalente a S, S_1: $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ -2x + y + 2z = 6 \\ 3x + 2y - z = 4 \end{cases}$.

2) Agora, com o objetivo de eliminar a incógnita x das duas equações subsequentes, usaremos o passo (*ii*), isto é, substituiremos a segunda equação pela soma dela mesma com a primeira equação, previamente multiplicada por 2 (que é o oposto do primeiro coeficiente da equação (2)); e substituiremos a terceira equação pela soma dela mesma com a primeira equação, previamente multiplicada por “-3” (que é o oposto do primeiro coeficiente da equação (3)).

Ao final dessas operações, obtemos o novo sistema linear S_2, equivalente ao sistema linear S:

$$S_2: \begin{cases} x - y + z = 2 \\ \quad - y + 4z = 10 \\ \quad 5y - 4z = -2 \end{cases}.$$

Observe que agora temos uma equação completa e duas equações com apenas duas incógnitas. Agora desprezaremos, por enquanto, a primeira equação e voltamos a aplicar os passos (*i*) e (*ii*) nas duas últimas equações do sistema linear S_2.

Como o primeiro coeficiente não nulo da equação (2) é diferente de 1, usaremos o passo (i), novamente.

3) Multiplicando a segunda equação por “-1”, obteremos o que pretendemos, isto é, obtemos o sistema S_3: $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ y - 4z = -10 \\ 5y - 4z = -2 \end{cases}$.

4) Conservaremos agora as duas primeiras equações e substituiremos a terceira equação pela soma da mesma com a segunda equação, previamente multiplicada por “-5” (que é o oposto da primeira incógnita da equação (3)).

Assim, o novo sistema equivalente obtido é: S_4: $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ y - 4z = -10 \\ \quad 16z = 48 \end{cases}$. Agora, podemos saber qual o valor da incógnita z, através de uma divisão simples, neste caso, $z=3$. Por fim, substituindo o valor de z na segunda equação, teremos $y=2$; e substituindo y e z na primeira equação, obteremos $x=1$. Isso completa a solução do sistema. Ou seja, a solução do sistema linear S é a terna (1, 2, 3).

Observemos que, como o coeficiente de z na terceira equação do último sistema equivalente, S_4, é diferente de zero, a solução para o valor de z é única, o que será também para o nosso sistema. Porém, se tivéssemos tal coeficiente igual a zero, poderia ocorrer que o valor de z fosse indefinido, ou poderia, ainda, neste caso, não existir solução para z, se o termo independente fosse diferente de zero.

Podemos então, pelo escalonamento do sistema linear, verificar qual a *condição* da solução do sistema, através da última equação do sistema escalonado. Suponha que ao final do processo de escalonamento de um sistema linear de n equações com n incógnitas, obtivéssemos na última equação do sistema escalonado

$$\alpha_n x_n = \beta_n,$$

onde α_n é o coeficiente da última incógnita na última equação e β_n é o termo independente da última equação, após o escalonamento do sistema. Pode ocorrer uma das três situações a seguir:

i) $\alpha_n \neq 0$. Neste caso, teremos

$$\alpha_n x_n = \beta_n \Rightarrow x_n = \frac{\beta_n}{\alpha_n}$$

Logo, x_n existe, ou seja, é um número real definido e, portanto, o sistema linear é ***possível e determinado***;

ii) $\alpha_n = 0$ e $\beta_n = 0$. Neste caso, teremos

$$\alpha_n x_n = \beta_n \Rightarrow 0. x_n = 0,$$

e x_n admite infinitos valores reais. Isto é, x_n existe, porém não pode ser definido por um único valor. Logo o sistema linear é ***possível e indeterminado***;

iii) $\alpha_n = 0$ e $\beta_n \neq 0$. Neste caso, teremos

$$\alpha_n x_n = \beta_n \Rightarrow 0. x_n = \beta_n.$$

Como não existe x_n real que multiplicado por zero resulte em $\beta_n \neq 0$, então o sistema linear é ***impossível.***

Percebemos então que, o fator *determinante* para que um sistema linear admita uma solução única, é o coeficiente da última incógnita da última equação do sistema escalonado ser diferente de zero. Isto é, $\alpha_n \neq 0$. Utilizaremos esse coeficiente para abordarmos o estudo dos determinantes.

Deste ponto em diante, vamos considerar que a solução de um sistema linear é *bem definida* se esse sistema admite solução única, isto é, no sistema escalonado teremos $\alpha_n \neq 0$.

CAPÍTULO 2

DETERMINANTES

Os temas apresentados no Capítulo 1 fundamentam o que abordaremos no início deste capítulo, desde a evolução histórica, na busca da solução dos sistemas lineares, até o conceito dos determinantes que tem como aplicação imediata a discussão e solução dos sistemas lineares. Com isso, trazemos à tona a origem da ideia dos determinantes e o porquê da sua utilização.

2.1 EVOLUÇÃO HISTÓRICA

Os estudos sobre determinantes tiveram início, provavelmente, no século 111 a.C., mas somente em 1683, num trabalho do japonês Seki Kowa, foi que a ideia de determinante veio à tona. Kowa chegou a essa noção através do estudo de sistemas lineares. (GONÇALVES, 2012)

Conforme Gonçalves (2012), em 1693 surge no Ocidente o uso de determinantes através de um trabalho do alemão Leibniz, também ligado a sistemas lineares. Ele sugeriu usar combinações dos coeficientes para resolver sistemas de equações lineares. Para tanto criou uma notação com índices para os coeficientes: o que hoje, por exemplo, escreveríamos como a_{12}, Leibniz indicava por 1_2.

Segundo Boyer (2015), podemos dizer que “a história definitiva dos determinantes começa em 1812, quando Cauchy leu no Institut um longo artigo sobre o assunto”. Cauchy usou determinante, com o sentido atual, num trabalho sobre os determinantes. Nesse artigo, apresentado à Academia de Ciências, ele resumiu e simplificou o que era conhecido até então sobre o tema, melhorou a notação e deu uma demonstração do teorema da multiplicação de determinantes.

Gonçalves (2012, p.48) menciona ainda que, “além de Cauchy, quem mais contribuiu para consolidar a teoria dos determinantes foi o alemão Carl G. J. Jacobi (1804-1851). Deve-se a ele a forma simples como essa teoria se apresenta hoje”. Como algorista, Jacobi era um entusiasta da notação de determinante e de suas potencialidades. Sá (2004, p. 72) afirma que “Foi na primeira contribuição inglesa à teoria de determinantes, feita por Cayley (1821-1895) em 1841, onde apareceram as duas barras verticais para indicar determinantes”.

2.2 DEFINIÇÃO

Pelo que abordamos no final do capítulo anterior e o que vimos na evolução histórica do estudo dos determinantes, acreditamos ser imprescindível a sua abordagem teórica relacionando com o método de solução de um sistema linear através do escalonamento do sistema. Definiremos, os determinantes de ordem 1, 2 e 3, a partir dessa abordagem.

Sejam *A* = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ uma matriz quadrada de ordem *n* com entradas a_{ij}, *X* =$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e *B* =$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ matrizes colunas com *n* linhas. Conforme explicitado anteriormente, a solução do sistema linear *A* . *X* = *B*, será bem definida, quando o coeficiente da última equação do sistema escalonado for diferente de zero. Verificamos, portanto, que esse coeficiente tem papel importante na determinação da solução de um sistema linear. *Esse coeficiente é o que chamaremos de determinante da matriz A e denotaremos por det A ou ainda, a matriz A entre duas barras verticais.*

2.2.1 Determinante da matriz de ordem 1

Consideremos um sistema linear de ordem 1, o qual se resume a uma equação linear com uma incógnita:

$$a_{11}.\text{x} = b_1.$$

Escrevendo na forma matricial A . X=B, temos: A=[a_{11}], X=[x] e B=[b_1].

Nesse caso, percebemos que não há necessidade de um escalonamento, haja visto que o sistema é o mais simples possível. Podemos constatar então, que a solução da equação linear será bem definida se o valor do coeficiente a_{11} for diferente de zero, já que x = $\frac{b_1}{a_{11}}$. Logo o que *determina* se a solução do sistema linear é bem definida é o determinante da matriz *A*, ou seja, o elemento a_{11}. Portanto, o determinante de uma matriz *A* de ordem 1 é o único elemento dessa matriz.

Seja A=[a_{11}] uma matriz de ordem 1, o determinante da matriz A é dado por

$$\boldsymbol{det\ A = |a_{11}| = a_{11}.}$$

A seguir, passaremos a utilizar o processo de escalonamento de um sistema linear para chegarmos às definições dos determinantes de matrizes de ordem maior ou igual a 2.

2.2.2 Determinante de matriz de ordem 2

Considere o sistema linear de ordem 2, *S*: $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$. Matricialmente, podemos escrever *a equação*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Ao escalonarmos o sistema linear *S* encontraremos sistemas equivalentes do tipo

$$S': \begin{cases} x + \frac{a_{12}}{a_{11}}y = \frac{b_1}{a_{11}} \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases},$$

ou ainda, multiplicando a 1ª equação por (-a_{21})

$$S': \begin{cases} x + \dfrac{a_{12}}{a_{11}}y = \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{cases}$$

o que nos dá como resposta

$$y = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

O valor de *y* estará bem definido se o coeficiente $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ for diferente de zero.

Seja A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ***uma matriz de ordem 2, O determinante da matriz A será dado por***

$$\boldsymbol{det\ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.}$$

A seguir, definiremos o determinante de matrizes de ordem 3, utilizando a mesma estratégia.

2.2.3 Determinante da matriz de ordem 3

Seja o sistema linear de ordem 3, S: $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$. Na forma matricial, esse sistema pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Efetuando o escalonamento do sistema linear *S* utilizando os passos definidos no item 1.4 do Capítulo 1, encontraremos sistemas equivalentes, que chamaremos de S', tais como,

$$S': \begin{cases} x + \dfrac{a_{12}}{a_{11}}y + \dfrac{a_{13}}{a_{11}}z = \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases},$$

ou

$$S': \begin{cases} x + \frac{a_{12}}{a_{11}}y + \frac{a_{13}}{a_{11}}z = \frac{b_1}{a_{11}} \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y + (a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})z = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \\ (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})y + (a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13})z = a_{11}b_3 - a_{31}b_1 \ . \end{cases}$$

Utilizando o primeiro passo do escalonamento na segunda equação, obtemos

$$S': \begin{cases} x + \frac{a_{12}}{a_{11}}y + \frac{a_{13}}{a_{11}}z = \frac{b_1}{a_{11}} \\ y + \left(\frac{a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}\right)z = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \\ (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})y + (a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13})z = a_{11}b_3 - a_{31}b_1 \ , \end{cases}$$

ou ainda

$$S': \begin{cases} x + \frac{a_{12}}{a_{11}}y + \frac{a_{13}}{a_{11}}z = \frac{b_1}{a_{11}} \\ y + \left(\frac{a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}\right)z = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \\ a_{11}(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33})z = \\ = a_{11}(b_1a_{21}a_{32} + b_2a_{12}a_{31} + b_3a_{11}a_{22} - b_1a_{22}a_{31} - b_2a_{11}a_{32} - b_3a_{21}a_{12}) \ . \end{cases}$$

Dividindo a terceira equação por a_{11}, já que por sugestão temos que a_{11} deve ser igual a 1, temos então

$$S': \begin{cases} x + \frac{a_{12}}{a_{11}}y + \frac{a_{13}}{a_{11}}z = \frac{b_1}{a_{11}} \\ y + \left(\frac{a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}\right)z = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \\ (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33})z = \\ = (b_1a_{21}a_{32} + b_2a_{12}a_{31} + b_3a_{11}a_{22} - b_1a_{22}a_{31} - b_2a_{11}a_{32} - b_3a_{21}a_{12}) \ . \end{cases}$$

Logo, o valor de *z* é dado por

$$z = \frac{b_1a_{21}a_{32} + b_2a_{12}a_{31} + b_3a_{11}a_{22} - b_1a_{22}a_{31} - b_2a_{11}a_{32} - b_3a_{21}a_{12}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}} \ .$$

A solução do sistema linear será bem definida dependendo do valor do coeficiente $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

Definimos o determinante da matriz A = $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{31}} \\ \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{32}} \\ \boldsymbol{a_{13}} & \boldsymbol{a_{23}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{bmatrix}$ ***de ordem 3 por***

$$\boldsymbol{det\ A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}}$$

Definimos aqui, o determinante de uma matriz *A*, como sendo o número real que determina se a solução do sistema linear *A.X=B*, existe ou não, através do escalonamento do mesmo.

2.3 REGRA DE SARRUS

Podemos utilizar um dispositivo prático para calcularmos o determinante de ordem 3, mais conhecido como regra de Sarrus. Esse procedimento consiste em escrevermos, após a última coluna da matriz, as duas primeiras colunas da mesma, obtendo assim duas diagonais paralelas à diagonal principal e duas diagonais paralelas à diagonal secundária. Dessa forma, o determinante é obtido por meio da soma dos produtos dos elementos que estão na diagonal principal (e nas diagonais paralelas à mesma) subtraído pela soma dos produtos dos elementos que estão na diagonal secundária (e das diagonais paralelas à mesma), conforme podemos visualizar a seguir.

$$det\ A = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{13} & a_{23} \end{array}\right.$$

$$det\ A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

A definição de determinante de uma matriz de ordem *n,* para *n* ≥ 3, será realizada mais adiante usando o conceito de permutações, já que é trabalhoso efetuarmos o escalonamento de um sistema linear generalizado de ordem *n*, é necessário a manipulação de todos os n^2 coeficientes do sistema. Porém, percebemos que a definição de determinante a partir da solução de sistemas lineares é intuitiva, quer seja pelo contexto histórico, como pelo contexto prático.

Continuaremos o estudo dos determinantes, mostrando algumas propriedades, as quais serão úteis para entendermos um pouco mais sobre esse conceito e suas aplicações. No entanto, o principal ganho de tais propriedades é no sentido da eficiência computacional dos determinantes.

2.4 PROPRIEDADES

Para demonstração das propriedades dos determinantes, que serão enunciadas a seguir, usaremos a definição proposta neste capítulo e as operações elementares em matrizes. Demonstraremos tais propriedades para matrizes de ordem 1, 2 e 3. Algumas propriedades demonstradas poderão ser utilizadas na demonstração de propriedades subsequentes. A priori, mostraremos que o determinante da matriz transposta de *A* é igual ao determinante da matriz A. Isso será de grande importância na demonstração das outras propriedades.

2.4.1 Matriz Transposta

Seja *A* uma matriz *m x n* dada pelos elementos a_{ij}. Chamamos de matriz transposta de *A* e denotamos por A^T, a matriz de ordem *n x m* formada pelos elementos a_{ji}.

Para calcular o determinante da matriz transposta de *A*, adotaremos a mesma abordagem utilizada na definição de determinantes feita neste capítulo. Ou seja, usando sistemas lineares. Neste caso, temos o seguinte sistema linear:

$$(A^T).X = B,$$

onde a matriz dos coeficientes é a matriz transposta de *A*.

No caso da matriz *A* ser de ordem 1, não há o que fazer.

Sejam as matrizes de ordem 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \; e \; A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Percebemos que a transposta da matriz A_{2x2} difere da matriz A apenas na ordem dos elementos da diagonal secundária, então

$$\det(A^T) = \det A ,$$

pois,

$$a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21} = a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12} .$$

Resta, portanto, apenas a demonstração das matrizes de ordem 3.

Sejam a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ e o sistema linear

$$S: \begin{cases} a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z = b_1 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z = b_2 \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z = b_3 , \end{cases}$$

ou na forma matricial $(A^T).X=B$ como

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Efetuando o escalonamento do sistema linear S da mesma forma que fizemos na definição de determinantes, encontraremos sistemas equivalentes, que chamaremos de S', tais como:

$$S': \begin{cases} x + \frac{a_{21}}{a_{11}}y + \frac{a_{31}}{a_{11}}z = \frac{b_1}{a_{11}} \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z = b_2 \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z = b_3 , \end{cases}$$

ou

$$S':\begin{cases} x+\frac{a_{21}}{a_{11}}y+\frac{a_{31}}{a_{11}}z=\frac{b_1}{a_{11}} \\ (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})y+(a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31})z=a_{11}b_2-a_{12}b_1 \\ (a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21})y+(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})z=a_{11}b_3-a_{13}b_1\ . \end{cases}$$

Continuando o escalonamento na segunda equação, temos:

$$S':\begin{cases} x+\dfrac{a_{21}}{a_{11}}y+\dfrac{a_{31}}{a_{11}}z=\dfrac{b_1}{a_{11}} \\ y+\left(\dfrac{a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\right)z=\dfrac{a_{11}b_2-a_{12}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ (a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21})y+(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})z=a_{11}b_3-a_{13}b_1\ , \end{cases}$$

ou ainda

$$S':\begin{cases} x+\frac{a_{21}}{a_{11}}y+\frac{a_{31}}{a_{11}}z=\frac{b_1}{a_{11}} \\ y+\left(\frac{a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\right)z=\frac{a_{11}b_2-a_{12}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ a_{11}(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33})z= \\ =a_{11}(b_1a_{12}a_{23}+b_2a_{21}a_{13}+b_3a_{11}a_{22}-b_1a_{22}a_{13}-b_2a_{11}a_{23}-b_3a_{12}a_{21})\ . \end{cases}$$

Dividindo a terceira equação por a_{11} ($a_{11}\neq 0$), temos então

$$S':\begin{cases} x+\dfrac{a_{21}}{a_{11}}y+\dfrac{a_{31}}{a_{11}}z=\dfrac{b_1}{a_{11}} \\ y+\left(\dfrac{a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\right)z=\dfrac{a_{11}b_2-a_{12}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ (a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33})z= \\ =(b_1a_{12}a_{23}+b_2a_{21}a_{13}+b_3a_{11}a_{22}-b_1a_{22}a_{13}-b_2a_{11}a_{23}-b_3a_{12}a_{21})\ . \end{cases}$$

Logo, o valor de *z* é dado por

$$z=\frac{b_1a_{12}a_{23}+b_2a_{21}a_{13}+b_3a_{11}a_{22}-b_1a_{22}a_{13}-b_2a_{11}a_{23}-b_3a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}}\ .$$

O sistema linear S terá solução única a depender do coeficiente $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}$.

Portanto o determinante da matriz transposta de A é dado por

$$\boldsymbol{det\ (A^T) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33},}$$

ou seja, o $\boldsymbol{det\ (A^T) = det\, A.}$

Esse fato nos ajudará na demonstração de outras propriedades, pois se uma condição vale para uma linha qualquer da matriz, valerá, também, para uma coluna. Portanto trataremos de outras propriedades considerando suas filas quaisquer (linhas ou colunas).

2.4.2 Matriz com fila nula

Se uma matriz qualquer A possui uma fila qualquer (linha ou coluna) com todos os elementos iguais a zero, então

$$\det A = 0.$$

De fato, consideremos um sistema linear S onde a matriz *A* dos coeficientes tem uma linha com todos os coeficientes iguais a zero, isso implica que no sistema *S* escalonado, o último coeficiente da última linha é igual a zero, haja visto que, como uma linha possui todos os elementos nulos, a equação pertencente a essa linha terá, necessariamente, coeficientes nulos.

Portanto, podemos garantir a propriedade acima. No caso da matriz *A* do sistema linear *S* possuir uma coluna com todos os elementos iguais a zero, então pela propriedade 2.3.1 o $\det\ (A^T) = \det A = 0.$

2.4.3 Teorema de Jacobi

Seja A uma matriz qualquer, de ordem $n \geq 2$*, se adicionarmos a uma fila qualquer uma outra fila paralela, previamente multiplicada por um escalar qualquer, então obteremos uma nova matriz A', tal que det A' = det A.*

Essa propriedade é garantida pela definição de sistemas equivalentes, vista no Capítulo 1, já que a solução do sistema linear não é alterada quando fazemos tal operação. Porém, para melhor entendimento do caso, mostraremos um exemplo a seguir.

Exemplo 2.1. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, cujo determinante é

$$det\ A = 2.3 - (1.4) = 6 - 4 = 2.$$

Se fizermos $L_2 = L_2 + 2 \cdot L_1$, então teremos a matriz $A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$, cujo determinante é

$$det\ A' = 2.5 - (1.8) = 10 - 8 = 2.$$

Esse teorema será de suma importância, para mostrarmos outras propriedades, bem como, quando necessitarmos usar uma regra que apresentaremos mais adiante conhecida como Regra de Chió, para redução da ordem de uma matriz qualquer.

2.4.4 Filas paralelas iguais ou proporcionais

O determinante de uma matriz A que possui filas paralelas iguais ou proporcionais será sempre igual a 0.

Essa propriedade é decorrente das duas anteriores, já que a propriedade 2.3.2 afirma que se uma fila qualquer de *A* tiver elementos iguais a zero, o *det A* = 0; e se usarmos o Teorema de Jacobi multiplicando uma dessas linhas por (-1) no caso de serem iguais ou por (-*k*) no caso de serem proporcionais, de razão *k*, ao adicionarmos a outra fila igual ou proporcional obteremos uma fila totalmente nula, e, portanto, o d*et A* é igual a 0.

Quando podemos escrever uma fila de uma matriz *A* qualquer como uma expressão linear de outras filas paralelas de *A*, dizemos que tal fila é uma combinação linear das outras filas. Usaremos esse conceito e a propriedade 2.3.2 na próxima propriedade.

2.4.5 Teorema da Combinação Linear

Se numa matriz A qualquer, uma das suas filas é uma combinação linear de outras filas paralelas, então o $det\,A = 0$.

Consideremos uma matriz *A* que possua uma linha que possa ser escrita como combinação linear das outras linhas de *A*. Se adicionarmos a essa linha a própria combinação linear, porém, invertendo o sinal dos escalares da combinação linear, obteremos uma nova matriz *A*', que possuirá uma fila totalmente nula e, portanto, $\det A = 0$, o que implica que $\det A = 0$. Observemos o exemplo a seguir.

Exemplo 2.2. A matriz A = $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ é tal que $L_3 = 2 \cdot L_1 + L_2$. Calculando o determinante de *A*, perceberemos que

$\det A$ = (1.3.4+0.(-2).7+2.4.0)-(0.3.0+4.2.(-2)+1.4.7) = 12 – (-16 + 28) = 12 – 12 = 0.

2.4.6 Multiplicação de uma fila por uma constante

Podemos observar nas definições dos determinantes de ordem 2 e 3 que, cada parcela da soma geradora do determinante possui um único elemento da linha ou coluna. Portanto, se multiplicarmos uma fila qualquer da matriz *A* por uma constante k, cada elemento da linha ou coluna será multiplicado por k, e o determinante da nova matriz *A*' será

$$\det A' = k.\det A$$

Consideremos uma matriz *A* de ordem 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

multiplicando, por exemplo, a linha 2 por uma constante k, temos

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ k.a_{21} & k.a_{22} \end{bmatrix}.$$

Pela definição, o determinante de *A'* é calculado da seguinte forma

$$\det A' = a_{11}(k.a_{22}) - a_{12}(k.a_{21}).$$

Colocando *k* em evidência, obtemos

$$\det A' = k.(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = k.\det A\,,$$

o que nos garante a propriedade. Para provarmos essa propriedade no caso da matriz A ser de ordem 3, vamos supor, sem perda de generalidades, que a linha 2 foi multiplicada por *k*, dessa forma obtemos:

$$\det A' = a_{11}ka_{22}a_{33} + ka_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}ka_{23} - a_{31}ka_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}ka_{23} - \\ -ka_{21}a_{12}a_{33},$$

ou ainda,

$$\det A' = k.(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}).$$

Portanto, $\det A' = k.\det A$.

2.4.7 Troca de Filas Paralelas

Seja uma matriz A, qualquer, de ordem n≥ 2. Se trocarmos duas filas paralelas quaisquer desta matriz A, teremos uma nova matriz A' tal que

$$\det A' = -\det A\,.$$

Utilizaremos sistemas lineares para provar essa propriedade para matrizes de ordem 2 e 3. Consideremos, então, um sistema linear de ordem 2

$$\text{S: } \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}.$$

Trocando as linhas 1 e 2 de posição, obteremos o novo sistema

$$\text{S': } \begin{cases} a_{21}x + a_{22}y = b_2 \\ a_{11}x + a_{12}y = b_1 \end{cases}.$$

Chamaremos a matriz dos coeficientes do sistema S', de *A*'. Escalonando esse novo sistema, temos:

$$\text{S': } \begin{cases} x + \frac{a_{22}}{a_{21}}y = \frac{b_2}{a_{21}} \\ ((-a_{11}).\frac{a_{22}}{a_{21}} + a_{12})y = (-a_{11}).\frac{b_2}{a_{21}} + b_1 \end{cases}$$

ou

$$\text{S': } \begin{cases} x + \frac{a_{22}}{a_{21}}y = \frac{b_2}{a_{21}} \\ \left((-a_{11}).a_{22} + a_{21}.a_{12}\right)y = (-a_{11}).b_2 + a_{21}.b_1 \end{cases}.$$

Portanto, o determinante da matriz *A*' dos coeficientes do sistema S' é dada por

$$\det A' = (-a_{11}).a_{22} + a_{21}.a_{12} = -(a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}) = -\det A\ .$$

Para matrizes de ordem 3, adotaremos o mesmo procedimento. Seja um sistema linear de ordem 3

$$S': \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases},$$

trocaremos as linhas 1 e 2 de posição e obteremos um novo sistema

$$S': \begin{cases} a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \ . \end{cases}$$

Chamaremos a matriz dos coeficientes do sistema S', de *A*'. Escalonando esse novo sistema, temos:

$$S': \begin{cases} x + \dfrac{a_{22}}{a_{21}}y + \dfrac{a_{23}}{a_{21}}z = \dfrac{b_2}{a_{21}} \\ a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \ , \end{cases}$$

ou

$$S': \begin{cases} x + \dfrac{a_{22}}{a_{21}}y + \dfrac{a_{23}}{a_{21}}z = \dfrac{b_2}{a_{21}} \\ (-a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12})y + (-a_{11}a_{23} + a_{21}a_{13})z = -a_{11}b_2 + a_{21}b_1 \\ (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})y + (a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23})z = a_{21}b_3 - a_{31}b_2 \ . \end{cases}$$

Utilizando o mesmo procedimento na segunda equação, temos:

$$S': \begin{cases} x + \dfrac{a_{22}}{a_{21}}y + \dfrac{a_{23}}{a_{21}}z = \dfrac{b_2}{a_{21}} \\ y + \left(\dfrac{-a_{11}a_{23} + a_{21}a_{13}}{-a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12}}\right)z = \dfrac{-a_{11}b_2 + a_{21}b_1}{-a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12}} \\ (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})y + (a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23})z = a_{21}b_3 - a_{31}b_2 \ , \end{cases}$$

ou ainda

$$S': \begin{cases} x + \frac{a_{22}}{a_{21}}y + \frac{a_{23}}{a_{21}}z = \frac{b_2}{a_{21}} \\ y + \left(\frac{-a_{11}a_{23} + a_{21}a_{13}}{-a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12}}\right)z = \frac{-a_{11}b_2 + a_{21}b_1}{-a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12}} \\ a_{21}(-a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})z = \\ = a_{21}(-b_1a_{21}a_{32} - b_2a_{12}a_{31} - b_3a_{11}a_{22} + b_1a_{22}a_{31} + b_2a_{11}a_{32} + b_3a_{21}a_{12}) \ . \end{cases}$$

Dividindo a terceira equação por a_{21}, temos então

$$S': \begin{cases} x + \dfrac{a_{22}}{a_{21}} y + \dfrac{a_{23}}{a_{21}} z = \dfrac{b_2}{a_{21}} \\ y + \left(\dfrac{-a_{11}a_{23} + a_{21}a_{13}}{-a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12}}\right) z = \dfrac{-a_{11}b_2 + a_{21}b_1}{-a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12}} \\ (-a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})z = \\ = (-b_1a_{21}a_{32} - b_2a_{12}a_{31} - b_3a_{11}a_{22} + b_1a_{22}a_{31} + b_2a_{11}a_{32} + b_3a_{21}a_{12})\,. \end{cases}$$

Dessa forma, de acordo com a definição adotada, o determinante da matriz *A'* é dado por

$\det A' = -\,a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}$, ou

$$\det A' = -\,(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}).$$

Portanto, $\det A' = -\det A$.

2.4.8 Fila como soma de duas parcelas

Se uma matriz quadrada *A* tem todos os elementos de uma de suas filas (f) igual à uma soma de duas parcelas, então podemos calcular o determinante dessa matriz *A* através da soma dos determinantes associados a duas outras matrizes. Em cada uma dessas novas matrizes, cada elemento correspondente à fila f ficará substituído por uma das suas parcelas iniciais. Por exemplo, se *A* é uma matriz tal que

$$a_{31} = b_{31} + c_{31},$$
$$a_{32} = b_{32} + c_{32} \text{ e}$$
$$a_{33} = b_{33} + c_{33},$$

então temos que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

2.4.9 Teorema de Binet

A multiplicação de matrizes é uma das operações que mais demanda trabalho, e calcular o determinante de um produto de duas matrizes poderia ser bem trabalhoso. O teorema de Binet nos ajuda a resolver tal situação.

Sendo A e B duas matrizes quadradas de mesma ordem, e A.B a matriz-produto, então temos que

$$\det(A.B) = \det A\,.\det B\,.$$

Vamos demonstrar essa propriedade para matrizes de ordem 2, sendo que para matrizes de qualquer ordem *n*, o procedimento é análogo.

Sejam as matrizes de ordem 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \; e \; B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix},$$

temos que a matriz *A.B é*:

$$A.B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Logo, o determinante da matriz *A.B* é

$$\begin{aligned}
\det(A.B) &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) = \\
&= \cancel{a_{11}b_{11}a_{21}b_{12}} + a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} + \cancel{a_{12}b_{21}a_{22}b_{22}} \\
&\quad - \cancel{a_{11}b_{12}a_{21}b_{11}} - a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} - a_{12}b_{22}a_{21}b_{11} - \cancel{a_{12}b_{22}a_{22}b_{21}} \\
&= a_{11}a_{22}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) + a_{12}a_{21}(b_{12}b_{21} - b_{11}b_{22}) \\
&= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\
&= det\ A\,.det\ B\,.
\end{aligned}$$

Portanto, para calcularmos o determinante do produto de duas matrizes, podemos fazer o produto dos determinantes das matrizes, o que torna o processo menos trabalhoso.

2.4.10 Matriz triangular

Chamamos de matriz triangular a toda matriz *A* que possui os elementos acima ou abaixo da diagonal principal iguais a zero. Quando os elementos a_{ij} acima da diagonal principal, ou seja, $i < j$, são iguais a zero, dizemos que *A* é uma matriz triangular inferior. Por outro lado, quando os elementos a_{ij} abaixo da diagonal principal, ou seja, $i > j$, são iguais a zero, dizemos que *A* é uma matriz triangular superior.

O determinante da matriz triangular, quer seja ela inferior ou superior, é sempre igual ao produto dos elementos da diagonal principal. Isto é:

$$\det A = a_{11}. \dots . a_{nn}.$$

Demonstraremos esta propriedade, a priori, para matrizes de ordem 2, logo após para matrizes de ordem 3. Seja a matriz triangular inferior *A* de ordem 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

O determinante da matriz *A* será dado por

$$\det A = a_{11}.a_{22} - a_{21}.0 \ ,$$

ou seja,

$$\det A = a_{11}.a_{22}.$$

Agora, consideremos uma matriz triangular inferior *A* de ordem 3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Calculemos agora o determinante da matriz *A:*

$$\det A = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{21}.a_{32}.0 + a_{31}.0.0 - a_{22}.a_{31}.0 - a_{33}.a_{21}.0 - a_{11}.a_{32}.0 \ ,$$

ou seja,

$$\det A = a_{11}.a_{22}.a_{33}\ .$$

Considerando que se fizermos a transposição da matriz triangular inferior, obtemos uma matriz triangular superior, e que já provamos que $\det A = \det A^T$, concluímos então que a propriedade é válida tanto para matrizes triangulares inferiores como para matrizes triangulares superiores. Para matrizes de ordem maior que 3, podemos provar utilizando métodos que apresentaremos nas próximas seções, como o Teorema de Laplace e a regra de Chió.

Todas as propriedades vistas até aqui nos auxiliam na solução e compreensão de situações que envolvam determinantes, agilizando muitas vezes o cálculo dos mesmos. Por exemplo, a utilização do Teorema de Jacobi para redução da ordem de um determinante, torna o que seria um processo muito demorado, num modo simples e rápido de calcular um determinante de ordem maior que 3, usaremos em tal processo um importante teorema para o estudo de determinantes, o Teorema de Laplace.

2.5 TEOREMA DE LAPLACE

Seja $A=(a_{ij})$ uma matriz de ordem *n* onde *n* ≥ 2. Definimos o menor complementar do elemento a_{ij} como sendo o determinante da matriz obtida de *A* quando suprimimos a linha *i* e a coluna *j* do respectivo elemento. Representaremos o menor complementar do elemento, por D_{ij}. Por outro lado, o cofator A_{ij} do elemento a_{ij} é dado por $A_{ij} = (-1)^{i+j}.D_{ij}$, o qual utilizaremos no teorema de Laplace.
O determinante de uma matriz *A* de ordem *n* ≥ 2 a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer pelos seus respectivos cofatores. Ou seja, para um determinado *i*, onde 1 ≤ *i* ≤ *n*, temos que

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in},$$

e para um determinado *j*, onde 1 ≤ *j* ≤ *n*, temos que

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

Exemplo 2.3. O determinante da matriz *A* = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ é dado por:

Utilizaremos aqui o teorema de Laplace a partir dos elementos da primeira coluna, haja visto que temos um dos elementos iguais a zero que diminuirá o cálculo do determinante. Pelo teorema de Laplace temos que

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31},$$

ou seja,

$$\det A = 2.A_{11} + 1.A_{21} + 0.A_{31}.$$

Determinemos então os cofatores A_{11} e A_{21}, considerando que não é necessário calcular A_{31} por estar multiplicando por zero.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 - (12) = -14.$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - (-9)) = -10.$$

Logo o determinante da matriz *A* é

$$\det A = 2.(-14) + 1.(-10) + 0 = -38.$$

Observamos que com o teorema de Laplace, podemos calcular o determinante de uma matriz de qualquer ordem n. Como consequência desse teorema, temos um método que utiliza o teorema de Jacobi para simplificar e reduzir a ordem de uma matriz para cálculo de determinantes, a regra de Chió.

2.6 REGRA DE CHIÓ

Até aqui apresentamos alguns métodos para cálculo de determinantes de matrizes de ordem menor ou igual a 3 e o teorema de Laplace que possibilita o cálculo de determinantes de matrizes de ordem maiores ou igual a 2. Para matrizes de ordem maior ou igual a 2 podemos utilizar, também, o princípio do abaixamento de ordem da matriz, mais conhecida como regra de Chió.

A regra de Chió consiste em reduzir uma matriz de ordem *n* numa matriz de ordem *n-1*, utilizando os seguintes passos:

(i) Precisamos, a priori, que o primeiro elemento da matriz (a_{11}) seja igual a 1. Para tanto, podemos fazer troca de filas paralelas ou dividirmos uma linha por uma constante qualquer $k \neq 0$ ou ainda somarmos uma fila à outra fila multiplicada por uma constante *k* (sem esquecermos das propriedades dos determinantes que vimos neste capítulo);

(ii) Tendo $a_{11} = 1$, faremos com que a linha ou coluna do elemento a_{11}, através do teorema de Jacobi, tenha todos os outros elementos iguais a zero;

(iii) Após os passos *(i)* e *(ii)* o determinante da matriz de ordem *n* é igual ao determinante da matriz de ordem *n-1* suprimindo a linha e a coluna do elemento a_{11} (Observando sempre as propriedades dos determinantes das operações efetuadas no passo *(i)*).

Exemplo 2.3. Calcular o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

Solução: Primeiramente, necessitamos ter como primeiro elemento um número igual a 1. Podemos fazer isso, trocando filas paralelas já que temos o elemento $a_{23} = 1$. Então faremos as trocas:

i) linha 1 com linha 2

$$L_1 \leftrightarrow L_2\text{:}\ \det A = -\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 2 \end{vmatrix}, \text{e}$$

ii) coluna 1 com coluna 3

$$C_1 \leftrightarrow C_3 : \det A = -\left(-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & -3 \\ -2 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & -3 \\ -2 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Como nosso elemento $a_{11} = 1$, podemos zerar os outros elementos da linha 1 utilizando o teorema de Jacobi. Na coluna 2 não há necessidade de operarmos as colunas, haja visto que $a_{12} = 0$. As colunas 3 e 4 serão substituídas, respectivamente, por

$$C_3 = C_3 + (-4).C_1 \text{ e } C_4 = C_4 + 3.C_1,$$

deixando o determinante na forma:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 11 & -1 \\ 4 & -1 & -14 & 12 \\ 5 & -3 & -18 & 17 \end{vmatrix}.$$

Pela regra de Chió, podemos agora suprimir a linha e coluna 1, transformando um determinante de ordem 4, num determinante de ordem 3. O determinante será do tipo

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 11 & -1 \\ -1 & -14 & 12 \\ -3 & -18 & 17 \end{vmatrix},$$

o qual pode ser resolvido por quaisquer métodos, inclusive repetindo o processo da regra de Chió.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 11 & -1 \\ -1 & -14 & 12 \\ -3 & -18 & 17 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & -11 & 1 \\ 1 & 14 & -12 \\ 3 & 18 & -17 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & -11 & 1 \\ 1 & 14 & -12 \\ 3 & 18 & -17 \end{vmatrix}.$$

Trocando as linhas L_1 e L_2,

$$\det A = -\begin{vmatrix} -2 & -11 & 1 \\ 1 & 14 & -12 \\ 3 & 18 & -17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 14 & -12 \\ -2 & -11 & 1 \\ 3 & 18 & -17 \end{vmatrix}.$$

Fazendo $L_2 = L_2 + 2.L_1$ e $L_3 = L_3 + (-3).L_1$, temos:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 14 & -12 \\ -2 & -11 & 1 \\ 3 & 18 & -17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 14 & -12 \\ 0 & 17 & -23 \\ 0 & -24 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 & -23 \\ -24 & 19 \end{vmatrix}.$$

Temos agora um determinante de ordem 2, podendo agora utilizar a definição inicial de determinantes de ordem 2, mas optaremos por continuar utilizando a regra de Chió. Façamos $C_1 = C_1 + C_2$,

$$\det A = \begin{vmatrix} 17 & -23 \\ -24 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & -23 \\ -5 & 19 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 6 & 23 \\ 5 & -19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 23 \\ 5 & -19 \end{vmatrix}.$$

Fazendo a linha 1 como, $L_1 = L_1 + (-1).L_2$, *temos*

$$\det A = \begin{vmatrix} 6 & 23 \\ 5 & -19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 42 \\ 5 & -19 \end{vmatrix}.$$

Por fim, utilizamos, mais uma vez o teorema de Jacobi para anular o elemento a_{21}, utilizaremos $L_2 = L_2 + (-5).L_1$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 42 \\ 5 & -19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 42 \\ 0 & -229 \end{vmatrix}.$$

Suprimindo a linha e coluna de índice 1 temos que

$$\det A = -229.$$

Portanto, podemos perceber que o uso da regra de Chió pode ser utilizado para determinantes de matrizes de qualquer ordem, sendo um método interessante de ser utilizado mesmo para matrizes de ordem menor ou igual a 3.

2.7 GENERALIZANDO A DEFINIÇÃO

É notório que não temos como apresentar a definição de determinantes de uma matriz genérica através do escalonamento de um sistema linear de ordem n. Portanto, apresentaremos a definição generalizada para determinantes de ordem *n* e o seu método de cálculo utilizando o conceito de permutações.

2.7.1 Permutações

A permutação de um conjunto finito é definida como uma função bijetora desse conjunto em si mesmo. Indicamos $p_u = (u_1, u_2, ..., u_m)$ para uma permutação de {1,2,3,...,n}. A quantidade de permutações possíveis em {1,2,3,...,*n*} é dada por *n!*.

2.7.2 Inversão de permutação

Consideremos um conjunto finito *A* com *n* elementos, do qual escolheremos uma das n! permutações p de A e a chamaremos de permutação fundamental p_f. Diremos que há uma inversão em uma permutação p de A em relação à permutação fundamental p_f se, e somente se, a posição de um elemento de A que aparece em p for diferente da posição que o mesmo aparece em p_f.

Exemplo: Seja o conjunto A = {1, 2, 3, 4} em que os elementos são distintos dois a dois. É possível escrevermos 24 (n! = 4!) permutações de A. Consideraremos como permutação fundamental $p_f = (1, 2, 3, 4)$, logo a permutação $p_u = (2, 4, 3, 1)$ apresenta 4 inversões em relação à p_f.

O número de inversões de p em relação à p_f define se uma permutação é considerada par ou ímpar. Dizemos que p é uma permutação par, ou de classe par se, e somente se, o número de inversões for par. Analogamente, p será ímpar, ou de classe ímpar se, e somente se, o número de inversões for ímpar.

Tendo definido o conceito e algumas propriedades da permutação, podemos agora definir genericamente determinantes.

Em alguns casos, a definição geral é descrita como definição simbólica, haja visto que a sua operacionalidade é um pouco dificultosa pela quantidade de permutações possíveis a partir de uma matriz de ordem superior a 3 e, portanto, é pouco utilizada no contexto do Ensino Médio. Utilizaremos uma definição baseada em (ANTON, 2001) que norteará a nossa proposição.

2.7.3 Definição geral

Seja a matriz *A* uma matriz quadrada de ordem *n.* Definimos determinante de *A* e indicaremos *det A* ou |*A*|, ao número real que satisfaz a equação:

$$\det A = \sum_{p_1}^{p_n} (-1)^{ni} . a_{1j_1} . a_{2j_2} . (\dots) . a_{nj_n}$$

onde *ni* é o número de inversões da permutação $p = (j_1, j_2, j_3, ..., jn)$ em relação à permutação (1, 2, 3, ..., n) escolhida como fundamental; e o intervalo p_1 à p_n indica que a soma é sobre todas as *n!* permutações p_u de {1, 2, 3, ..., n}.

Mostraremos como exemplo a definição do determinante de ordem 3.

A priori, determinamos todas as permutações de {1,2,3} e o número de inversões que cada permutação apresenta em relação à $p_f = (1,2,3)$.

$p_1 = (1, 2, 3) \qquad ni = 0$

$p_2 = (1, 3, 2) \qquad ni = 1$

$p_3 = (2, 1, 3) \qquad ni = 1$

$p_4 = (2, 3, 1) \qquad ni = 2$

$p_5 = (3, 1, 2) \qquad ni = 2$

$p_6 = (3, 2, 1) \qquad ni = 3.$

Aplicando a definição geral, temos:

$$\det A = \sum_{p_1}^{p_n} (-1)^{ni} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

$$\det A = (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31}\ .$$

Colocando os sinais de + e – agrupados, podemos escrever

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

É importante ressaltar que poderíamos tomar qualquer permutação de {1,2,3} como fundamental, colocá-las nos índices linha e redefinir o somatório, por exemplo, p_f = *(3,2,1)*, poderia ser usada como fundamental. Analogamente, poderíamos fazer o mesmo com as colunas, pois já provamos anteriormente que $\det A = \det A^T$. Percebe-se, que para matrizes de ordem superior a 3, teremos uma quantidade muito grande de permutações, deixando esse procedimento muito demorado.

CAPÍTULO 3

APLICAÇÕES DOS DETERMINANTES

Neste capítulo, abordaremos algumas aplicações dos determinantes, mostrando a importância deste conteúdo na história da humanidade, tanto na construção do conhecimento científico, bem como em possíveis aplicações do nosso cotidiano. Iniciaremos com a aplicação imediata no contexto histórico que foi o da solução de um sistema linear através dos determinantes, conhecida como Regra de Cramer.

3.1 REGRA DE CRAMER

A regra de Cramer foi criada para resolver sistemas lineares de *n* equações e *n* incógnitas, por meio de determinantes. A mesma foi atribuída ao matemático suíço Gabriel Cramer por tê-la publicado em 1750, em seu trabalho *Introdução à análise das curvas planas*, na qual buscou determinar os coeficientes da cônica $A + By + Cx + Dy^2 + Exy + x^2 = 0$. (Sá, 2004)

Segundo Domingues (2010), essa regra já tinha sido desenvolvida pelo escocês Colin Maclaurin (1698-1746), datando provavelmente de 1729, embora só publicada postumamente em 1748 no seu *Treatise of algebra*. Portanto, Cramer a desenvolveu após Maclaurin, sem conhecer o trabalho do escocês.

3.1.1 Definição

Seja o sistema linear $A.X = B$ de n equações e n incógnitas, onde A é a matriz dos coeficientes, X é a matriz coluna das incógnitas e B é a matriz coluna dos termos independentes. No que consiste a Regra de Cramer? Na ideia de que a solução de cada variável x_i do sistema $A.X = B$ é dada pelo quociente

$$x_i = \frac{D_i}{D},$$

$i=1,2,...,n$. Onde D é o determinante da matriz A, e D_i é o determinante da matriz A_i, matriz A com os termos independentes substituindo os elementos da coluna i.

Este quociente nos remete, imediatamente, ao que pode acontecer num sistema linear, dependendo dos valores que encontrarmos nos determinantes. Pois

- Se *D* é diferente de zero, o sistema será bem definido, porque cada incógnita x_i terá apenas uma solução. Portanto, dizemos que o sistema é *Possível e Determinado*;

Se *D* for igual a zero, então teremos 2 possibilidades:

- Quando D_i for igual a zero, teremos uma indeterminação para x_i, haja visto que $x_i = \frac{0}{0}$, e então, infinitas soluções para x_i. Dizemos então que o sistema é *Possível e Indeterminado;*
- Quando D_i for diferente de zero, não há valores para x_i que satisfaçam o sistema. Dizemos que esse sistema é *Impossível.*

Outro argumento que deixa claro tais situações, é a geometria dos sistemas lineares. Traçamos as figuras (retas nos sistemas de ordem 2 ou planos nos sistemas de ordem 3) correspondentes às equações contidas no sistema e verificamos os seus comportamentos:

- Quando se interceptam num único ponto, o sistema é *Possível e Determinado*;
- Quando a intersecção é uma reta ou um plano (nos casos de ordem 3), o sistema é *Possível e Indeterminado*;
- Quando não há intersecção entre todas as retas ou planos, o sistema é *Impossível*.

Traremos, abaixo, um exemplo da resolução de um sistema linear através da Regra de Cramer.

Exemplo 3.1: Consideremos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 2 \\ -x + y + 3z = 10 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \end{cases}$$

Calculando os determinantes D, D_1, D_2 e D_3, conforme a Regra de Cramer, obtemos:

O determinante da matriz dos coeficientes:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 27 - 4 + 6 + 12 + 6 = 51.$$

O determinante D_1 da matriz dos coeficientes, trocando a fila dos coeficientes de x pelos termos independentes:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 10 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 45 + 40 + 10 + 12 - 60 = 51.$$

O determinante D_2, calculado de forma análoga ao processo de D_1 (só que agora trocamos a coluna dos coeficientes de y pelos termos independentes):

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 10 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 40 + 18 + 10 + 60 + 4 - 30 = 102,$$

e o determinante D_3, calculado de modo análogo aos outros dois últimos:

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 10 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 90 + 4 - 6 + 40 + 15 = 153.$$

Sabendo os valores dos determinantes D, D_1, D_2 e D_3, calculamos a solução do sistema:

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{51}{51} = 1;$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{102}{51} = 2; \text{ e}$$

$$z = \frac{D_3}{D} = \frac{153}{51} = 3.$$

Esse, talvez, seja o método mais prático para solução de um sistema linear de ordem $n \leq 4$. O número de operações que a regra de Cramer envolve é muito grande para sistemas lineares com muitas equações. Segundo Boldrini (1980), o número de operações para resolver um sistema de ordem n, pela regra de Cramer, é de $(n+1)(n!n-1)$, que é maior que se efetuarmos os $n!$ produtos de n fatores, e depois somá-los.

3.2 O DETERMINANTE E A MATRIZ INVERSA

Consideremos uma matriz quadrada A de ordem n. A matriz inversa (A^{-1}) da matriz A é tal que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n \,,$$

onde I_n é a matriz Identidade de ordem n, ou seja, uma matriz quadrada onde os elementos da diagonal principal são todos iguais a 1 e todos os outros elementos são iguais a 0. A matriz Identidade é conhecida como o *Elemento Neutro* do produto de matrizes.

Utilizando a definição acima podemos encontrar a matriz inversa, tomando A^{-1} como uma matriz genérica X de ordem *n e resolver a equação matricial* $A.X=I$, o que nos leva a n sistemas lineares de ordem n para serem solucionados. A solução de cada um dos sistemas lineares forma uma coluna da matriz inversa. Porém, existe uma relação importante entre a matriz inversa A^{-1} e o determinante da matriz A, que determina a condição de existência de A^{-1} até o próprio cálculo da mesma.

3.2.1 Condição de existência da matriz inversa

Uma matriz A é invertível se, e somente se, o determinante de A é diferente de 0. Usaremos a definição de matriz inversa para provar essa afirmação. Temos que dada uma matriz quadrada A qualquer, a sua inversa A^{-1} satisfaz

$$A.A^{-1} = I_n.$$

Como o produto das duas matrizes será uma matriz de ordem n temos que essa igualdade garante a igualdade dos seus determinantes

$$\det (A.A^{-1}) = \det I_n.$$

O teorema de Binet afirma que o determinante do produto de duas matrizes é igual ao produto dos determinantes das duas matrizes. Por outro lado, o determinante de uma matriz identidade é sempre igual a 1, haja visto que os únicos elementos diferentes de zero são os elementos da diagonal principal (todos iguais a 1). Portanto, temos

$$det\ A\ .\ det\ A^{-1} = 1,$$

o que nos leva a afirmação que, para existir a matriz inversa A^{-1} é necessário que o determinante de A seja diferente de 0, pois

$$det\ A^{-1} = \frac{1}{det\ A}\ .$$

3.2.2 Cálculo da matriz inversa por determinantes

Para determinarmos a matriz inversa da matriz *A*, se torna necessário sabermos qual o determinante da matriz *A.* Além disso, teremos que determinar uma outra matriz denominada matriz adjunta, que por sua vez necessita encontrar o cofator de cada elemento de A.

Os cofatores A_{ij} dos elementos a_{ij} de uma matriz *A* são determinados pela expressão

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\ .\ |D_{ij}|,$$

onde $|D_{ij}|$ é o determinante da matriz resultante da eliminação da linha *i* e da coluna *j* correspondente ao elemento a_{ij}. A matriz Adjunta de *A* (denotaremos por Adj(*A*)) é a transposta da matriz dos cofatores de *A*.

Tendo em posse o valor do determinante de *A* e a matriz adjunta, podemos então determinar a matriz inversa de *A*. Para tanto, usaremos a seguinte expressão:

$$A^{-1} = \frac{1}{Det\ A} \cdot Adj(A)\ .$$

Este é um método interessante para matrizes de ordem 2 e 3, agilizando, muitas vezes, o cálculo da inversa da matriz *A*. Mostraremos a seguir exemplos de cálculo de matrizes inversas por este método.

Exemplo 3.2: Determinar a inversa da matriz A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$.

Solução:

O determinante da matriz A é 2. Portanto podemos afirmar que existe a inversa da matriz A. Nos casos de matrizes de ordem 2 a matriz adjunta pode ser descoberta rapidamente. Observemos que o cofator de cada elemento dessa matriz será o único elemento que restará quando suprimirmos a linha e a coluna do elemento em questão. Por exemplo, no caso do elemento a_{11} = 2, quando suprimirmos a primeira linha e primeira coluna o único elemento que restará será o a_{22} = 4. Como a adição entre os termos i e j é par, não haverá mudança no sinal (já nos casos dos elementos a_{12} e a_{21}, o sinal será modificado. Então temos:

$$A_{11}=4,\ A_{12}=-6,\ A_{21}=-1,\ \text{e}\ A_{22}=2.$$

Como a matriz adjunta é a transposta da matriz dos cofatores, teremos então que

$$\text{Adj}\ (A) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix},$$

Podemos dizer que para determinar a adjunta de uma matriz A de ordem 2 é só, inverter a posição dos elementos da diagonal principal e inverter o sinal dos elementos da diagonal secundária. Agora vamos encontrar a inversa. Lembrando que o det A = 2, temos:

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \cdot Adj(A) = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.3. Determinar a inversa da matriz A = $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$.

Solução:

O determinante da matriz *A* é 2, logo a matriz *A* é invertível. Determinemos agora os cofatores de cada elemento (nesse caso observamos que ao procurar o cofator de um elemento, restará uma matriz de ordem 2 na qual calcularemos o determinante):

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{12} = -(1).\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = -(1).\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{23} = -(1).\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{32} = -(1).\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Portanto, a matriz Adjunta de *A* é dada por Adj (*A*) = $\begin{bmatrix} 6 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Utilizando a expressão para encontrar a inversa, temos

$$A^{-1} = \frac{1}{Det\ A} \cdot Adj(A) = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2} & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Esta é uma forma mais simples de encontrarmos a inversa de uma matriz A. Para matrizes de ordem maior que 3, acreditamos que este método passe a ser mais trabalhoso, para isso existem ainda outros métodos de encontrar a inversa, como por exemplo, a eliminação de Gauss e a decomposição LU.

3.3 CONDIÇÃO DE ALINHAMENTO DE TRÊS PONTOS

Consideremos três pontos, A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) e C(x_C, y_C) do plano cartesiano xy. Se os pontos A, B e C estão alinhados, então

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Para demonstrar esse teorema, consideraremos três casos:

a) três pontos alinhados horizontalmente

Neste caso, as ordenadas são iguais: isto é, $y_A = y_B = y_C$. O determinante é nulo, pois a 2ª e a 3ª coluna são proporcionais.

b) três pontos alinhados verticalmente

Neste caso, as abscissas são iguais: isto é, $x_A = x_B = x_C$. O determinante também é nulo, pois a 1ª e a 3ª coluna são proporcionais.

c) três pontos numa reta não-paralela aos eixos coordenados

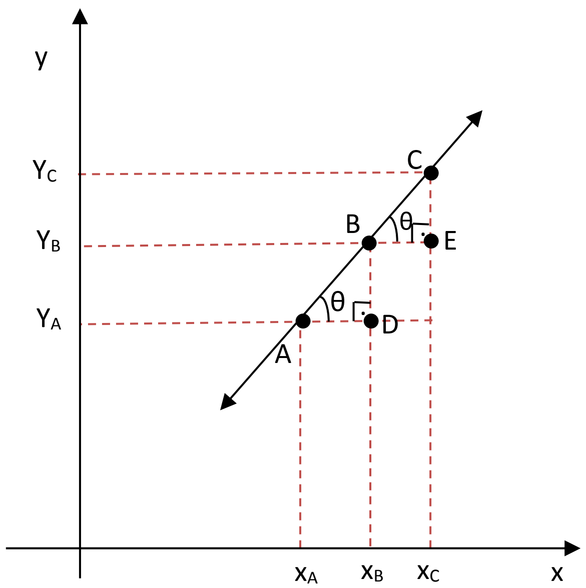

Gráfico 1 – três pontos por uma reta não-paralela aos eixos

Pelo Gráfico 1, verificamos que os triângulos ABD e BCE são semelhantes. Então:

$$\frac{AD}{BE} = \frac{DB}{EC} \Rightarrow \frac{x_B - x_A}{x_C - x_B} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_B}.$$

Desenvolvendo a equação obtemos

$$\frac{x_B - x_A}{x_C - x_B} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_B} \Rightarrow (x_B - x_A)(y_C - y_B) - (x_C - x_B)(y_B - y_A) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_B y_C - x_A y_C - x_B y_B + x_A y_B - x_C y_B + x_C y_A + x_B y_B - x_B y_A = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A - x_A y_C - x_C y_B - x_B y_A = 0.$$

Por outro lado, temos

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_A y_C - x_C y_B - x_B y_A .$$

Então

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Observação: A recíproca da afirmação demonstrada é válida. Isto é, se $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$, então os pontos $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ estão alinhados.

Exemplo 3.4 – Verificar se os pontos *A*(0,3), *B*(6,2) e *C*(5,1) estão alinhados.

Solução: precisamos averiguar se o determinante formado, a partir das coordenadas dos pontos dados, é igual a zero.

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.2.1 + 3.1.5 + 6.1.1 - (1.2.5 + 1.1.0 + 1.3.6) = 21 - 28 = -7.$$

Portanto os pontos *A, B* e *C* não estão alinhados.

Podemos utilizar, ainda, o resultado anterior para determinar a equação geral de uma reta que passa por dois pontos dados. O princípio é o mesmo, pois se conhecemos dois pontos quaisquer $A(x_A,y_A)$ e $B(x_B,y_B)$ por onde passa uma reta r, então qualquer outro ponto $C(x,y)$ satisfará a expressão

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

gerando assim a equação geral da reta que passa pelos pontos *A* e *B*.

Por outro lado, se o determinante definido a partir dos três pontos dados for diferente de 0, então os pontos não estão alinhados e, portanto, esses três pontos formam um triângulo. Neste caso o módulo do determinante calculado com os pontos *A, B* e *C*, equivale ao dobro da área do triângulo *ABC*. Isto é,

$$A_{\Delta ABC} = \left| \frac{1}{2} . \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \right| .$$

No caso do exemplo 3.4, a área do triângulo formado pelos pontos *A, B* e *C* é igual a

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} . \left| \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} . |-7| = 3{,}5 \ u.a..$$

Percebemos então que, o uso do determinante, neste caso, pode nos trazer soluções para situações distintas da Geometria Analítica. Na próxima seção, que nos auxilia na prova da equação acima.

3.4 PRODUTO VETORIAL

A análise vetorial facilitou a aprendizagem e aplicação dos conhecimentos sobre a exploração do espaço físico. Segundo (EVES, 2004, p.578) “Deve-se esse trabalho especialmente ao físico americano Josiah Willard Gibbs (1839 – 1903) [...] ele utilizou o conceito gráfico de vetor como um segmento de reta orientado ...”. Seguimos a abordagem de (LIMA, 2011) para definirmos o produto vetorial.

3.4.1 Definição

Consideremos em $\mathbb{R}^3$, com eixos coordenados xyz, dois vetores $u = (a_1,b_1,c_1)$ e $v = (a_2,b_2,c_2)$ não-nulos e não múltiplos um do outro, ou seja *u* e *v* são vetores linearmente independentes. Devemos encontrar um outro vetor não-nulo $w = (x,y,z)$ que seja simultaneamente ortogonal a *u* e a *v*, isto é, $u.w=0$ e $v.w=0$. Então devemos ter

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}.$$

Como os dois vetores *u* e *v* são linearmente independentes podemos dizer que $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ou $a_2c_1 - a_1c_2 \neq 0$, ou ainda $b_1c_2 - b_2c_1 \neq 0$. Usando o primeiro caso, sem perda de generalidade, escrevamos o sistema acima na forma

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1z \\ a_2x + b_2y = -c_2z \end{cases}.$$

Teremos como solução para esse sistema

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}z \text{ e } y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}z .$$

Obtemos, então, um vetor

$$w = \left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, 1\right)z.$$

Se escolhermos $z = a_1b_2 - a_2b_1$, então $w = (b_1c_2 - b_2c_1, a_2c_1 - a_1c_2, a_1b_2 - a_2b_1)$. Definimos então o produto vetorial de $u = (a_1,b_1,c_1)$ por $v = (a_2,b_2,c_2)$ como sendo o vetor

$$u \times v = (b_1c_2 - b_2c_1, -(a_1c_2 - a_2c_1), a_1b_2 - a_2b_1).$$

Por outro lado, se consideramos os vetores unitários dos eixos coordenados $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ e $e_3=(0,0,1)$, vemos que

$$u \times v = (b_1c_2 - b_2c_1)e_1 - (a_1c_2 - a_2c_1)e_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_3.$$

Mas,

$$b_1c_2 - b_2c_1 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},\ a_1c_2 - a_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \text{ e } a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Logo

$$u \times v = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} e_3.$$

Portanto, podemos expandir $u \times v$ da seguinte forma

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Exemplo 3.5 - Determine um vetor que seja ortogonal a u = (1,-1,1) e a v = (2,-3,4) simultaneamente.

Solução: Para determinar tal vetor *w* ortogonal a *u* e *v*, podemos utilizar o produto vetorial *u x v*.

$$w = u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = (-4+3)e_1 + (2-4)e_2 + (-3+2)e_3 = -e_1 - 2e_2 - e_3.$$

Portanto, $w = (1,2,1)$ ou qualquer outro vetor múltiplo de w.

3.4.2 Propriedades

As propriedades do produto vetorial são ligadas diretamente às propriedades dos determinantes abordados no capítulo 2.

Sejam os vetores $u = (a_1,b_1,c_1)$ e $v = (a_2,b_2,c_2)$ não-nulos de $\mathbb{R}^3$, são válidas as seguintes propriedades:

1. $u \times v = -(v \times u)$.

Troca de filas paralelas, mudam o sinal do determinante.

2. Sejam $u' = (a_3,b_3,c_3)$ e $v' = (a_4,b_4,c_4)$, vetores do $\mathbb{R}^3$, temos que:

$$(u + u') \times v = u \times v + u' \times v, \text{ e}$$
$$u \times (v + v') = u \times v + u \times v'.$$

A distributividade é válida para os produtos vetoriais.

3. $(\alpha.u) \times v = u \times (\alpha.v) = \alpha.(u \times v)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

A associatividade é válida para os produtos vetoriais, assim como para os determinantes.

4. Seja um vetor w qualquer, temos que o produto interno escalar entre o produto vetorial de u e v com w é dado por

$$\langle u \times v, w\rangle = \det[u, v, w]$$

Considerando $w = (a_3,b_3,c_3)$ e desenvolvendo o determinante em relação à terceira linha, temos:

$$\det[u, v, w] = (b_1c_2 - b_2c_1)a_3 - (a_1c_2 - a_2c_1)b_3 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3 = \langle u \text{ x } v, w\rangle$$

5. *u* x *v* é um vetor ortogonal a *u* e a *v.*

Da propriedade 4, temos que

$$\langle u \text{ x } v, u\rangle = \det[u, v, u] = 0 \; e$$
$$\langle u \text{ x } v, \text{v}\rangle = \det[u, v, v] = 0.1$$

6. *u* x *v* = 0 se, e somente se, os vetores u e v são colineares.

Os vetores *u* e *v* são colineares se, e somente se, $a_1b_2 - a_2b_1 = b_1c_2 - b_2c_1 = a_1c_2 + a_2c_1 = 0$. Como consequência dessa propriedade temos que *u* x *u* = 0.

7. Seja θ o ângulo formado entre os vetores *u* e *v*. Podemos afirmar que o comprimento do vetor $u \text{ x } v$ é dado por
$$\|u \text{ x } v\| = \|u\|.\|v\|.sen\theta.$$

O ângulo θ formado pelos vetores *u* e *v* pode ser calculado por $cos\theta = \frac{\langle u.v\rangle}{\|u\|.\|v\|}$. Considerando que o ângulo θ formado pelos vetores é tal que $0 \leq \theta \leq \pi$, então $sen\theta \geq 0$, e assim podemos fazer
$$sen\theta = \sqrt{1 - cos^2\theta}\ .$$

Daí vem que

$$\|u\|.\|v\|.sen\theta = \|u\|.\|v\|.\sqrt{1 - cos^2\theta}$$
$$= \|u\|.\|v\|.\sqrt{1 - \frac{(u.v)^2}{\|u\|^2.\|v\|^2}}$$
$$= \sqrt{\|u\|^2.\|v\|^2 - (u.v)^2}$$
$$= \sqrt{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2}$$
$$= \sqrt{(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (a_2c_1 - a_1c_2)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}$$

$$= \|u \text{ x } v\|$$

Como consequência desta propriedade, temos que $\|u \text{ x } v\|$ é igual a área do paralelogramo de lados *u* e *v*. Observe a figura a seguir:

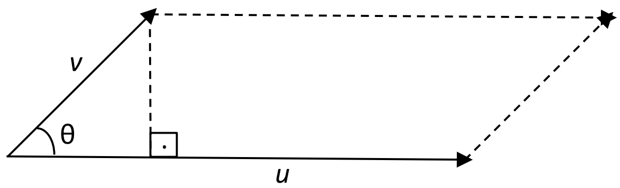

Figura 3.1 – Paralelogramo formado pelos vetores *u* e *v* e suas respectivas projeções

o paralelogramo terá como base um de seus vetores (consideremos, então, a medida da base igual a $\|u\|$) e a altura do paralelogramo será dado pelo comprimento do outro vetor multiplicado pelo seno do ângulo formado pelos dois vetores (consideraremos, então, a altura igual a$\|v\|.sen\theta)$. Portanto, a área do paralelogramo será dada por

$$A = b.h = \|u\|.\|v\|.sen\theta = \|u \text{ x } v\|.$$

Podemos ainda afirmar que a área do paralelogramo descrita acima, pode ser calculada como o valor absoluto do determinante

$$u \text{ x } v = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Lembrando que *det A* = *det A*^{t}, percebe-se que o valor absoluto do determinante acima corresponde ao dobro da área do triângulo formado pelos vértices $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2) e\ C = (c_1, c_2)$.

Segundo (LEON, 2013, p.97), “[...] Em particular, o produto vetorial pode ser utilizado para definir uma direção binormal, que Newton utilizou para derivar as leis de movimento para uma partícula no espaço 3D.”, que foi tornado como algo de mais fácil acesso, exatamente pela utilização dos determinantes para calcular tais vetores.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Estudar a matemática de uma forma mais ampla, considerando não só as suas técnicas, mas também, descobrir os "porquês", indo o mais profundo possível no fundamento daquele conteúdo, nos faz repensar sobre o modo como transmitimos a matemática, quer seja numa sala de aula ou simplesmente numa conversa informal. Neste trabalho apresentamos o estudo dos determinantes, numa perspectiva de contextualização histórica e prática, visando possibilitar a docentes, discentes e curiosos da matemática uma abordagem intuitiva deste conteúdo.

O trabalho, foi constituído por uma pesquisa bibliográfica e teve seu primeiro desafio na busca da historicidade sobre o conteúdo. Traçado um perfil cronológico dos estudos de outros conteúdos relacionados diretamente com os determinantes, principalmente o estudo das matrizes e dos sistemas lineares, percebemos a origem de toda uma discussão sobre os determinantes, que iniciou-se em alguns séculos a.C., e depois de muito tempo, quase 2000 anos foi retomado até chegarmos ao que temos hoje.

Verificamos que a ordem: matrizes, determinantes e sistemas lineares, não traduz a cronologia histórica da construção desses conteúdos, apesar de ser muito utilizada em livros e escolas. De fato, os sistemas lineares não surgiram por causa das matrizes e determinantes, pelo contrário, sistemas lineares é a origem destes outros conteúdos. A partir deste contexto histórico, apresentamos, a priori, a definição e algumas propriedades dos sistemas lineares, com a ideia de que o sistema linear é originário de um problema matemático, e que para resolver tal sistema, podemos nos apropriar das matrizes e suas operações, escalonando o sistema linear, dando origem à definição dos determinantes.

Em geral associamos os determinantes a uma matriz, dessa forma, logo após a definição de sistemas lineares, apresentamos a definição de matrizes, apesar do conceito dessa estrutura vir de um momento histórico posterior ao dos determinantes. Após termos apresentado os sistemas lineares e matrizes, abordamos o conteúdo de determinantes a partir do escalonamento de um sistema linear. Chegamos, através de matrizes de ordem $n \leq 3$, à definição de que o determinante é dado pelo coeficiente da incógnita da última equação do sistema linear após o sistema ter sido escalonado (e não, simplesmente, que o determinante é um número real calculado por operações dos elementos de uma matriz).

A generalização do conceito de determinantes, através de permutação nos traz a possibilidade de formalizar o cálculo dos determinantes para matrizes de ordem *n,* apesar de não ser um método tão prático para a resolução.

Apresentamos algumas aplicações dos determinantes, as quais refletem diretamente, a importância de tal conteúdo. Tais aplicações vão de outro método de resolução de um sistema linear a aplicações em problemas que envolvem movimentos de um corpo no espaço. Era imediato que numa perspectiva contextualizada, a primeira aplicação apresentada fosse o método de resolução de um sistema linear, conhecido como Regra de Cramer, o qual facilita encontrar a solução de sistemas lineares de ordem 2 e 3. A matriz inversa e a sua relação imediata com o determinante, também foi apresentada, não só pela condição de existência da mesma, mas também como alternativa para encontrá-la. Continuamos com outras aplicações diretas de determinantes na geometria analítica, como, a condição de alinhamento de três pontos, que resulta na equação da reta por três pontos e no cálculo da área de um triângulo dadas as coordenadas dos vértices. Além disso, apresentamos como encontrar um vetor que seja ortogonal a dois vetores linearmente independentes, o produto vetorial de dois vetores. Esse último, um recurso utilizado na mecânica newtoniana que procura mostrar o comportamento de corpos num espaço tridimensional.

Por fim, concluímos que ao estudar e abordar o conteúdo de determinantes por uma nova perspectiva, nos fez perceber o quanto nós, professores de matemática, precisamos continuar num processo de busca pelo conhecimento e o entendimento dessa ciência tão vasta, observando o entrelaçamento dos conteúdos que, muitas vezes, são transmitidos de forma desconexa, o seu contexto histórico e as possibilidades de aplicações dos mesmos. Acreditamos que essa mudança de perspectiva não deve ocorrer somente nos conteúdos discutidos neste trabalho, mas deve ser adotada também em outros conteúdos da matemática da Educação Básica de tal forma, que esses possam fazer sentido para os próprios docentes, e principalmente, para os discentes.

Sabemos que as aplicações aqui expostas não são a totalidade do que os determinantes oferecem, por isso pretendemos continuar pesquisando sobre o conteúdo, sempre visando uma melhor compreensão dos conteúdos estudados nessa ciência. Esperamos que este trabalho possa contribuir com outros estudiosos da matemática, do mesmo modo que contribuiu na nossa visão de docência.

5. REFERÊNCIAS

ANTON, H.; RORRES, C.. **Álgebra Linear com Aplicações**, trad. Claus Ivo Doering, 8ª edição, Porto Alegre: Bookman, 2001.

BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra Linear,** 3ª edição, São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

BOYER, C.B.; MERZBACH, U.C.. **História da Matemática**. Trad. Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. MEC. SEF. **Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio**. Brasília, 2002.

EVES, H.. **Introdução à história da matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FILHO, B. B.; SILVA, C. X.. **Matemática: aula por aula, PNLEM, aprovado pelo MEC**. 1ª edição, São Paulo: FTD, 2003.

GONÇALVES, E. M.; CRUZ, L. F.; CHUEIRI, V. M. M.. **Introdução ao estudo da Álgebra Linear.** São Paulo: Cultura Acadêmica, 2012.

HAZZAN, S.; IEZZI, G. **Fundamentos da Matemática Elementar.** 8ª edição São Paulo: Atual, 2012. V. 4.

LEON, S.J.. **Álgebra linear com aplicações,** trad. Sérgio Gilberto Taboada, 8ª edição, Rio de Janeiro: LTC, 2013**.**

LIMA, E.L. **Geometria analítica e álgebra linear.** 2ª edição, Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

SÁ, F. L.. Estudo dos Determinantes. **Caderno Dá-Licença**. Rio de Janeiro, ano 6, n. 5, p. 71-84, Dezembro 2004.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P.. **Álgebra Linear**. 2ª edição, São Paulo: Pearson Makron Books, 2008.