UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO - UNIVASF

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

WALDICLECYO SOUZA SILVA

ENSINO-APRENDIZAGEM DE CÔNICAS EM TURMAS COM NÚMERO REDUZIDO DE ALUNOS: APLICAÇÃO E AVALIAÇÃO DE METODOLOGIA ALTERNATIVA PELO MODELO DE RASCH DICOTÔMICO

Juazeiro-BA

2016

WALDICLECYO SOUZA SILVA

ENSINO-APRENDIZAGEM DE CÔNICAS EM TURMAS COM NÚMERO REDUZIDO DE ALUNOS: APLICAÇÃO E AVALIAÇÃO DE METODOLOGIA ALTERNATIVA PELO MODELO DE RASCH DICOTÔMICO

Trabalho apresentado à Universidade Federal do Vale do São Francisco – UNIVASF, Campus Juazeiro, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Evando Santos Araújo.
Coorientador: Prof. Dr. Adriano Victor Lopes da Silva.

Juazeiro-BA

2016

	Silva, Waldiclecyo Souza.
S586e	Ensino-aprendizagem de cônicas em turmas com número reduzido de alunos: aplicação e avaliação de metodologia alternativa pelo modelo de rasch dicotômico / Waldiclecyo Souza Silva. — Juazeiro-BA, 2016.
	viii, 34 f. : il. ; 29 cm.
	Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro - BA, 2016.
	Orientador: Prof. Dr. Evando Santos Araújo. Coorientador: Prof. Dr. Adriano Victor Lopes da Silva.
	Referências.
	1. Geometria – Estudo e ensino. 2. Cônicas. I. Título. II. Araújo, Evando Santos. III. Silva, Adriano Lopes da. IV. Universidade Federal do Vale do São Francisco.
CDD 516.3	

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Biblioteca SIBI/UNIVASF
Bibliotecário: Renato Marques Alves

UNIVERSIDADE FEDERAL DO
VALE DO SÃO FRANCISCO

Universidade Federal do Vale do São Francisco

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT/UNIVASF

PROFMAT

ENSINO-APRENDIZAGEM DE CÔNICAS EM TURMAS COM NÚMERO REDUZIDO DE ALUNOS: APLICAÇÃO E AVALIAÇÃO DE METODOLOGIA ALTERNATIVA PELO MODELO DE RASCH DICOTÔMICO

Por:

WALDICLECYO SOUZA SILVA

Dissertação aprovada em 11 de agosto de 2016.

Evando Santos Araújo

Prof. Dr. Evando Santos Araújo
Orientador - PROFMAT/UNIVASF

Adriano Victor Lopes da Silva

Prof. Dr. Adriano Victor Lopes da Silva
Coorientador - PROFMAT/UNIVASF

Lucília Batista Dantas Pereira

Profa. Dra. Lucília Batista Dantas Pereira
Examinadora Interna - PROFMAT/UNIVASF

Luciane R. Dias Gonçalves

Profa. Dra. Luciane Ribeiro Dias Gonçalves
Examinadora Externa – UFU

Juazeiro
2016

Ao meu querido e saudoso pai Valdemar Rodrigues da Silva (in memoriam) e à minha querida mãe Maria Auxiliadora Souza Silva, meus eternos exemplos de vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me dado a capacidade de estudar e aprender todos os conceitos necessários para obter o título de Mestre em Matemática;

À minha esposa Micaele por toda a paciência e apoio;

Ao meu filho Micael, razão do meu viver, pelo incentivo em não desistir de um sonho;

Aos meus pais Valdemar e Auxiliadora por toda a dedicação e exemplo;

Aos meus irmãos Walderey, Waldicley e Wayra pela força nas horas difíceis;

Aos meus familiares e amigos pela confiança depositada em mim;

Aos meus estimados amigos de turma Ana Lúcia, Arnaldo, Erinaldo, Luzia, Marta, Paulo, Raimundo, Rinaldo, Rayala, Wagner Santana e Wagner Santiago por nunca ter deixado o desânimo tomar conta de nossos momentos de estudo, sempre incentivando uns aos outros e torcendo pelo sucesso coletivo;

Ao IMPA, à SBM e à CAPES pela organização e incentivo desse programa de mestrado;

À Coordenação e aos professores do PROFMAT-UNIVASF pela grande contribuição na minha formação acadêmica;

Ao meu Coorientador Prof. Dr. Adriano Victor Lopes da Silva pela disponibilidade em tirar minhas dúvidas na construção desse trabalho;

Ao meu Orientador e amigo, Prof. Dr. Evando Santos Araújo, por toda paciência, confiança, parceria, apoio e incentivo na construção conjunta desse trabalho.

Aos meus alunos que me motivam cada dia mais em ser um bom professor;

A todos que participaram dessa vitória.

É um sorriso contagiante
Mas não é de palhaço
É um sorriso que desmonta
Tem força de dinamite
E grandeza de universo
É um sorriso engolidor
Não é cênico, morto, frio
É inocente – mas não infantil
É irônico – mas não ácido
Filosofias Matemáticas (ou o inverso?)
Acompanham tal sorriso
Tanta beleza nele contida seria fruto
Do avanço tecnológico da tecnologia dentária?
Creio que não!!!
É forjado nas alegrias da vida
Na inocência do menino-homem (ou o inverso?)
É um sorriso somente seu, único, bom
E nosso coração gargalha junto
E sonha estar neste reino
No cativante reinado do teu sorriso.

(Kallil Rockfeller)

RESUMO

Neste trabalho foi proposto um estudo de caso investigativo sobre o processo de ensino-aprendizagem de cônicas em turmas com número reduzido de alunos. Analisou-se a evolução das habilidades dos alunos em tópicos essenciais do conteúdo após intervenção didática proposta com o uso de materiais concretos em comparação com o aprendizado obtido através do ensino habitual oferecido pela escola campo de estudo. A coleta dos dados foi obtida através de questionários e os resultados foram analisados e interpretados pelo modelo de Rasch dicotômico e técnicas de estatística descritiva e inferencial. Os resultados indicaram que os métodos propostos ajudaram a diagnosticar dificuldades de maneira mais efetiva e direcionada, além de apontarem uma grande evolução na habilidade dos entrevistados com relação ao tema em estudo.

Palavras-chave: Ensino-aprendizagem, cônicas, metodologias alternativas, modelo de Rasch.

ABSTRACT

This work proposed an investigative case study on the process of teaching and learning conics in small classes. We analyzed the evolution of students' skills in essential topics content after teaching proposed intervention with the use of concrete materials compared to the learning obtained through the usual education offered by the school field of study. Data collection was obtained through questionnaires and the results were analyzed and interpreted by the Rasch dichotomous model and techniques of descriptive and inferential statistics. The results indicated that the proposed methods have helped to diagnose problems in a more effective and targeted way, in addition to highlighting a great progress in the ability of the respondents on the issue under study.

Keywords: Learning-teaching process, conic sections, alternative methodologies, Rasch model.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Metodologias alternativas que tornem o processo de ensino-aprendizagem de Matemática mais significativo são cada vez mais discutidas em todo o mundo. O ensino de conteúdos com o auxílio de Jogos, de Materiais Concretos, de Novas Tecnologias, da Interdisciplinaridade, da Etnomatemática, da História da Matemática e da Resolução de Problemas são algumas das propostas pedagógicas atuais que vêm sendo utilizadas com essa temática.

Em adição, existem diversos programas de qualificação docente que têm sido elaborados nos últimos anos no Brasil para oferecer capacitação profissional (além de sua formação básica) ao professor de matemática e prepará-lo para lidar com este cenário atual. Programas financeiros do governo, o planejamento e a administração escolar, a participação direta dos pais, a quantidade de alunos e (ou) docentes por classe, também são fatores importantes para otimizar significativamente este processo.

As chamadas curvas cônicas (curvas planas geradas a partir da intersecção entre um cone e um plano) se inserem como um tema aberto de ensino e pesquisa, uma vez que suas propriedades podem ser utilizadas para discutir e modelar fenômenos e situações reais em diversas áreas do conhecimento através das relações entre as quantidades envolvidas.

Nesse sentido, a utilização de métodos que avaliem estes processos educativos e (ou) intervenções didáticas propostas é cada vez mais requerida para tomadas de decisão. Os modelos de Rasch dicotômico e politômico (modelos probabilísticos da Teoria de Resposta ao Item (TRI)) têm sido utilizados para tal fim, quando a análise do processo de ensino (ou de aprendizado, de proficiência, de conhecimento, etc.) é feita com base nas respostas dadas por indivíduos a itens de um questionário de avaliação proposto. Estes modelos permitem a análise individual dos entrevistados e dos itens do questionário ao invés de análises que levam em conta apenas estatísticas grupais dos resultados obtidos[1].

Em educação Matemática, pesquisadores têm utilizado o modelo de Rasch para identificar alunos ingressantes em universidades com necessidade de tutoria em matemática, avaliar universitários com relação ao nível de habilidade em modelagem matemática, identificar respostas inesperadas de professores estagiários formandos em testes de proficiência de conteúdos específicos, avaliar a evolução da habilidade algébrica de alunos do ensino básico ao longo do ano letivo após aplicação de intervenções didáticas, analisar as relações entre formação inicial e proficiência de professores em equações matemáticas, entre outros[2-5].

Neste trabalho, o modelo de Rasch dicotômico foi utilizado para analisar a evolução das habilidades de alunos do 3º ano do ensino médio em tópicos do conteúdo de cônicas, após intervenção didática proposta com o uso de materiais concretos em uma turma com número reduzido de alunos, em comparação com o aprendizado obtido através do ensino habitual oferecido pela escola campo de estudo.

Os resultados, discutidos quantitativamente e qualitativamente, indicaram que os métodos propostos ajudaram a diagnosticar dificuldades de maneira mais efetiva e direcionada, além de apontarem uma grande evolução na habilidade dos entrevistados com relação ao tema em estudo.

1.1 Turmas com Número Reduzido de Alunos

Muitos estudos indicam o aprendizado do aluno como função de diversos fatores como, por exemplo, da experiência e da qualidade do professor, dos materiais e dos métodos utilizados, do investimento financeiro do governo, da administração escolar, da participação direta dos pais, do número de alunos e (ou) docentes por classe, entre outros[6].

A proposta de implantação de turmas com um número reduzido de alunos (ou “turmas reduzidas”) no ensino básico tem sido um tema constante de pesquisa para a melhoria nos processos de ensino-aprendizagem nas últimas décadas em todo o mundo[7, 8].

É conhecido que a adoção desse método pode ser um fator preponderante no aumento dos níveis de desenvolvimento da leitura, da linguagem, de matemática, de ciências e de estudos sociais[9].

Embora políticas governamentais que visem uma educação de maior qualidade com a redução do número de alunos por classe possam gerar elevados custos adicionais aos cofres públicos, estudos apontam um excelente custo-benefício ao governo e à sociedade, em longo prazo. Especialistas em educação e economia nos EUA indicam que a cada dólar investido nessa temática, é retornado o dobro do investimento. Alguns estudos focam nos benefícios econômicos que o governo pode obter com maiores taxas de concluintes do ensino médio com a adoção da proposta, com consequência direta em menores taxas de evasão no ensino médio e nas universidades e de insucesso na vida profissional. Outras análises complementares são baseadas na suposição de que a maximização do rendimento escolar do aluno no ensino básico está associada a uma maior probabilidade de o indivíduo obter sucesso profissional e melhores salários[10, 11].

Um estudo recente publicado no *American Journal of Public Health* (Jornal Americano de Saúde Pública) mostra que a implantação da redução do número de alunos por turma no ensino básico pode retornar um melhor custo-benefício aos governos do que muitos investimentos na área de saúde pública e em campanhas/ intervenções médicas, visto que estudantes de turmas reduzidas têm uma maior probabilidade de continuar os estudos em nível superior (se comparados com estudantes de turmas usuais) e estes, por sua vez, têm um maior entendimento sobre os cuidados com a saúde se comparados aos indivíduos que não continuaram os estudos[12, 13].

Outros trabalhos focam nos benefícios das turmas reduzidas para minimizar disparidades raciais e sociais no aprendizado dos alunos no ensino básico[14, 15]. Em 2012, a partir de um estudo experimental nos EUA, Shin[15] mostrou evidências de que estatisticamente não há diferenças significativas no aprendizado de estudantes negros e brancos em turmas reduzidas. O mesmo não ocorre em turmas usuais.

Nesse contexto, a percepção sobre o número ideal de alunos a participar das atividades relativas às matérias em geral é muito importante porque boa parte do trabalho do docente é baseada, principalmente, na sua capacidade de desenvolvimento de ações específicas, que privilegiem o contexto do atendimento satisfatório e atencioso aos alunos, especialmente em educação matemática. Pesquisadores têm investigado que ganhos efetivos de aprendizagem geralmente ocorrem quando as turmas são reduzidas a uma média de vinte alunos.

A defesa da implantação de turmas reduzidas está centrada no fato de que existe uma relação direta entre a necessidade de adaptação e propagação da fala (ou discurso) do professor ao número de pessoas que compõem o público-alvo desse discurso, em uma ordem de eficácia inversamente proporcional à da quantidade de alunos que será atendida. A chamada eficácia do discurso, portanto, se ancora nesta relação e possui grande importância no contexto da atividade de educar em Matemática[16].

No Brasil, já existem esforços legislativos no sentido de normatizar a redução da quantidade de alunos em sala de aula, como é o caso da PL 4.731/12[17]. O interesse na defesa da proposta se dá em função da proteção da qualidade da educação requerida para as escolas públicas, especialmente a partir dos anos iniciais, quando o acompanhamento pessoal depende essencialmente da capacidade do professor de fato poder desenvolver estratégias que possam ser consideradas plenamente eficazes no contexto da sua materialização na escola. Assim, ao priorizar turmas menores, tanto recursos financeiros, quanto recursos humanos podem ser melhor administrados[18].

Mesmo que propostas de turmas reduzidas nas escolas brasileiras ainda estejam em plena discussão, alternativas podem ser apresentadas com o objetivo de permitir que existam metodologias aplicáveis. A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Brasileira (LDB) [19] permite que as escolas administrem as suas atividades da maneira mais adequada à sua realidade. Um exemplo disso pode ser observado nas aulas de matemática experimental das escolas de referência do estado de Pernambuco, onde se tem divido as turmas grandes com até quarenta alunos em duas turmas de até vinte alunos na busca por um ensino-aprendizagem mais significativo.

A iniciativa, que tomou por base as diretrizes estatais (Secretaria de Educação de PE), buscou sistematizar a carga horária de maneira a favorecer o amplo conhecimento dos alunos por meio do contato mais efetivo com o contexto escolar, tendo por base, principalmente a inserção de novas metodologias aplicadas à educação no estado. As turmas menores são uma característica deste modelo de estruturação curricular o que, de acordo com as estatísticas oficiais, especialmente os números apresentados pelo IDEB, tem propiciado uma significativa melhora nos resultados apresentados pelos educandos na rede pública.

Em adição, pode-se destacar também que o Projeto Político-Pedagógico (PPP) documento-guia que, entre outros aspectos, permite ao gestor, promover mudanças necessárias para a implementação de metodologias que possam contribuir com a efetividade das práticas adotadas na escola.

Frise-se, o PPP é de vital importância no contexto da construção do modelo defendido na presente tese, dado que é a partir dele que o gestor possibilita não apenas a adequação da metodologia, mas também a capacitação do material humano envolvido no contexto da nova orientação técnica (professores, pedagogos, etc.).

Nas escolas em que o PPP é atualizado constantemente, a temática do número reduzido de alunos em sala de aula pode ser debatida e colocada em prática em uma modalidade de trabalho compatível com a capacidade de desenvolvimento de metodologias eficazes visando à melhoria do processo ensino-aprendizagem.

1.2 Contextualização do Estudo de Cônicas

As seções cônicas (ou simplesmente, cônicas) são curvas planas geradas a partir da intersecção entre um plano e um cone. Existem quatro tipos de cônicas (**Fig. 1**): a circunferência, a elipse, a hipérbole e a parábola. Suas características e propriedades geométricas são amplamente utilizadas para solucionar diversos problemas práticos como, por exemplo, em sistemas de localização em navegação, construções civil e mecânica, arquitetura, lançamento de projéteis, nos movimentos planetários, funcionamento de antenas parabólicas, radares, telescópios, espelhos, faróis de veículos, entre inúmeros outros importantes no nosso dia-a-dia.

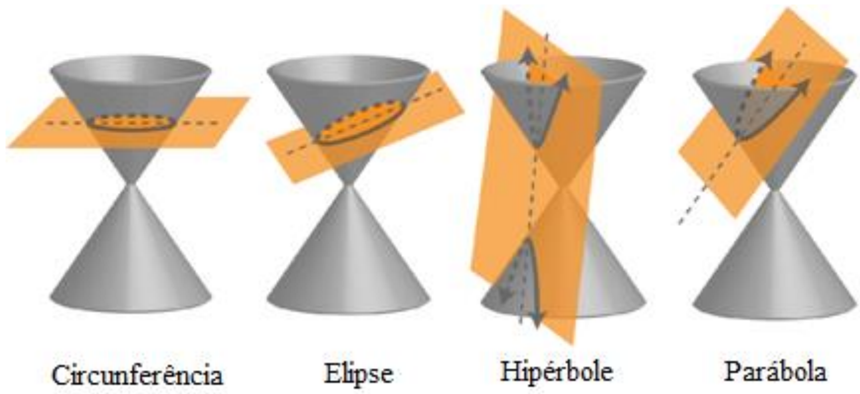


Figura 1. Seções cônicas geradas a partir da intersecção entre um plano e um cone. Adaptada da Ref. 20.

A origem do estudo das cônicas e suas abordagens/propriedades geométricas remontam aos gregos antigos[21]. As generalizações, novos métodos de construção e a descoberta de teoremas foram atribuídos a Apolônio, em sua importante obra "As Cônicas"[21]. As descobertas dos gregos se estenderam durante os primeiros séculos depois de Cristo e foram de suma importância para o avanço nos estudos das cônicas e da matemática como um todo.

Na Idade Média, grandes avanços nos estudos de cônicas foram possíveis com as contribuições do matemático François Viète[22] (século XVI) para o desenvolvimento da álgebra. Entre os estudos mais importantes sobre as cônicas pode-se destacar os trabalhos de Philippe de La Hire (século XVII) como, por exemplo, em sua obra "Novos Elementos das Seções Cônicas"[23, 24]. Das três obras que escreveu, esta é considerada a mais importante por colocar em evidência diversas proposições sobre parábolas, elipses e hipérboles. Apesar de se inspirar em diversos autores, com destaque para os árabes Muhammad Ahmad e Hasan, foi La Hire quem primeiro propôs um tratado abrangendo os teoremas mais importantes e variados sobre a caracterização bifocal das cônicas, que continuaram sendo utilizados na idade contemporânea.

Boyer[21] fundamenta algumas páginas do seu estudo de História da Matemática sobre Geometria Analítica a partir da obra de La Hire, fundamentando boa parte do que se conhece hoje sobre o tema. Saliente-se que as traduções contemporâneas desses trabalhos para o português são praticamente inexistentes. Em seus estudos, Quaranta Neto[24] prefere utilizar-se dos textos traduzidos por Brian Robinson[23] no ano de 1723, a partir dos tratados de La Hire.

No Brasil o ensino de cônicas (como muitos outros) no ensino básico não segue um consenso (com diferentes modelos de apresentação do conteúdo) e geralmente é ministrado no último trimestre do último ano do ensino médio, seguindo o cronograma curricular, em meio à preparação dos alunos para testes de ingresso no ensino superior. A depender das adaptações no planejamento escolar anual, muitas vezes o conteúdo de cônicas é pouco explorado devido à carga-horária insuficiente.

Poucos professores estão qualificados (desenvolvidos profissionalmente, em detrimento apenas de sua formação profissional básica) para propor ações de intervenção didática efetivas em sala de aula que possam detectar, avaliar e solucionar problemas no ensino-aprendizagem. As pesquisas brasileiras relacionadas ao processo de ensino-aprendizagem de cônicas ainda são incipientes e pouco difundidas no meio escolar.

Como consequência desses fatores, há uma maior probabilidade do ensino de cônicas centrar-se apenas na memorização de fórmulas e identificação das curvas, em detrimento da exploração das suas propriedades e suas consequentes aplicações na vida cotidiana. Métodos alternativos como o uso de materiais concretos e (ou) de construção gráfica das cônicas (como por exemplo, utilizando régua e compasso) também são pouco explorados e poderiam ser utilizados para desmistificar o conhecimento sobre as propriedades, os parâmetros, as formas geométricas que as definem e as associações destes com problemas reais.

Entretanto, outros autores abordam o tema de forma diferente da seção do cone; as propriedades focais são alternativas apresentadas, frisando-se haver uma grande variedade de representações que não necessariamente a partir das intersecções de um plano com um cone.

1.3 A Teoria de Resposta ao Item e o Modelo de Rasch Dicotômico

A Teoria da Resposta ao Item (TRI) é um conjunto de modelos probabilísticos usados na análise de resultados de testes de conhecimento/proficiência[25, 26].

A TRI é decorrente da necessidade de superar limitações da chamada Teoria Clássica dos Testes[25], onde a análise dos resultados se baseia apenas nas proporções de acertos e erros de um questionário e ao conjunto de indivíduos investigados[26]. A TRI torna-se mais abrangente na análise de testes de conhecimento à medida que busca investigar o desempenho individual dos indivíduos e a dificuldade de cada item do questionário proposto[28]. Nessa temática de análise de resultados, se trabalha com a probabilidade de um indivíduo com habilidade específica responder positivamente a um dado item do questionário.

No Brasil, os modelos probabilísticos da TRI vêm sendo adotados pelo Ministério da Educação desde a década de 1990 para análise de resultados no Sistema de Avaliação do Ensino Médio (SAEB) e no Exame Nacional Para Certificação de Competências de Jovens e Adultos (ENCCEJA)[27]. Atualmente, a TRI é utilizada para a análise de desempenho dos candidatos no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)[28].

Entre os modelos probabilísticos mais utilizados na TRI, pode-se destacar o chamado Modelo de Rasch[28, 29]. Esse modelo apresenta um número mínimo de parâmetros/variáveis (como por exemplo, a habilidade de um indivíduo no tema em pesquisa, a dificuldade de um item do questionário e a possibilidade de resposta ao acaso em itens de múltipla escolha). Nos modelos de Rasch, a habilidade do indivíduo e a dificuldade do item são expressos em uma mesma escala de medida, o que facilita a determinação da probabilidade de um indivíduo responder satisfatoriamente a um item[28, 29].

O modelo de Rasch dicotômico é bastante utilizado em testes de proficiência com itens com possibilidade de respostas dicotômicas (“sim” ou “não”, “certo” ou “errado”, “concordo” ou “discordo”, “positivo” ou “negativo”, entre outros). Esse modelo considera apenas os parâmetros habilidade dos indivíduos e dificuldade dos itens, quando se garante que não há a possibilidade de respostas ao acaso[28-30].

Considere D_i o parâmetro que expressa as dificuldades dos itens *i = 1, 2, 3..., n* e θ_j o parâmetro que expressará as habilidades dos indivíduos *j = 1,2,3..., m*. Dada a combinação particular de *i* e *j*, (*i.j*), o modelo de Rasch dicotômico permite retomar a probabilidade de o indivíduo *j* responder de forma satisfatória a um item *i*, de acordo com a **Eq. 1** [28].

$$P\left(X_{ij} = 1|\, D_i, \theta_j\right) = \frac{e^{(\theta_j - D_i)}}{1+e^{(\theta_j - D_i)}} \quad (1)$$

Ao desenvolver-se a Eq. (1), considerando-se $P(X_{ij} = 1 / D_i, \theta_j) = P$, $\theta_j = \theta$ e $D_i = D$, obtém-se:

$$\frac{P}{1-P} = e^{\theta - D}. \quad (2)$$

Aplicando-se o logaritmo natural na Eq. (2), têm-se:

$$\ln(\frac{P}{1-P}) = ln\, e^{\theta - D} \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{P}{1-P}\right) = \theta - D \text{ (3)}^{28}.$$

Na Eq. (3), o termo $ln\left(\frac{P}{1-P}\right)$ é denominado *logit* de P ou *log* da chance de sucesso[28, 29]. A chance de sucesso fica, portanto, definida na **Eq. 3** como a razão entre a probabilidade de sucesso (*P*) e a probabilidade de fracasso (1–*P*). Com a equação neste novo formato, a comparação entre θ e D pode ser feita em uma mesma escala métrica de valores $(-\infty, \infty)$, onde se observa que com $\theta \geq$ D a probabilidade de resposta correta P será sempre maior ou igual a 0,5. Em outras palavras, um indivíduo conseguirá responder positivamente a um item quando sua habilidade θ for maior ou igual à dificuldade do item D.

O modelo pode ser representado graficamente por meio das curvas P *versus* $(\theta - D)$ (**Fig. 2**). A análise da **Eq. 1** revela que estas curvas têm um comportamento não linear, seguindo uma curva sigmóide (forma que lembra a consoante “S”). Em adição, a representação gráfica do modelo informa que a probabilidade mínima de resposta positiva (P=0,5 ou $\theta = D$) ocorre no ponto de inflexão da curva.

Nesse contexto, indivíduos (ou grupos de indivíduos) que estejam localizados sobre a curva após o ponto de inflexão (**Fig. 2**), possuem uma probabilidade de sucesso maior que 0,5 e consequentemente respondem positivamente ao item $(\theta > D)$. Essa situação garante que, quanto maior a habilidade do indivíduo para responder um item, mais positiva será a diferença $(\theta - D)$ e, consequentemente, maior a probabilidade de sucesso do indivíduo no item $((\theta \gg D), P \rightarrow 1)$. Caso contrário (P<0,5 ou $\theta < D$), os indivíduos estarão localizados sobre a curva antes do ponto de inflexão, caracterizando os alunos que não obtiveram sucesso no item. Quando$\theta \ll D$, a probabilidade de sucesso tende a zero $(P \rightarrow 0)$.

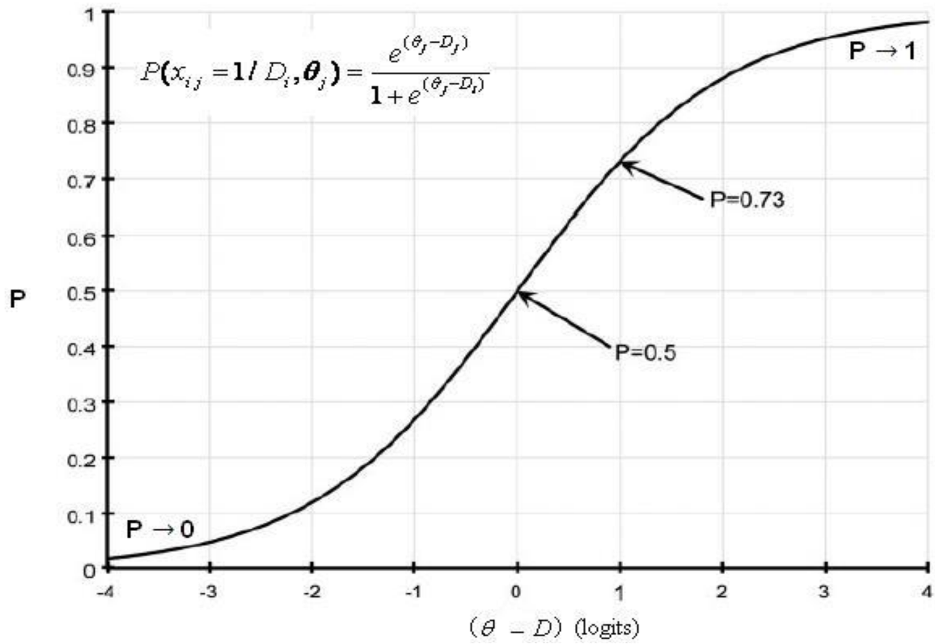


Figura 2. Representação gráfica de *P versus (θ- D)*. Adaptado da Ref. 28.

Outra forma de representar a relação entre as variáveis do modelo em cada item do questionário é através do gráfico P *versus* θ, também chamado de Curva Característica do Item (CCI) (**Fig. 3**).

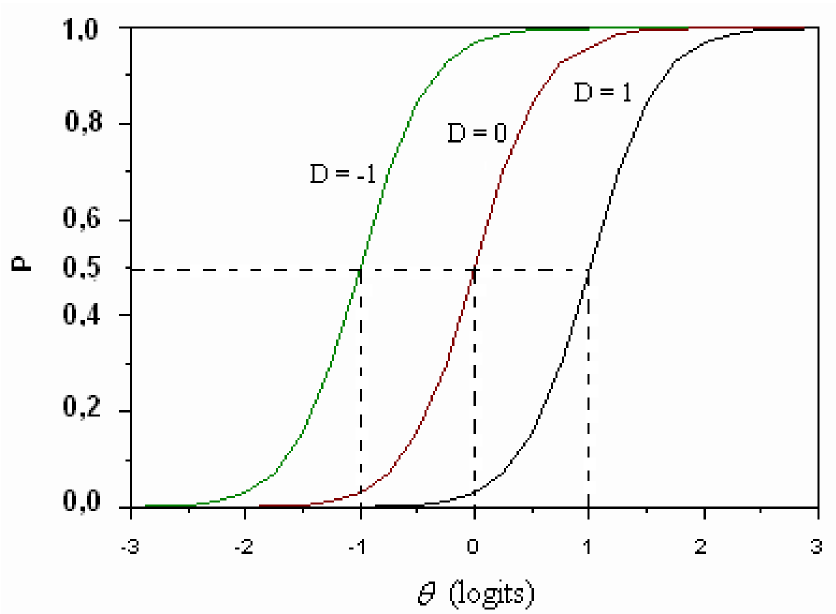


Figura 3. Curvas Características dos Itens (CCI). Adaptado da Ref. 28.

Embora a dificuldade do item não seja informada de forma explícita na CCI, sabe-se que quando P=0,5, $\theta = D$ e, dessa forma, a dificuldade de cada item pode ser mensurada no eixo das habilidades (θ) no ponto de inflexão da curva (como mostrado na Fig. 2).

Quanto maior a dificuldade de um item, mais deslocada para a direita estará a sua CCI em relação às curvas características dos itens com menor dificuldade. A localização dos entrevistados (ou grupo de entrevistados) sob as CCI (antes ou após o ponto de inflexão da curva) retornam a mesma interpretação das curvas P *versus* $(\theta - D)$ com relação à probabilidade de sucesso de resposta a um dado item do questionário.

Em resumo, o modelo apresentado permite a verificação da proficiência dos alunos individualmente e em cada item/tópico de um conteúdo abordado. Dessa forma é possível identificar subgrupos com maior ou menor tendência de sucesso na resposta ao item e direcionar intervenções didático/pedagógicas específicas, de acordo com as necessidades diagnosticadas.

2 METODOLOGIA

2.1 Tipo de Estudo

O presente estudo consiste em uma pesquisa experimental, de campo, aplicada, de cunho qualitativo e quantitativo, com caráter exploratório[31].

A pesquisa experimental desenvolve-se a partir da identificação de um problema de pesquisa, dando ênfase à ideia de investigação. Neste contexto, a intervenção acontecerá no âmbito da realização do estudo *in loco*, privilegiando assim aspectos associados ao controle das variáveis que se apresentam no local de pesquisa. O estudo aplicado, por sua vez, apresenta-se como alternativa eficiente para a coleta de dados em caráter qualitativo, já que os estudos qualitativos destacam-se por não possuírem lastro “quantificável” com os quais se possam elaborar gráficos e planilhas[32].

A pesquisa teve como objetivo avaliar a evolução na proficiência de alunos em tópicos do conteúdo de cônicas, comparando-se o ensino habitual do conteúdo (planejamento do conteúdo no **Anexo A**) com uma intervenção didática proposta (**Apêndice A**).

Os resultados obtidos com as experimentações foram traduzidos para a linguagem gráfica e tabular e (ou) analisados com o auxílio de técnicas de estatística descritiva e inferencial e da TRI.

2.2 Coleta de Dados e Instrumentos da Pesquisa

A coleta dos dados foi obtida a partir de uma amostragem estatística aleatória simples de vinte indivíduos (ID's) (previamente numerados e escolhidos ao acaso a partir do comando "*random data*" do programa estatístico Minitab 14) de um universo de oitenta discentes matriculados no 3° ano do ensino médio de uma escola estadual de referência na cidade de Petrolina-PE.

Todos os ID's selecionados concordaram em participar de um minicurso com proposta didática alternativa após as aulas tradicionais do conteúdo e responderem os questionários de proficiência propostos. Para a intervenção didática, pode-se destacar o uso de sinucas não usuais com formas geométricas cônicas (denominadas de "sinucas cônicas") como materiais concretos para se trabalhar conceitos, definições, propriedades e aplicações relativos à elipse, à hipérbole e à parábola. A confecção das sinucas cônicas é mostrada na **Fig. 4**.

Figura 4. (a) Moldes usados para confeccionar as sinucas cônicas: (b) elíptica, (c) parabólica e (d) hiperbólica.

Os moldes base utilizados para confeccionar as sinucas foram produzidos no programa gráfico Geogebra 5.0 (**Apêndices B, C e D**).

Para avaliar a evolução da proficiência dos alunos no conteúdo e comparar as metodologias didáticas envolvidas, foi aplicado um Questionário Padrão, com itens numerados de 1 a 28 (descritos no **Quadro 1**), em duas oportunidades: após o término do conteúdo de cônicas ministrado tradicionalmente pelo professor da escola campo de estudo (Questionário Q1); e, após a intervenção didática sugerida na pesquisa (denominado de Questionário Q2) complementar às aulas.

O Q1 e o Q2 foram aplicados de forma coletiva, padronizada e no mesmo ambiente onde ocorreu a prática de execução da pesquisa. Os alunos tiveram cento e cinquenta minutos para responder tanto o Q1 quanto o Q2, individualmente e sem o auxílio de fontes de pesquisa.

2.3 Elaboração do Questionário

O Questionário Padrão foi elaborado de forma semi-empírica (a partir de um estudo preliminar na literatura), abordando tópicos relativos às definições, à identificação, à construção, propriedades focais, fórmulas reduzidas e aplicações das propriedades focais das cônicas (elipse, hipérbole e parábola).

Durante a pesquisa bibliográfica para elaboração do questionário, buscou-se levar em conta a discriminação dos itens e de forma com que as respostas fossem a cópia mais fiel possível do que o aluno vivenciou no ambiente escolar, sem a possibilidade dos itens serem respondidos ao acaso (itens independentes um dos outros).

Quadro 1. Descrição dos itens e dos respectivos tópicos de cônicas aos quais estão relacionados, no Questionário Padrão (Q1 e Q2).

Item	***Tópico***
1. Esboce/desenhe uma elipse no plano cartesiano, respeitando suas características geométricas.	Esboço das cônicas.
2. Esboce/desenhe uma hipérbole no plano cartesiano, respeitando suas características geométricas.	Esboço das cônicas.
3. Esboce/desenhe uma parábola no plano cartesiano, respeitando suas características geométricas.	Esboço das cônicas.
4. A equação a seguir representa uma cônica? Se sim, identifique-a. Justifique sua resposta. $$\frac{(x-3)^2}{25}-\frac{(y-1)^2}{9}=1$$	Identificação das cônicas a partir das equações.
5. A equação a seguir representa uma cônica? Se sim, identifique-a. Justifique sua resposta. $$\frac{(2x+3y)^2}{16}+\frac{(y-x)}{x}=1$$	Identificação das cônicas a partir das equações.
6. A equação a seguir representa uma cônica? Se sim, identifique-a. Justifique sua resposta.	Identificação das cônicas a partir das equações.

$\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$	
7. A equação a seguir representa uma cônica? Se sim, identifique-a. $(x-4)^2 = 16.(y-1)$	Identificação das cônicas a partir das equações.
8. Defina matematicamente uma elipse (ou melhor, defina o conjunto de todos os pontos do plano que possuem a dada característica da elipse).	Definição matemática das cônicas.
9. Defina matematicamente uma hipérbole (ou melhor, defina o conjunto de todos os pontos do plano que possuem a dada característica da hipérbole).	Definição matemática das cônicas.
10. Defina matematicamente uma parábola (ou melhor, defina o conjunto de todos os pontos do plano que possuem a dada característica da parábola).	Definição matemática das cônicas.
11. Com base nas técnicas de construção de cônicas, a partir de suas propriedades focais, use régua e compasso para construir corretamente uma parábola.	Construção das cônicas com régua e compasso, a partir das propriedades focais.
12. Com base nas técnicas de construção de cônicas, a partir de suas propriedades focais, use régua e compasso para construir corretamente uma elipse.	Construção das cônicas com régua e compasso, a partir das propriedades focais.
13. Com base nas técnicas de construção de cônicas, a partir de suas propriedades focais, use régua e compasso para construir corretamente uma hipérbole.	Construção das cônicas com régua e compasso, a partir das propriedades focais.
14. Qual a condição para que as retas refletidas na parábola incidam em um único ponto chamado de foco? Justifique sua resposta.	Propriedades focais.
15. Qual a relação existente entre a distância da reta diretriz de uma parábola a um ponto P nesta parábola e a distância deste ponto P ao foco da parábola?	Propriedades focais.
16. Qual a condição para que as retas refletidas na elipse incidam no ponto único chamado de foco? Justifique sua resposta.	Propriedades focais.
17. Qual a relação existente entre a distância de um foco de uma elipse a outro, passando por um ponto P nesta elipse e a distância entre dois vértices pertencentes ao eixo focal?	Propriedades focais.
18. Qual a condição para que as retas refletidas na hipérbole incidam no ponto único chamado de foco? Justifique sua resposta.	Propriedades focais.
19. Qual a relação existente entre a distância de um foco de uma hipérbole a outro, passando por um ponto P nesta hipérbole e a distância entre dois vértices pertencentes ao eixo focal?	Propriedades focais.
20. Determine a equação reduzida da parábola que apresenta foco e diretriz seguintes: F(-3,-2); y + 4 = 0	Determinação da equação reduzida de uma cônica a partir das propriedades focais.
21. O ponto P(4,3) pertence à elipse, cujos focos são F1 (0, 5) e F2(0, -5) e o centro é C(0, 0). Determine a equação reduzida dessa elipse.	Determinação da equação reduzida de uma cônica a partir das propriedades focais.
22. Encontre a equação reduzida da Hipérbole com focos F1(0,-5) e F2(0,5) e um vértice no ponto P(0,– 3).	Determinação da equação reduzida de uma cônica a partir das propriedades focais.
23. Dê um exemplo qualquer de aplicação prática e (ou) tecnológica das propriedades focais da elipse.	Identificação de aplicações práticas e (ou) tecnológicas das propriedades focais das cônicas.
24. Dê um exemplo qualquer de aplicação prática e (ou) tecnológica das propriedades focais da hipérbole.	Identificação de aplicações práticas e (ou) tecnológicas das propriedades focais das cônicas.
25. Dê um exemplo qualquer de aplicação prática e (ou) tecnológica das propriedades focais da parábola.	Identificação de aplicações práticas e (ou) tecnológicas das propriedades focais das cônicas.
26. No farol do carro temos uma lâmpada que possui uma posição focal e entre ela uma cônica. Qual será a melhor cônica que deve ser colocada nesta posição para que as luzes refletidas sigam um trajeto reto. Justifique sua resposta.	Solução de problemas com aplicações práticas e (ou) tecnológicas das propriedades focais das cônicas.
27. Em uma sala de reuniões temos um palestrante sem microfone em um ponto A e um ouvinte em um ponto B. Qual o melhor	Solução de problemas com aplicações práticas e (ou) tecnológicas das

formato dessa sala para que o ouvinte consiga escutar as palavras do palestrante da melhor forma possível? Justifique sua resposta.	propriedades focais das cônicas.
28. Na mesa de sinuca hiperbólica, qual o melhor lugar para posicionar a bola de modo que ela ricocheteie na tabela e siga uma trajetória retilínea em direção ao buraco chamado caçapa? Justifique sua resposta e faça um desenho ilustrando.	Solução de problemas com aplicações práticas e (ou) tecnológicas das propriedades focais das cônicas.

2.4 Estimativas dos Parâmetros e Cálculo das Probabilidades pelo Modelo de Rasch

A análise quantitativa dos dados coletados via Modelo de Rasch dicotômico foi realizada com o programa estatístico jMetrik 3.0[33]. Os parâmetros foram estimados por máxima verossimilhança, utilizando-se o algoritmo iterativo de Newton-Raphson, com o máximo de 150 iterações ou critério de convergência de 0,005.

Com a estimativa dos parâmetros em mãos, as probabilidades P(D,θ) de cada indivíduo j com habilidade θ responder positivamente a um dado item i com dificuldade D foram calculadas a partir da implementação da **Eq.1** (modelo de Rasch dicotômico) em uma computação criada em uma planilha do Excel.

2.5 Análise Estatística dos Dados

A análise estatística dos dados foi realizada com o auxílio do programa estatístico *Minitab* 14. Os resultados amostrais (n=20) de habilidade (como média amostral de habilidade $(\bar{\theta})$ e o desvio padrão da média $(s_{\bar{\theta}})$) foram interpretados através de técnicas estatísticas descritivas usuais. As médias populacionais de habilidade (média estimada para o total de alunos) antes e depois da aplicação da intervenção didática foram determinadas por inferência estatística, em termos de intervalos de confiança $(\bar{\theta} - t_{(\frac{\alpha}{2},n-1)} \frac{s_{\bar{\theta}}}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{\theta} + t_{(\frac{\alpha}{2},n-1)} \frac{s_{\bar{\theta}}}{\sqrt{n}})$, com distribuição *t de Student*, nível de significância do teste α=0,05 (95% de confiança) e n−1 graus de liberdade[34, 35].

Para analisar se houve diferença significativa nas médias de habilidade θ dos ID's, antes $(\bar{\theta}_a)$ e após $(\bar{\theta}_d)$ a intervenção, foi realizado um teste de hipóteses de comparação entre duas médias (teste *t de Student* para comparação de duas médias com variâncias populacionais diferentes e desconhecidas e 95% de confiança). Nesse teste a hipótese nula $(H_0\colon \bar{\theta}_a = \bar{\theta}_d)$, considera que as médias do Q1 são iguais as do Q2 e que não há evolução após a aplicação do minicurso. Por outro lado, a hipótese H_1 $(\bar{\theta}_a \neq \bar{\theta}_d)$ considera que as médias do Q1 e do Q2 são diferentes, evidenciando que há evolução após a aplicação da intervenção. Um "p-valor" (índice estatístico do teste) menor que α sugere a rejeição da hipótese nula, ou seja, aceita-se a afirmação de que as médias de habilidades dos ID's são significativamente diferentes (hipótese H_1).

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

3.1 Dificuldade dos Itens

Em uma primeira análise das respostas do Q1, verificou-se que a maioria dos itens foi estimada com valores positivos na escala *logits* de dificuldade e que os entrevistados não obtiveram sucesso na maioria dos tópicos sobre cônicas. Esse caso representa a situação em que a habilidade dos indivíduos é menor que a dificuldade dos itens. Em outras palavras, o conhecimento dos alunos adquirido a partir das aulas convencionais não foi suficiente para que estes obtivessem êxito em diversos itens do teste proposto.

A quantidade usual de alunos por turma (40 alunos), a complexidade do conteúdo, a carga-horária insuficiente para trabalhar os assuntos, a falta de metodologias alternativas de ensino e de materiais didáticos auxiliares podem ser alguns dos fatores que interferiram diretamente no insucesso dos entrevistados. Como descrito no plano da disciplina, o livro adotado pela escola era a única fonte de pesquisa do professor para trabalhar o conteúdo. Teoricamente o livro deveria ser utilizado como instrumento auxiliar e a busca por outras fontes metodológicas de pesquisa também deveriam naturalmente fazer parte da atividade pedagógica do professor, o que muitas vezes não ocorre na prática[36].

Na tabela da **Fig. 5** são apresentados os valores estimados de dificuldade dos itens antes (D_a) e depois (D_d) da aplicação da intervenção didática.

No Q1, os itens relativos ao tópico "esboço/desenho das cônicas elipse, hipérbole e parábola no plano cartesiano" foram estimados com as pontuações mais negativas (Itens 1, 2 e 3 com *scores* -2,97, -1,73 e -3,96 *logits*, respectivamente), indicando que esse tópico do conteúdo foi considerado o mais fácil para os alunos. O valor mais negativo (-3,96 *logits*) atribuído ao esboço da parábola pode está ligado ao fato dos alunos já terem um conhecimento preliminar da sua forma geométrica, a partir dos estudos de funções quadráticas e equações do 2° grau, na primeira série do ensino médio. Do total de entrevistados, 90%, 75% e 95% responderam corretamente os Itens 1, 2 e 3, respectivamente.

1	-2,97	-3,29	**15**	0,47	0,05
2	-1,73	-3,29	**16**	3,49	-0,30
3	-3,96	-3,29	**17**	2,21	0,65
4	-0,72	-2,02	**18**	3,49	2,10
5	-0,18	0,05	**19**	3,49	2,44
6	-0,46	-1,22	**20**	3,49	7,08
7	-0,97	0,36	**21**	3,49	7,08
8	3,49	-0,30	**22**	3,49	7,08
9	3,49	0,36	**23**	0,87	0,36
10	2,21	-0,30	**24**	0,47	-0,70
11	0,87	-0,30	**25**	-0,18	-1,22
12	3,49	0,65	**26**	0,13	0,05
13	2,21	0,36	**27**	0,87	-1,22
14	0,87	0,05	**28**	3,49	0,05

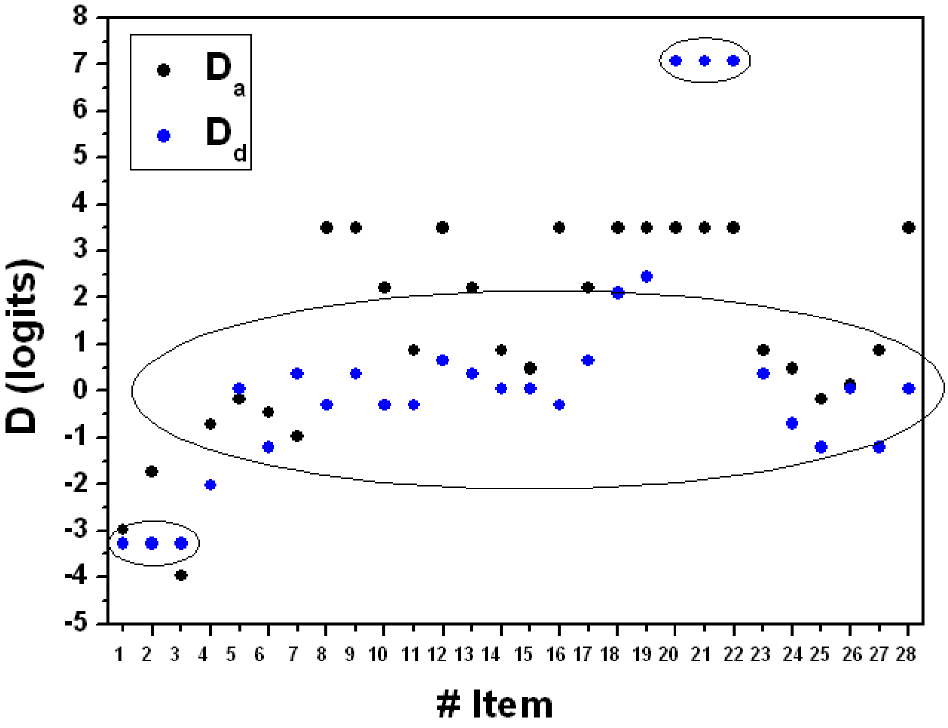


Figura 5. Estimativa dos *scores* de dificuldades dos itens do questionário pelo modelo de Rasch dicotômico: antes (D_a) e depois (D_d) da aplicação do minicurso.

Já os Itens de 4 a 7 do Q1 (relativos à identificação das cônicas dadas as suas equações reduzidas) receberam pontuações mais à direita na escala *logits*, entre -0,97 e -0.18, indicando que este tópico se mostrou com um nível de dificuldade maior do que o obtido no esboço das curvas (**Fig. 5**). Quantificando este resultado, por exemplo, fazendo uma comparação com o Item 2 (D_2=-1,73 *logits*, com 75% de respostas positivas), o Item 5 foi calculado com uma dificuldade 1,55 *logits* maior (D_5 = -0,18 logits) que corresponde a uma redução de 25% de acertos (apenas 50% dos alunos obtiveram sucesso). Esse resultado pode estar ligado ao fato da necessidade de se manipular algebricamente a equação na forma dada, na tentativa de transformá-la em uma das equações reduzidas conhecidas para que a análise pudesse ser realizada.

Os itens 8-28 apresentaram altos níveis de dificuldade, a partir de 85%, chegando a 100% em relação aos demais itens, o que gerou resultados importantes no contexto da pesquisa. Um fato importante observado é que em dezessete desses vinte e um itens (relativos à definição matemática, à construção com régua e compasso, às propriedades focais, às equações reduzidas e às aplicações) o insucesso foi de 100%, a maioria com um valor D = 3,49 *logits* (com uma amplitude de 7,45 na escala *logits* se comparado com o item considerado mais fácil no Q1), como descrito na **Fig. 5**. Com exceção da construção de cônicas com régua e compasso, todos os outros tópicos de cônicas propostos na pesquisa e trabalhados no Q1 estavam descritos nos objetivos específicos do plano de aula do professor da disciplina (Anexo A), o que tornaram os resultados ainda mais preocupantes.

Após a aplicação do minicurso e realização do Q2, foi notada uma evolução significativa na proficiência dos IDs. É possível notar (em destaque na Fig. 5) uma quebra na hierarquia de dificuldade da maioria dos itens, visto que estes agora ocupam a mesma região central na escala *logits* de dificuldades no gráfico D *versus* #Item, deixando evidente que já não existem itens muito fáceis e nem muito difíceis de serem respondidos.

Essa evolução também pode ser confirmada a partir das curvas características dos itens (CCI) antes e depois da intervenção (**Fig. 6**), representadas pelos gráficos P x θ. Nas CCI, cada ponto representa um grupo de indivíduos do experimento avaliados com mesma habilidade, alocados sobre a curva a partir do ajuste dos dados experimentais ao modelo de Rasch (**Eq. 1**). Observa-se no Q1, que a maioria das CCI comportam pontos experimentais concentrados abaixo do ponto de inflexão das curvas indicando que as probabilidades de sucesso dos indivíduos foram menor que 0,5. Nesses casos, os itens se mostraram com dificuldade superior à habilidade θ dos alunos em respondê-los com êxito.

Após a intervenção há uma indicação clara de mudança no nível de proficiência dos alunos, visto o notável deslocamento da concentração dos indivíduos para regiões acima dos pontos de inflexão das CCI, indicando que nesses casos os alunos adquiriram habilidades suficientes para responder corretamente esses itens e aumentar as probabilidades de sucesso (P). Desses IDs, os mais habilidosos estão localizados nas regiões onde $P \rightarrow 1$.

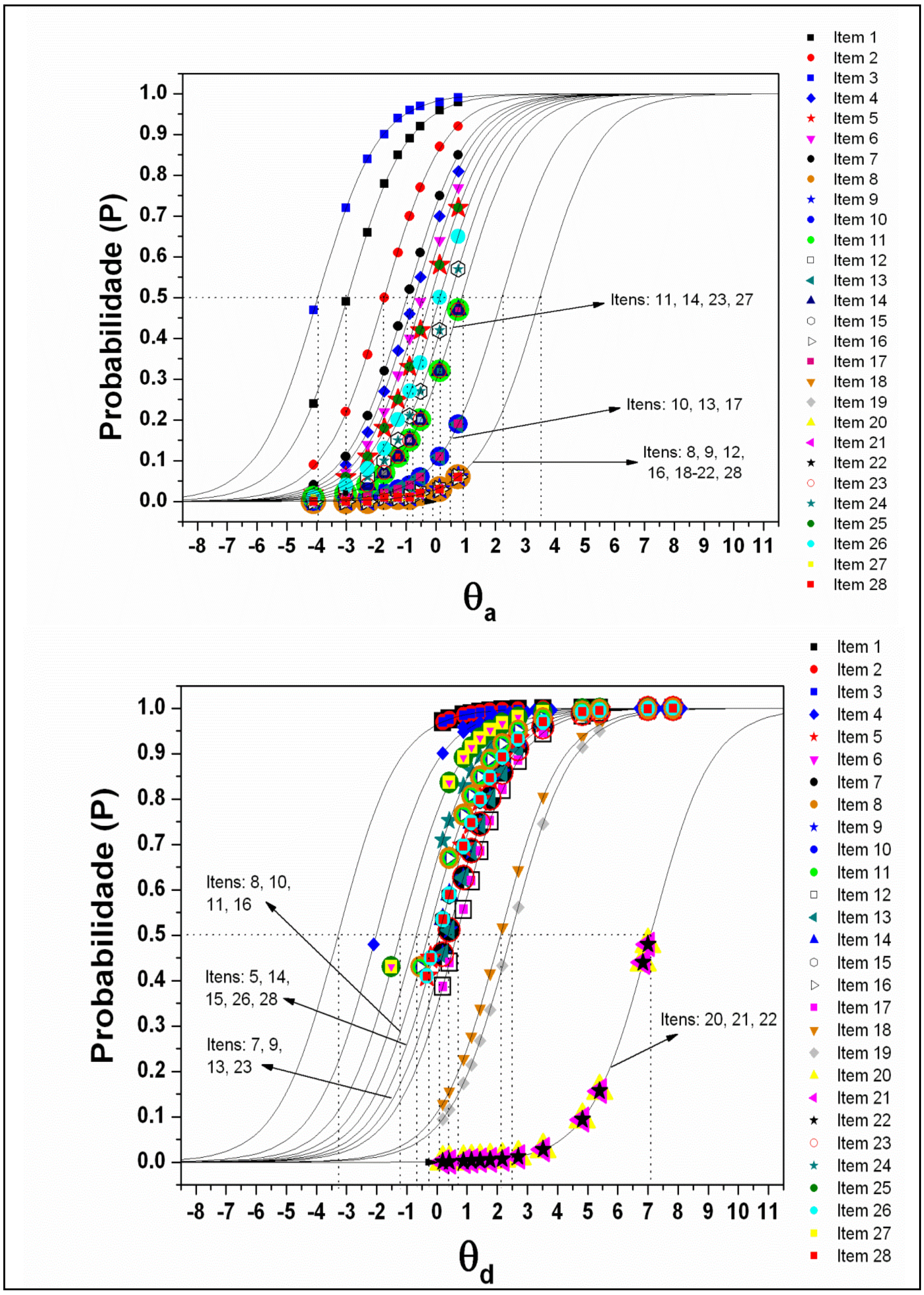
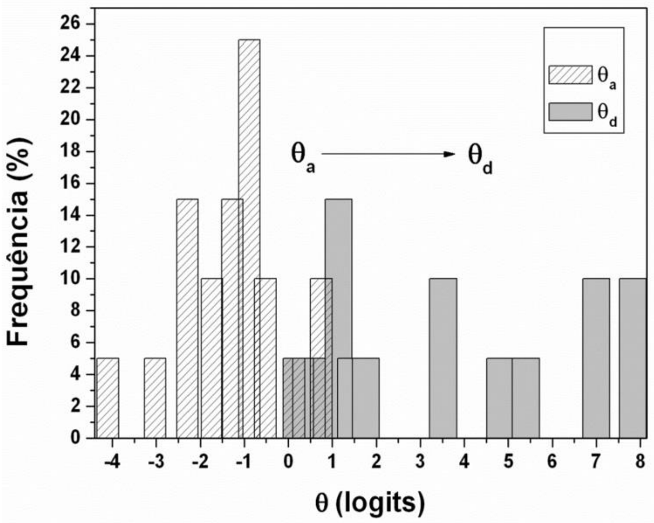


Figura 6. Curvas Características dos Itens antes (P x θ_a) e depois (P x θ_d) do minicurso.

No Q2, os Itens 1, 2 e 3 se apresentam com o mesmo nível de dificuldade e com valor menor (D = -3,29) que todos os outros itens: todos os vinte alunos esboçaram todas as cônicas corretamente o que mostra que não há mais hierarquia quanto à proficiência dos alunos nesse tema (com destaque para a evolução no esboço das hipérboles, antes com 75% de acertos).

3.2 Habilidades dos Indivíduos

Comparando os histogramas de frequência dos valores de habilidade amostrais (estimados via modelo de Rasch) antes (θ_a) e depois (θ_d) do minicurso (**Fig. 7**), observa-se que no primeiro caso a distribuição de habilidades se concentrava em uma região de valores negativos na escala *logits*.



Estatística descritiva	θ_a	θ_d
Média amostral	-1,25	3,24
Desvio padrão da média	0,35	0,24
1° quartil Q_1	-2,15	1,14
Mediana	-1,07	2,43
3° quartil Q_3	-0,61	5,25
Mínimo	-4,10	0,19
Máximo	0,75	7,83

Figura 7. Histogramas de frequências (em %) dos valores de θ dos ID's obtidos experimentalmente antes (θ_a) e depois (θ_d) do minicurso. À direita, as estatísticas descritivas de θ_a e θ_d.

Após a intervenção, houve um deslocamento para maiores valores na escala, em uma primeira indicação de que os ID's se tornaram mais preparados para discutir o tema. Em adição, outras estatísticas descritivas de θ_a e θ_d foram comparadas (**Fig. 7**) para reforçar o indício de que a média de valores de θ evoluiu expressivamente. Como exemplo, pode-se citar o ID1, que obteve o maior desenvolvimento de habilidade entre os alunos, com uma evolução de 11,93 logits (de -4,1 para 7,83).

Para se ter uma análise mais ampla da situação, estimou-se os resultados de habilidade para a condição dos questionários serem aplicados a um número bem maior de ID's de mesma característica (alunos do 3° ano do ensino médio da escola de referência). A média populacional de θ_a foi estimada no intervalo de (-1,81; -0,69) enquanto a média populacional de θ_d foi estimada em (2,05; 4,42). O teste de hipóteses para a diferença entre as médias de habilidades retornou um p-valor=0 (p-valor < α= 0,05), indicando que as médias de habilidades dos ID's se mostraram significativamente diferentes e que realmente houve uma evolução nesse quesito.

Em outras palavras, se um maior número de alunos com a mesma característica amostral respondesse ao Q1, teríamos também indivíduos com níveis muito baixos de habilidade com o tema em questão. Com a aplicação do minicurso, existiria a grande possibilidade destes ID's se tornarem mais habilidosos com relação ao tema.

3.3 Gráficos *P versus* ($\theta - D$)

Embora as CCI mostrem que as dificuldades dos itens se tornaram mais niveladas, os gráficos relacionados não retornam informações da quantidade de ID's contidos em cada ponto experimental. Em adição, as estatísticas que mostraram a evolução nas habilidades por si só não especificam quantitativamente o quanto um θ_j foi maior que um D_i na escala *logits* ou se habilidades não foram suficientes para que os ID's conseguissem responder a um dado item.

O nível de evolução na proficiência dos alunos em cada tópico do conteúdo trabalhado pode ser obtido a partir de uma análise do balanceamento entre D_i e θ_j, do Q1 para o Q2, a partir dos gráficos experimentais *P versus* ($\theta - D$) e Porcentagem de ID's *versus* P. Como exemplo, pode-se citar os Itens de 11 a 13, que trataram das construções da parábola, da elipse e da hipérbole com régua e compasso, a partir das propriedades focais (**Fig. 8**).

Nos três casos, antes da intervenção, nenhum dos alunos conseguiu êxito ($P<0,5$) na construção das curvas. A probabilidade de sucesso tendeu a zero para a maioria dos ID's nos itens 12 (elipse) e 13 (hipérbole). No Item 11 alguns dos ID's ainda se deslocaram para regiões com probabilidades de sucesso entre 0,0 e 0,5, mas ainda sem um θ suficiente para superar a dificuldade do item. Como discutido anteriormente, esse resultado era de se esperar visto que o planejamento de conteúdo apresentado pelo professor não contemplava esse tópico. Trabalhando esse tópico no minicurso, as probabilidades de sucesso dos alunos cresceram abruptamente, com $P \rightarrow 1$ para a maioria dos ID's. Nessa segunda fase da pesquisa, 100%, 90% e 95% dos alunos respondeu corretamente os Item 11, 12 e 13 respectivamente.

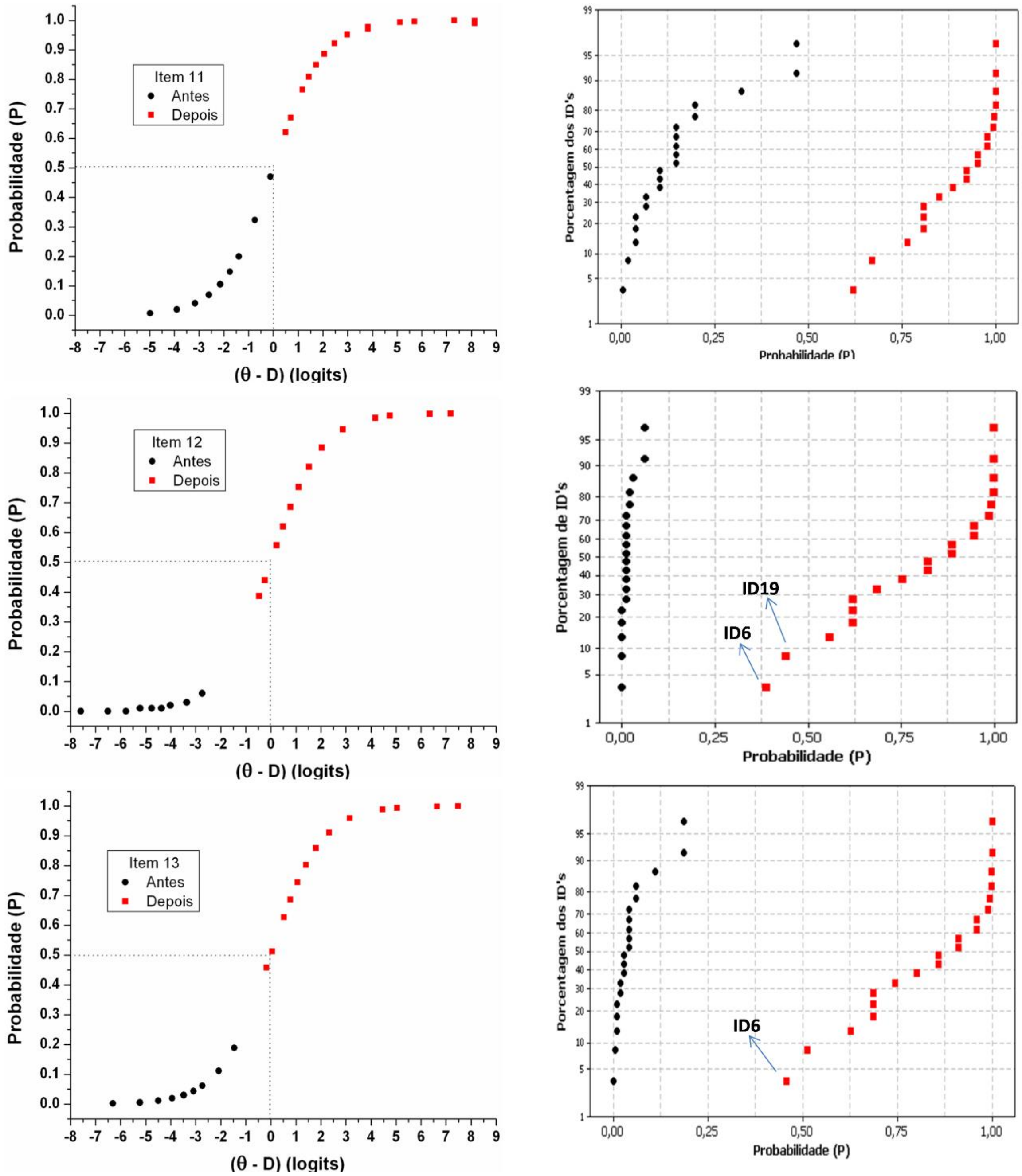


Figura 8. Gráficos P *versus* (θ – D) para os itens 11, 12 e 13. Cada ponto experimental representa um conjunto de indivíduos com mesma habilidade. Já no gráfico Porcentagem de ID's *versus* P, cada ponto representa um único indivíduo.

Essa grande evolução na proficiência dos alunos pode ser atribuída à combinação do trabalho alternativo com materiais concretos, a partir das sinucas cônicas, e da construção geométrica com régua e compasso a partir das propriedades focais. É importante destacar também que os erros se concentraram em apenas dois indivíduos: no ID6 (com insucesso nos Itens 12 e 13) e no ID 19 (insucesso no Item 13). E, mesmo com insucesso, estes IDs obtiveram probabilidades de sucesso próximas a 0,5, ou seja, próximas à probabilidade mínima de êxito (como pode ser verificado na **Fig. 8**).

Embora seja evidente a evolução na proficiência dos alunos, alguns itens ainda se mostraram com dificuldade muito alta, como é o caso dos Itens de 20 a 22 (Fig. 9).

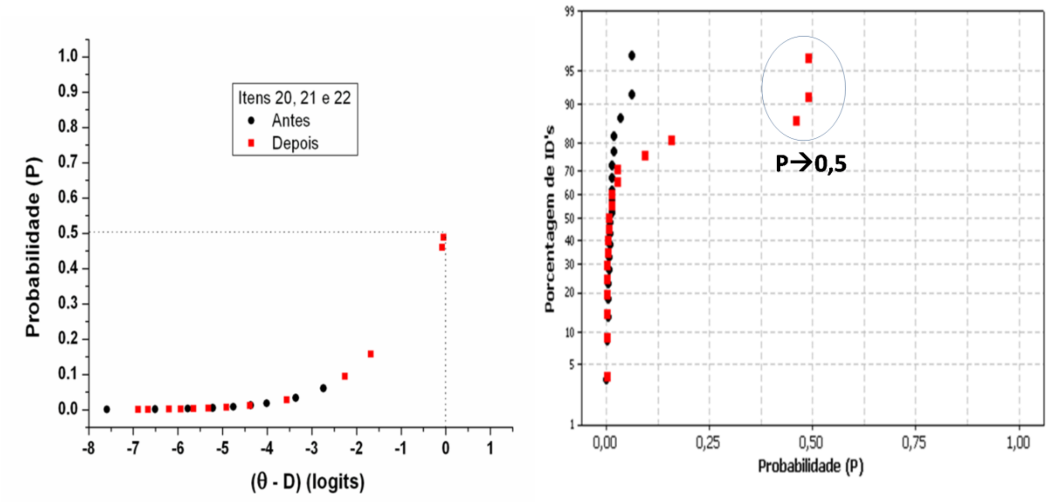


Figura 9. Gráficos P *versus* (θ – D) e Porcentagem de ID's *versus* P, para os Itens 20, 21 e 22, relacionados à determinação da equação reduzida de uma cônica a partir das propriedades focais. Em destaque, ID's com probabilidade de sucesso tendendo a 0,5.

Mesmo após a intervenção trabalhando as propriedades focais, todos os alunos continuaram sem conseguir representar as cônicas analiticamente através de suas equações reduzidas dadas as informações focais, o que fez com que o nível de dificuldade desses itens aumentasse significativamente em relação aos níveis desses mesmos itens obtidos no Q1 (de 3,49 para 7,08 *logits*) e em relação aos demais itens do Q2. Nesse sentido, pode ser inferido que a intervenção proposta não foi suficiente para que os alunos assimilassem esse tópico do conteúdo.

Uma evolução significativa também pode ser notada nas respostas aos Itens 18 e 19. No Q1, foi obtido 100% de insucesso em ambos os itens, enquanto no Q2, 60% e 55% dos alunos responderam os quesitos com êxito, nessa sequência. Dos que não responderam, a maioria se localizou em regiões de probabilidade de sucesso entre 0,25 e 0,5.

Os melhores resultados de proficiência, obtidos pelos ID's nessa segunda análise, a partir da introdução das sinucas cônicas e da construção geométrica com régua e compasso, estão de acordo com resultados publicados recentemente. Kuloglu[37] e Chen[38] verificaram que métodos alternativos de ensino dos parâmetros e das propriedades das cônicas a partir de materiais concretos e de técnicas de construção geométrica facilitaram o aprendizado dos alunos.

A **Fig. 10** mostra o *score* total de probabilidade dos ID's (soma das probabilidades de sucesso em cada item, obtidas por um ID) dado como função de θ. Essa medida pode ser interpretada como a nota obtida pelos indivíduos da amostra em resposta aos vinte e oito itens do questionário, em uma escala normalizada de valores de 0 (zero) a 10 (dez). Os valores próximos aos pontos experimentais indicam o número de indivíduos que obtiveram uma dada nota (ou soma de probabilidades) [39].

No Q1, 50% dos ID's obtiveram nota menor que 2,00 e a maior nota foi estimada em 4,14. Já no Q2, a menor nota foi estimada em 5,33 e 50% dos ID's obtiveram nota maior que 8,05. A nota média obtida pelo grupo de alunos avaliado foi centrada em 2,02 ± 1,01 antes do minicurso e em 7,90 ± 1,31 após a intervenção, confirmando que houve uma expressiva evolução na proficiência dos alunos para lidar com cônicas.

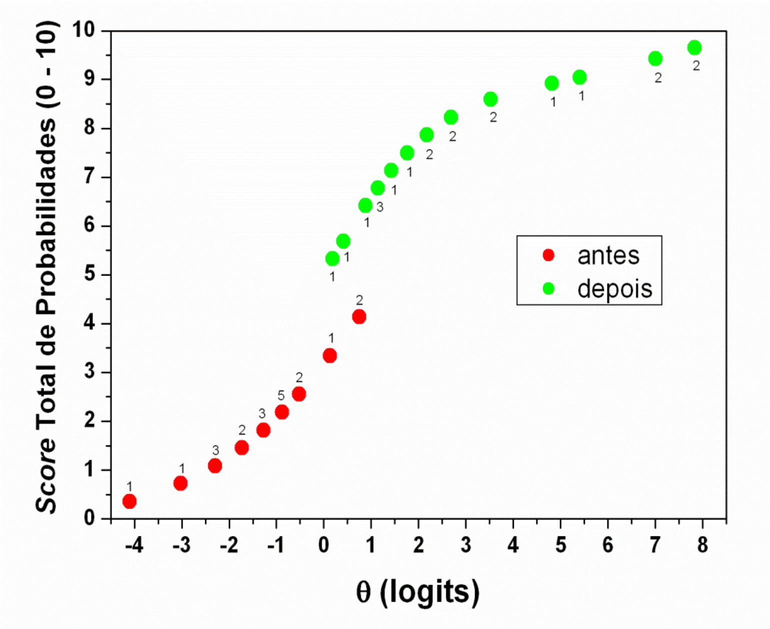


Figura 10. *Score* total de probabilidades normalizado dos ID's com relação às respostas dadas aos itens de 1 a 28, antes e depois da aplicação do minicurso (Q1 e Q2, respectivamente). Os *scores* foram normalizados em uma escala de 0 a 10.

Para exemplificar a aplicabilidade do modelo de Rasch no diagnóstico do insucesso no aprendizado e na escolha de quais ações devem ser tomadas para reverter a situação, tomou-se como exemplo prático o caso dos Itens de 20 a 22. Como discutido anteriormente, nenhum dos alunos obteve êxito nesses itens mesmo após o minicurso. Por outro lado, três desses ID's obtiveram probabilidades de sucesso próximas a 0,5 (Fig. 9), indicando que estes estão na eminência de obter uma habilidade limiar para dar uma resposta positiva a esses itens. Dessa forma, planejou-se uma segunda intervenção, particular para esses três alunos e três questões, utilizando-se os mesmos materiais didáticos usados na primeira intervenção, no laboratório de matemática. A **Fig. 11** mostra a resposta do ID6 ao item 21 após essa segunda intervenção didática.

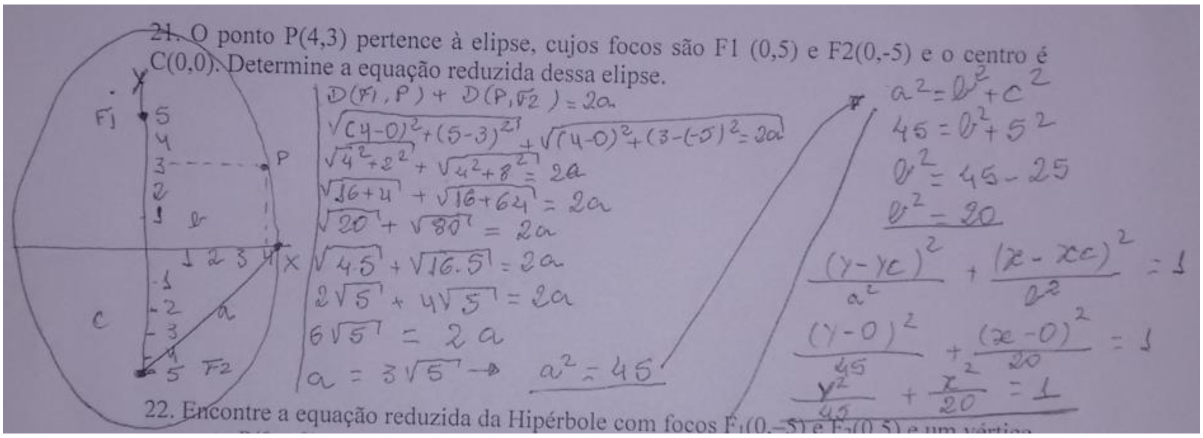


Figura 11. Resposta do ID6 ao Item 21 após a segunda intervenção didática.

Diferente das ações do minicurso, foi possível discutir as respostas anteriores dos alunos a esses itens no Q1 e no Q2, detectar os erros e trabalhar de forma mais direcionada. Nessa terceira fase da pesquisa, todos os três ID's obtiveram sucesso nesses itens.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir desse estudo de caso, foi possível verificar que os alunos não assimilaram o conteúdo de cônicas de forma satisfatória a partir do ensino habitual na escola pesquisada. O insucesso dos alunos nessa primeira análise foi revertido na maioria dos tópicos em estudo a partir da intervenção didática proposta.

Observou-se uma grande evolução nas habilidades dos ID's, com consequente aumento das probabilidades de sucesso desses indivíduos nas respostas aos itens. Em adição, detectou-se uma maior facilidade dos alunos em assimilar conhecimentos geométricos do que analíticos sobre o tema.

Alguns itens continuaram com um nível de dificuldade muito alto, mesmo após a intervenção. Em uma segunda intervenção mais direcionada às dificuldades detectadas, essa situação foi revertida com sucesso para uma amostra de alunos escolhida a partir da análise de

Rasch.

É importante destacar que os resultados insatisfatórios obtidos no estudo das curvas cônicas no Q1, têm grande possibilidade de se repetirem em outros conteúdos, visto que a matemática se mostra como um dos piores desempenhos dos alunos no ensino básico brasileiro atualmente. Dada a eficácia da intervenção realizada se tem a possibilidade eminente de se propor intervenções semelhantes a outros conteúdos e (ou) ampliar a pesquisa a outros alunos, séries e escolas.

Diante do exposto, esse estudo de caso foi importante para mostrar que pesquisas e intervenções relativas à melhoria do ensino-aprendizagem de matemática, em especial do conteúdo de cônicas, são atuais, viáveis e extremamente necessários, mesmo em ambientes educacionais considerados de referência, na busca por melhores resultados na educação brasileira.

REFERÊNCIAS

1. CALLINGHAM, R.; BOND, T. **Research in mathematics education and Rasch measurement.** Mathematic Education Research Journal, n.18, p. 1–10, 2006.
2. HAINES, C.; CROUCH, R. **Recognizing constructs with in mathematical modelling.** Teaching Mathematicsand its Applications, v.20, n.3, p. 129-138, 2001.
3. EDWARDS, A.; ALCOCK, L. **Using Rasch analysis to identify uncharacteristic responses to undergraduate assessments.** Teaching Mathematics and Its Applications, v.29, p. 165-175, 2010.
4. RYAN, J.; WILLIAMS, J. **Maths maps for diagnostic assessment with pre-service teachers: Stories of mathematical knowledge.** Mathematics Education Research, v.9, p. 95–109, 2007.
5. VAN STIPHOUT, I.; DRIJVERS, P.; GRAVEMEIJER, K. **The Development of Students' Algebraic Proficiency.** International Electronic Journal of Mathematics Education, v.8, n. 2-3, 2014.
6. EHRENBERG, R. G.; BREWER, D. J.; GAMORAN, A.; WILLMS, J. D. **Class size and student achievement**. Psychological science in the public interest. New York, v. 3, n. 1, p. 1, may. 2001.
7. BOYD-ZAHARIUS, J. **Project STAR: The storyofthe Tennessee class-size study**. American Educator. Washington, v. 23, n. 2, pp. 30-36, 1999.
8. DAVID, Z. **Class size and academic results, with a focus on children from culturally, linguistically and economically disenfranchised communities**. Evidence Base,Melburn, n. 1, p. 1-23, 2014.
9. FINN, J. D.; ACHILLES, C. M. **Tennessee's class size study: Findings, implications, misconceptions**. Educational Evaluations and PolicyAnalysis. New York, v. 21, n. 2, pp. 97-109, 1999.
10. KRUEGER, A. **Economic considerations and class size**. Economic Journal Washington, vol. 113, pp.34-63, 2003.
11. LEVIN, H. C.; BELFIELD, P.; MUENNIG; ROUSE; C. **The costand benefits of na excellent education for all of America'schildren**. New York: Columbia University Teachers College, 2007.
12. FINN, J. D.; GERBER, S. B.; BOYD-ZAHARIUS, J. **Small classes in theearly grades, academic achievement, and graduating from high school**. Journal of Educational Psychology, New York, vol. 97, n. 2, pp. 215-223, 2005.
13. SMITH, P.; MOLNAR; ZAHORIK, A. **Class-size reduction: A fresh look atthe data**. Educational Leadership September, Washington, pp. 72-74, 2003.
14. GreatSchools Staff. **How important is class size?** Disponível em: <http://www.greatschools.org/gk/articles/class-size/>. Acesso em: 30 abril 2016.
15. SHIN, Y. **Do Black Children Benefit More From Small Classes? Multivariate Instrumental Variable Estimators With Ignorable Missing Data**. Journal of Educational and Behavioral Statistics, Washington, vol. 37, n. 4, pp. 543-574, 2012.
16. BARBOZA, P. L.; REGO, R. M.; BARBOSA, J. C. **Discurso do professor de Matemática e suas implicações na compreensão dos alunos**. In: Bolema. Rio Claro (SP), vol. 27, nº 45, Abril de 2013.
17. BRASIL. **PL 4.731/12**. Disponível em: <http://www.camara.gov.br/proposicoesWeb/fichadetramitacao?idProposicao=560047>. Acesso em: 30 maio 2016.
18. CAMARGO, J.; PORTO JUNIOR, S. S. **O efeito do tamanho da turma sobre o desempenho escolar: uma avaliação do impacto da "enturmação" no Ensino Fundamental**

no Rio Grande do Sul. Rio Grande do Sul, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRS). Faculdade de Ciências Econômicas, Tese de Conclusão de Curso, 2014.
19. BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação: Lei nº 9.394/96** – 20 de dez. 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília, 1996.
20. **Conic-sections-introduction-circle. TES Teaching**. Disponível em: https://www.tes.com/lessons/k9r36TQgtn4C7w/conic-sections-introduction-circle. Acesso em 28 jun 2016.
21. BOYER, C. B. **História da Matemática**, Edgar BluncherLtda, São Paulo, 1996.
22. VIÉTE, F. **L'Algèbre nouvelle de MrViète. Tradução de A. Vasset, 1630**. Disponível em <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k108864f>. Acesso em 20 de novembro 2015.
23. DE LA HIRE, P. **Tradução de “Nouveaux élémentsdessectionsconiques, leslieuxgéométriques, laconstruction ou effectuationdesequations“ para o Inglês – ROBINSON, Brian –** ***New elements of conic sections together with a method for their descriptionon a plane*** – Londres: 1723.
24. QUARANTA NETO, F. **Apresentação da Dissertação sobre a obra “Novos Elementos das Seções Cônicas” (Philippe La Hire – 1679) e sua relevância para o Ensino de Matemática.** In: Anais do IXX Seminário Nacional de História da Matemática. Sociedade Brasileira de Matemátoca, sd. Artigo científico, 2011.
25. BAKER, F. B.; KIM, S. H. **Item Response Theory: Parameter Estimation Techniques**. 2ed. New York: Marcel Dekker, 2004.
26. KLEIN, R. **Utilização da Teoria da Resposta ao Item no Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica – Saeb**. Meta-Avaliação, Rio de Janeiro, v.1, n.2, p. 125-140, 2009.
27. ANDRADE, D. F.; KARINO, C. A. **Teoria de Resposta ao Item**. Nota Técnica do Ministério da Educação. 2012. Disponível em <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/nota_tecnica/2011/nota_tecnica_tri_enem_18012012.pdf> Acesso em 20 de fevereiro de 2016.
28. SILVA FILHO, M. P. **Análise da relação entre formação inicial e proficiência de professores de matemática em equações literais de 1º grau:** um estudo de caso utilizando o modelo de Rasch Dicotômico. Universidade Federal do Vale do São Francisco – UNIVASF. Dissertação de mestrado, P. 32-39, 2014.
29. RASCH, G. **Probabilistic Models for Some Intelligence and Attainment Tests (1960) Expanded Edition (1980) with Foreword and Afterwordby B.D. Wright**. The Universityof Chicago Press, Chicago.Copenhagen, DanishInstitute for EducationalResearch, 1980.
30. RASCH, G. **On general Laws and the meaning of measurement in psychology**, Berkeley, FourthSymposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California, Berkeley, California, Proceedings, vol. 4, pp.321-334, 1961.
31. GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2010.
32. MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de Metodologia Científica.** 5. ed. São Paulo, Atlas, 2003.
33. MAYER, J. P. **jMetrik** 3.0. Disponível em Acesso em: 13 de agosto de 2014
34. GOSSET, W. S. **Biometrika**, vol. 6, n. 1, 1908.
35. FISHER, R. A. **Metron**. Vol, 5, n. 90, 1925.
36. FREITAG, B.; MOTA, V. R.; COSTA, W. F. **O livro didático em questão**. 3. ed. São Paulo: Cortez, 1997.
37. KULOGLU, S. **I’m discovering conics and designing buildings with conics**. Journal for the education of the young scientist and giftedness. Vol. 1 Issue 2, p. 40-52, 2013.
38. CHEN, W. **Applying problem-based learning model and creative design to conic-sections teaching**. International Journal of education and information Technologies. Issue 3. Volume 7, p. 73-80, 2013.
39. AZIZ, A. A. **Insights into Engineering Education Learning Outcome’s Assessment with**

Rasch Model. Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology, 6(19), 3520-3526, 2013.

APÊNDICE A - PLANEJAMENTO DO CONTEÚDO DE CÔNICAS COM APLICAÇÃO DA METODOLOGIA ALTERNATIVA

1. Identificação

Escola: Escola de Referência em Ensino Médio.

Curso: Ensino Médio. Disciplina: Matemática.

Conteúdo: Cônicas (elipse, hipérbole e parábola).

Série: 3º ano. Ano: 2016.

2. Objetivo geral

Utilizar o conhecimento das cônicas para realização da leitura acerca das aplicações na realidade e interpretação de situações que as envolve.

3. Objetivos específicos

- Definir elipse, hipérbole e parábola a partir de uma propriedade comum a todos os seus pontos.
- Identificar e calcular a equação reduzida da elipse, hipérbole e parábola.
- Esboçar o gráfico da elipse, hipérbole e parábola.
- Conhecer as propriedades focais da elipse, hipérbole e parábola.
- Resolver problemas que envolvam elipse, hipérbole e parábola.

4. Conteúdo programático

Introdução às formas geométricas cônicas; Elipse, hipérbola e parábola: Definições, equações reduzidas, gráficos, propriedades focais e resolução de problemas relacionados.

5. Metodologia

Descrita nas seções 2.2 e 2.3.

6. Avaliação

Descrita nas seções 2.3, 2.4 e 2.5.

7. Bibliografia

- DANTE, L. R. **Matemática - Contexto e Aplicações**, Vol. 3, São Paulo: Ática, 2011.

- KULOGLU, S. **I’m discovering conics and designing buildings with conics**. Journal for the education of the young scientist and giftedness. Vol. 1 Issue 2, p. 40-52, 2013.

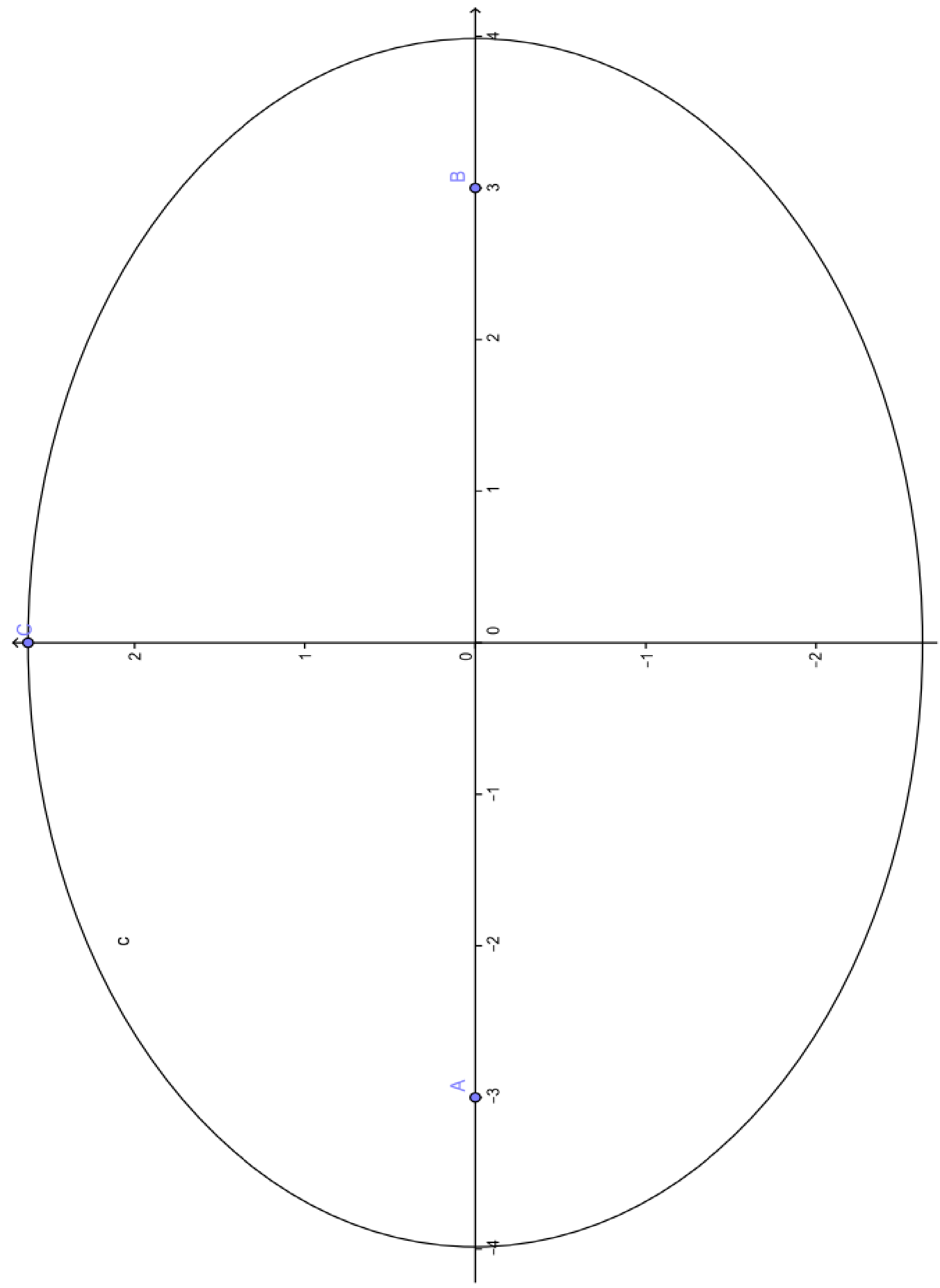
- CHEN, W. **Applying problem-based learning model and creative design to conic-sections teaching**. International Journal of education and information Technologies. Issue 3. Volume 7, p. 73-80, 2013.

- ANDRADE, D. F.; KARINO, C. A. **Teoria de Resposta ao Item**. Nota Técnica do Ministério da Educação. 2012. Disponível em <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/nota_tecnica/2011/nota_tecnica_tri_enem_18012012.pdf> Acesso em 20 de fevereiro de 2016.

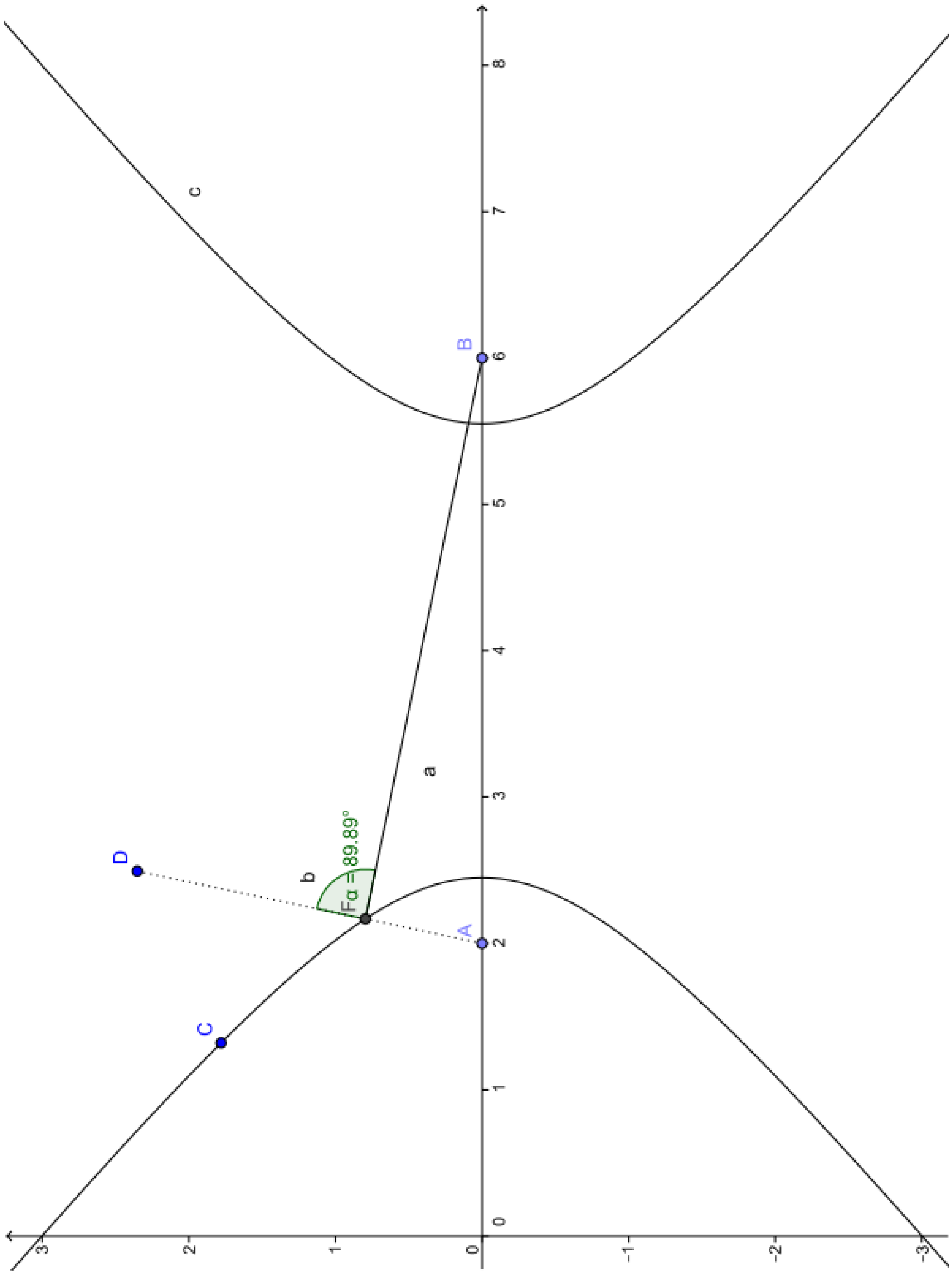
- SILVA FILHO, M. P. **Análise da relação entre formação inicial e proficiência de professores de matemática em equações literais de 1º grau:** um estudo de caso utilizando o modelo de Rasch Dicotômico. Universidade Federal do Vale do São Francisco – UNIVASF, Dissertação de mestrado, P. 32-39, 2014.

- CAMARGO, J.; PORTO JUNIOR, S. S. **O efeito do tamanho da turma sobre o desempenho escolar: uma avaliação do impacto da "enturmação" no Ensino Fundamental no Rio Grande do Sul**. Rio Grande do Sul, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRS). Faculdade de Ciências Econômicas, Tese de Conclusão de Curso, 2014.

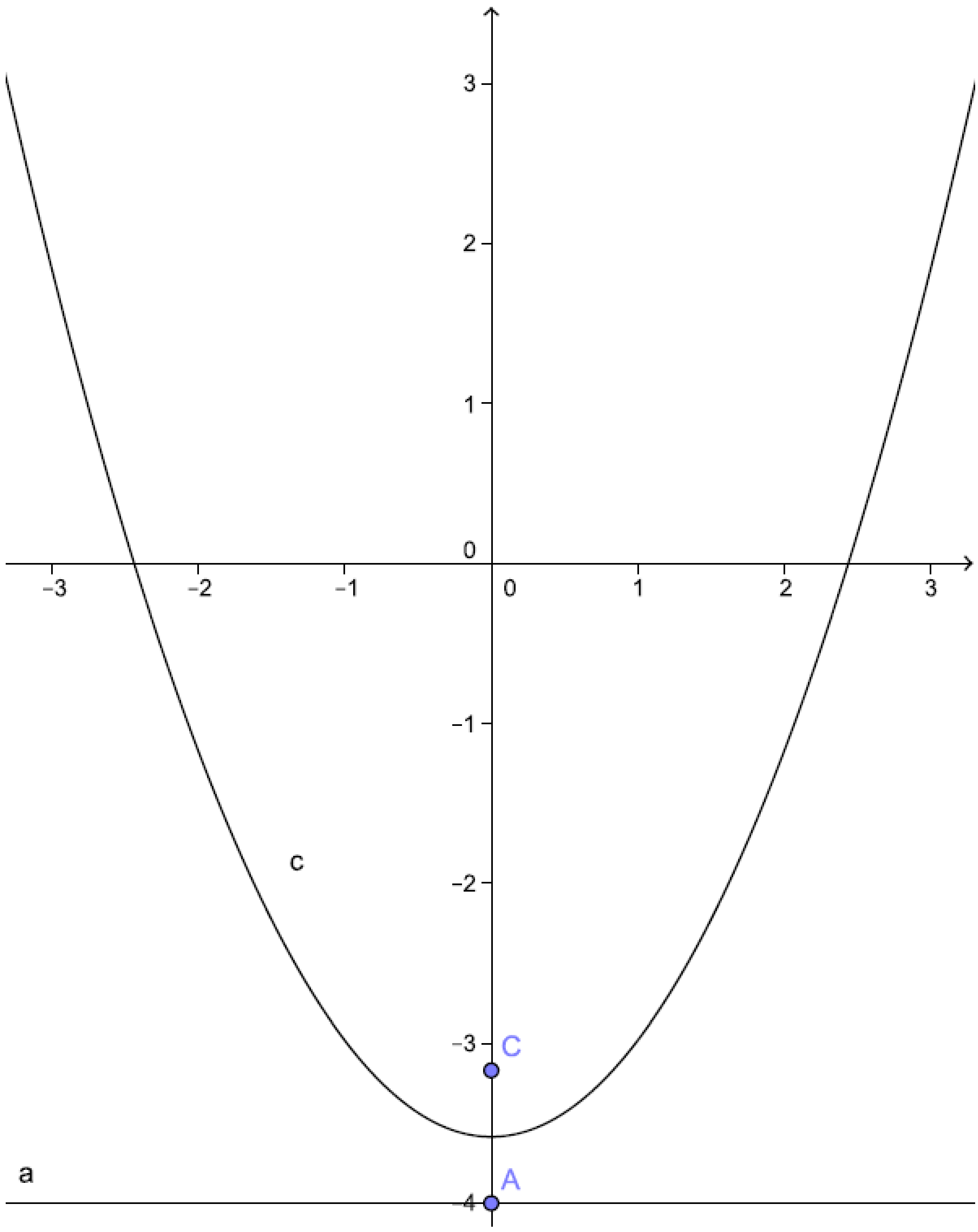
APÊNDICE B – MOLDE BASE PARA CONFECÇÃO DA SINUCA ELÍPTICA



APÊNDICE C – MOLDE BASE PARA CONFECÇÃO DA SINUCA HIPERBÓLICA



APÊNDICE D – MOLDE BASE PARA CONFECÇÃO DA SINUCA PARABÓLICA



ANEXO A – PLANEJAMENTO HABITUAL DO CONTEÚDO DE CÔNICAS NA ESCOLA CAMPO DE PESQUISA

1. Identificação

Escola: Escola de Referência em Ensino Médio.

Curso: Ensino Médio. Disciplina: Matemática.

Conteúdo: Cônicas (elipse, hipérbole e parábola).

Série: 3º ano. Ano: 2016.

2. Objetivo geral

Utilizar o conhecimento das cônicas para realização da leitura acerca das aplicações na realidade e interpretação de situações que as envolve.

3. Objetivos específicos

- Definir elipse, hipérbole e parábola a partir de uma propriedade comum a todos os seus pontos;
- Identificar e calcular a equação reduzida da elipse, hipérbole e parábola;
- Esboçar o gráfico da elipse, hipérbole e parábola;
- Conhecer as propriedades focais da elipse, hipérbole e parábola;
- Resolver problemas que envolvam elipse, hipérbole e parábola.

4. Conteúdo programático

Introdução às formas geométricas cônicas; Elipse, hipérbole e parábola: Definições, equações reduzidas, gráficos, propriedades focais e resolução de problemas relacionados.

5. Metodologia

A aula será ministrada de forma expositiva, com auxílio de pincel, quadro e livro didático, explanando conceitos e resolvendo exercícios do livro, como forma de assimilação do conteúdo.

6. Avaliação

Será aplicado 01 (um) instrumento avaliativo composto de 10 (dez) questões feito a partir dos exercícios desenvolvidos em sala.

7. Bibliografia

DANTE, L. R. **Matemática - Contexto e Aplicações**, Vol. 3, São Paulo: Ática, 2011.