UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO – UNIVASF

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

WAGNER SANTIAGO DE SOUZA

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM TRIÂNGULOS QUAISQUER COM O AUXÍLIO DE TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

Juazeiro – BA

2016

WAGNER SANTIAGO DE SOUZA

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM TRIÂNGULOS QUAISQUER COM O AUXÍLIO DE TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

Trabalho apresentado a Universidade Federal do Vale do São Francisco – UNIVASF, Campus Juazeiro, como requisito da obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Lino Marcos da Silva

Juazeiro – BA

2016

Souza, Wagner Santiago de.

S726t Trigonometria em triângulos quaisquer com o auxílio de triângulos retângulos / Wagner Santiago de Souza. – Juazeiro, 2016

98f; 29 cm

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro - BA, 2016.

Orientador: Prof. Dr. Lino Marcos da Silva.

1. Trigonometria*. 2. Triângulos. 3.* Matemática – Estudo e ensino. I. Título. II. Silva, Lina Marcos. III. Universidade Federal do Vale do São Francisco.

CDD 516.24

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Biblioteca SIBI/UNIVASF
Bibliotecário: Renato Marques Alves

UNIVASF
UNIVERSIDADE FEDERAL DO
VALE DO SÃO FRANCISCO

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT/UNIVASF

PROFMAT

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM TRIÂNGULOS QUAISQUER COM O AUXÍLIO DE TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

Por:

WAGNER SANTIAGO DE SOUZA

Dissertação aprovada em 03 de junho de 2016.

Lino Marcos da Silva

Prof. Dr. Lino Marcos da Silva
Orientador - UNIVASF

Alexandre Ramalho Silva

Prof. Dr. Alexandre Ramalho Silva
Examinador Interno - UNIVASF

Felipe Wergete Cruz

Prof. Dr. Felipe Wergete Cruz
Examinador Externo – UFPE

Juazeiro
2016

Dedico este trabalho aos meus pais, Givaldo Alves de Souza e Maria Lídia Santiago de Souza, por serem meu porto seguro, a razão do meu viver.

AGRADECIMENTOS

Durante esses pouco mais de dois anos de Mestrado, muitos desafios e dificuldades, como essa dissertação, foram encontrados e vencidos. Para conseguir vencer tudo isso, fui privilegiado ao contar com pessoas incríveis e importantíssimas para minha vida. A essas pessoas é preciso agradecer:

Agradeço em primeiro lugar à Deus por toda graça e força que me proporcionou.

Ao meu pai Givaldo, pelo exemplo de homem vitorioso que representa e por todo apoio e confiança depositada em mim.

À minha mãe Maria Lidia, por todo apoio, amor e confiança que sempre me proporciona.

Aos meus irmãos Vitor e Jackeline por tudo que representam para mim e por todo apoio que me deram na realização dessa conquista.

À toda minha família, tios, tias, primos, primas, avós, por todo carinho e força transmitida nesse percurso.

Ao meu Orientador Professor Dr. Lino Marcos da Silva, por todo empenho em me ajudar na conclusão desse trabalho.

A todos os Professores do Curso, por todo o conhecimento transmitido nesse período.

Aos meus colegas de turma, por terem feito parte dessa vitória, em especial a Paulo Saldanha, Roberto Rayala e Wagner Santana, por serem os meus parceiros na viagem para as aulas e na maioria dos trabalhos.

Aos meus colegas de trabalho do Colégio Sacramentinas, da Escola Márcio Seno e do Pré-Vestibular Nota 10, por todo companheirismo.

A todos os meus amigos por toda força e apoio.

Enfim, a todos que contribuíram direta ou indiretamente para realização dessa conquista. Obrigado!

RESUMO

A abordagem apresentada nos livros didáticos de matemática do Ensino Médio para a resolução de problemas envolvendo triângulos quaisquer utiliza a aplicação da lei dos senos e da lei dos cossenos. Esse fato contribui para aumentar as críticas feitas ao ensino da matemática centrado no uso e na memorização de fórmulas. Buscando uma alternativa à essa prática, propomos neste trabalho uma abordagem para o estudo de tais problemas da trigonometria, através de uma abordagem que privilegia a compreensão e a reflexão dos conteúdos. Nessa proposta, consideramos realizar o estudo das relações trigonométricas em triângulos quaisquer usando apenas o teorema de Pitágoras e as razões trigonométricas em triângulos retângulos. Dessa forma, em vez de usar, inicialmente, esses resultados para apresentar a demonstração das leis citadas anteriormente, incentivamos os alunos a utilizá-los na resolução de triângulos quaisquer. Além de detalharmos e situarmos teoricamente a abordagem proposta, apresentamos também os resultados provenientes da pesquisa qualitativa realizada com alunos de duas escolas do ensino médio, com o intuito de verificarmos o desempenho dos mesmos na utilização do método, bem como, as suas impressões sobre a abordagem proposta e sobre o uso de fórmulas no ensino do tema. Os resultados obtidos mostram que parcela significativa dos alunos participantes aprendeu a utilizar o método corretamente, que a maioria deles acredita que o uso excessivo de fórmulas no ensino da Matemática é prejudicial ao seu aprendizado, que acham interessante conhecer mais de um método para resolver problemas e que preferem a abordagem proposta frente à abordagem tradicional.

Palavras chaves: Ensino de Matemática, Trigonometria, Triângulos.

ABSTRACT

The approach presented in high school math textbooks to solve problems involving oblique triangles uses the application of the law of sines and the law of cosines. This contributes to increase the criticism of the mathematic teaching focused on the use and memorization of formula. Seeking an alternative to this practice, in this work we propose an approach to the study of trigonometric problems through a method that emphasizes the comprehension and critical thinking of the content. In this proposal, we considered conducting the study of trigonometric relations on oblique triangles using only the Pythagorean Theorem and trigonometric ratios on right-angled triangles. Thus, instead of using these results to demonstrate the laws previously cited, we encouraged the students to use it in solving oblique triangles. In addition to a detailed description and theoretical framework of the proposed approach, we also presented the results from a qualitative research with students from two high schools in order to evaluate their performance using this method, as well as, their perception of the proposed approach and use of formula on the teaching of this subject. The results obtained showed that a significant number of the participating students learned how to use the method correctly, and the majority of them believe that excessive use of formula in mathematic teaching is prejudicial to their learning process. They considered interesting to know more than one method to solve problems, and preferred the proposed approach instead of the traditional one.

Key words: Mathematic teaching, Trigonometry, Triangles.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

ALA – Ângulo, lado, ângulo

CFTRJ – Centro Federal de Educação Tecnológica do Rio de Janeiro

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

IFSUL – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense

LAL – Lado, ângulo, lado

LLL – Lado, lado, lado

PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

UFPB – Universidade Federal da Paraíba

UFSM – Universidade Federal de Santa Maria

UNIRIO – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

UNIVASF – Universidade Federal do Vale do São Francisco

SAS – Sistema Ari de Sá

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O estudo de matemática no ensino médio é, de certo modo, marcado por críticas feitas pelos alunos a respeito da necessidade de memorização e utilização de algumas fórmulas. Desse modo, surge a necessidade de estabelecer novos métodos que diminuam tal prática e que possa contribuir para o ensino dinâmico da matemática.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do Ensino Médio (PCNEM) sinalizam que ao ensinar matemática, deve-se evitar, sempre que possível, o uso indiscriminado de fórmulas, fazendo prevalecer o raciocínio dos alunos na construção do conhecimento, quando afirma que:

> [...] aprender Matemática no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência e que a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático (BRASIL, 2000, p.41).

Por outro lado, conforme pode ser visto em livros didáticos de Matemática utilizados no Ensino Médio, a resolução de problemas envolvendo as relações trigonométricas em triângulos quaisquer se restringe, em geral, à aplicação da lei dos senos e da lei dos cossenos (RIBEIRO, 2007, SOUZA, 2013, FUGITA, et al, 2015, IEZZI, et al, 2004). Nesse sentido, o ensino desses conceitos pode estar pautado pelo emprego de fórmulas, requerendo dos alunos um esforço maior quanto à memorização das mesmas do que com a reflexão sobre a resolução do problema em si e das implicações decorrentes desse processo. Desse modo, propomos a utilização de uma abordagem mais dinâmica para tal assunto que exige um maior poder de decisão dos alunos e que trabalha com as relações trigonométricas em triângulos retângulos e com o teorema de Pitágoras, conceitos iniciados no ensino fundamental e que comumente aparecem na vida escolar do alunado durante o ensino médio.

Conforme exposto, neste trabalho propomos uma abordagem alternativa para o ensino das relações trigonométricas em triângulos quaisquer, que se utilize das relações trigonométricas em triângulos retângulos e do teorema de Pitágoras. Além disso, apresentamos uma análise do desempenho dos alunos com essa abordagem e qual a opinião deles a respeito da mesma.

Este trabalho é resultante de reflexões sobre o processo de ensino-aprendizagem da matemática, realizadas ao longo das aulas do PROFMAT, da análise de livros didáticos de matemática do Ensino Médio no tocante ao ensino da trigonometria e de uma pesquisa realizada no período de setembro de 2015 a janeiro de 2016 com alunos da 2ª série do Ensino Médio de uma escola filantrópica do município de Andorinha – BA e de uma escola estadual do município de Petrolina – PE sobre a apresentação de uma abordagem alternativa para o ensino das relações trigonométricas em triângulos quaisquer.

Neste trabalho, denotaremos a medida do lado de um triângulo por uma letra minúscula, enquanto seus vértices por letras maiúsculas, seus ângulos por letras minúsculas do alfabeto grego ou por letras maiúsculas com acento circunflexo. O símbolo (~) será utilizado para indicar a semelhança de triângulos. As abreviações sen, cos e tg, denotarão, respectivamente, as relações trigonométricas seno, cosseno e tangente.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: os capítulos dois e três contêm a Fundamentação Teórica, cujas referências abordam conceitos básicos de Trigonometria em triângulos retângulos, tais como, Teorema de Pitágoras e Razões trigonométricas em triângulos retângulos; Trigonometria em triângulos quaisquer, com enfoque na Lei dos senos e na Lei dos cossenos; e uma abordagem que utiliza simultaneamente estas duas leis para encontrar medidas de lados e ângulos de triângulos quaisquer. O quarto capítulo contém a apresentação da abordagem sobre relações trigonométricas em triângulos quaisquer com o auxílio dos triângulos retângulos; o capítulo cinco contém a Metodologia, feita numa abordagem qualitativa através de uma pesquisa participante, tendo duas escolas, uma pública e outra filantrópica como lócus, os alunos da 2ª série do Ensino Médio dessas escolas como os sujeitos e a oficina e o questionário como principais instrumentos de coleta de dados, além da Análise dos Dados obtidos. Nesse capítulo também são descritos os resultados obtidos pelo questionário, com intuito de chegar aos objetivos da pesquisa. No sexto, e último capítulo, apresentamos as Considerações Finais, onde as conclusões da pesquisa são elencadas. Por fim, as Referências Bibliográficas, onde expomos todas as obras e autores utilizados no trabalho e os Apêndices, onde aparecem o questionário aplicado, a sequência didática da oficina e do questionário e uma breve apresentação de alguns elementos da trigonometria.

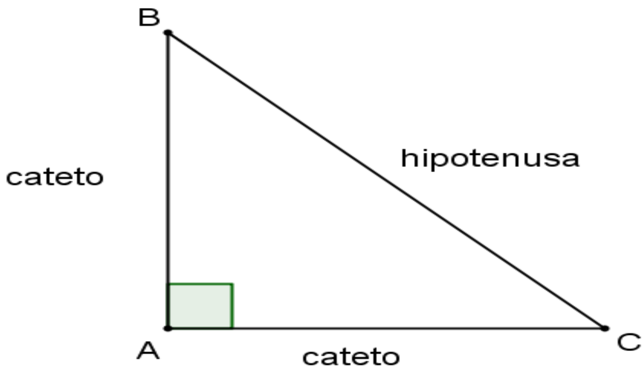
CAPÍTULO 2

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

2.1. INTRODUÇÃO

Um triângulo retângulo é um triângulo que possui um dos seus ângulos internos medindo 90º. Os lados de um triângulo retângulo recebem o nome de hipotenusa e catetos. A hipotenusa é o lado que fica oposto ao ângulo reto; e os catetos são os outros dois lados. Na Figura 1, temos uma ilustração do que acabamos de citar.

Figura 1: Lados de um triângulo retângulo



Os triângulos retângulos possuem diversas aplicações no cotidiano, principalmente em problemas das engenharias e da astronomia, onde é comum calcular alturas e distâncias, conceitos que estão diretamente relacionados a ângulos de 90º e, consequentemente, a esse tipo de triângulo.

2.2. O TEOREMA DE PITÁGORAS

Pitágoras (569 a.c. _ 480 a.c.) foi um matemático e filósofo que nasceu na ilha de Samos na Grécia. Suas ideias em conjunto com as do, também grego, Tales de Mileto, foram responsáveis por introduzir a matemática como ciência e oportunizar que a mesma se desenvolvesse enormemente nos séculos seguintes aos que viveram. Pitágoras esteve no Egito e na Babilônia, onde absorveu os conhecimentos matemáticos desses lugares. Foi o fundador de uma escola, dedicada ao estudo da Matemática e da Filosofia, que ficou conhecida como escola pitagórica. Foi nessa escola onde o teorema de Pitágoras foi descoberto (WAGNER 2006).

Apesar do teorema de Pitágoras levar esse nome por, supostamente, ter sido descoberto na escola pitagórica, existem provas concretas de que outras civilizações já o utilizavam. É o caso dos babilônios, egípcios e chineses (LIMA et al., 2013, SOUZA, 2013). Além disso, mesmo o teorema levando o nome de Pitágoras, não se pode afirmar que foi o mesmo o seu descobridor, pois sabe-se que na escola pitagórica todas as descobertas eram coletivas e na época havia o costume de atribuir todos os méritos ao mestre (WAGNER, 2006).

O teorema de Pitágoras é um resultado muito importante para a matemática, pois possui diversas aplicações, principalmente na geometria e na trigonometria. De acordo com Lima et al. (2013) esse teorema é um dos mais bonitos e importantes da matemática, pois foi a partir dele que o desenvolvimento da matemática começou.

Ao enunciar tal teorema, alguns autores utilizam uma ideia similar a utilizada por Pitágoras que se refere à área dos quadrados formados sobre os lados de um triângulo retângulo, é o caso de Wagner (2006, p.4) e Lima et al (2013, p.73) que utilizam o seguinte enunciado:

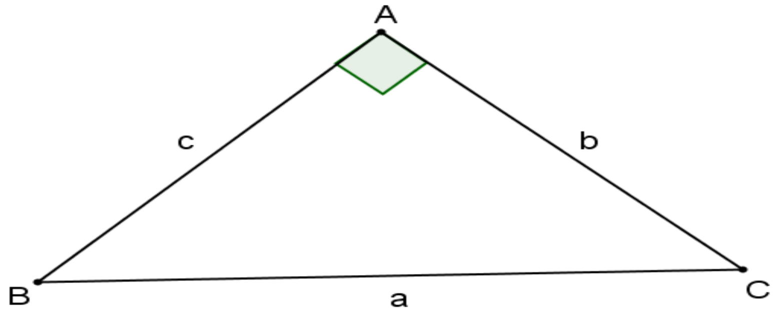
“Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos”.

Por outro lado, diversos autores de livros didáticos de Matemática do ensino médio, apresentam o enunciado apenas com a ideia algébrica do teorema, é o caso de Souza (2013, p. 264) e Ribeiro (2007, p. 208), que sugerem o seguinte enunciado:

“Em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa”.

Teorema de Pitágoras. Dado um triângulo retângulo ABC, com hipotenusa medindo a e catetos medindo b e c, como o da Figura 2, tem-se que $a^2 = b^2 + c^2$.

Figura 2: Triângulo retângulo



O teorema de Pitágoras possui diversas demonstrações. Em 1940, o matemático americano Elisha Scott Loomis publicou 230 delas no seu livro The Pythagorean Proposition, porém ainda existem mais. Não se sabe ao certo qual foi a demonstração utilizada por Pitágoras, mas imagina-se que o mesmo utilizou alguma demonstração envolvendo áreas (LIMA et al, 2013).

Neste trabalho, apresentaremos duas demonstrações: uma envolvendo áreas e a outra que utiliza semelhança de triângulos e a ideia algébrica do teorema. Antes de apresenta-las, enunciaremos a seguir dois resultados importantes da geometria que serão utilizados na construção das mesmas.

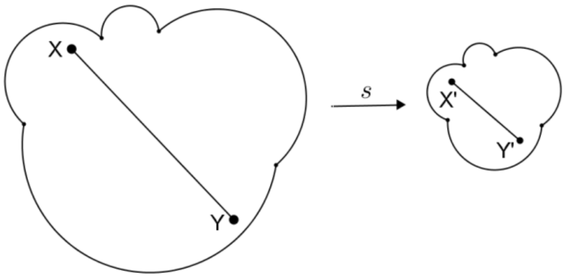
Triângulos Congruentes: dizemos que dois triângulos são congruentes se for possível mover um deles no espaço, sem deformá-lo, até que ele coincida com o outro. Assim se dois triângulos *ABC* e *A'B'C'* forem congruentes, deve existir uma correspondência entre seus vértices, de modo que os ângulos internos em vértices correspondentes sejam iguais, bem como seus lados opostos a vértices correspondentes também sejam iguais. (MUNIZ NETO, 2013).

Figuras Semelhantes: De acordo com Lima (2006), sejam F e F' figuras, do plano ou do espaço, e r um número real positivo. Dizemos que F e F' são semelhantes, com razão de semelhança r, quando existe uma correspondência biunívoca $s: F \to F'$, entre os pontos de F e os pontos de F', com a seguinte propriedade:

Se X, Y são pontos de F e X' = s(X), Y' = S(Y) são seus correspondentes em F', então X'Y' = rXY.

A Figura 3 ilustra essa situação.

Figura 3: Figuras semelhantes

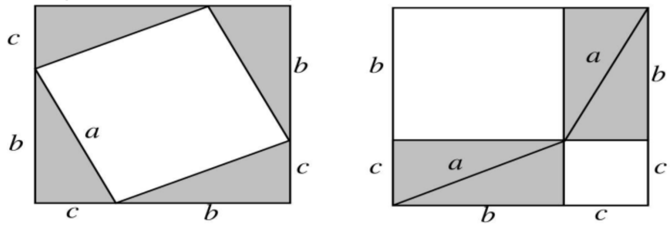


Outro fato importante sobre figuras semelhantes é que a razão entre suas respectivas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança.

A seguir apresentaremos uma primeira demonstração do teorema de Pitágoras, a qual é feita usando o conceito de área.

Demonstração 1. Dado um triângulo retângulo, no qual a medida da hipotenusa é *a* e as medidas dos catetos são *b* e *c*, nosso objetivo é mostrar que a área do quadrado de lado medindo *a* é igual a soma das áreas dos quadrados com lados medindo *b* e *c*, para isso observe a Figura 4.

Figura 4: Demonstração do Teorema de Pitágoras.



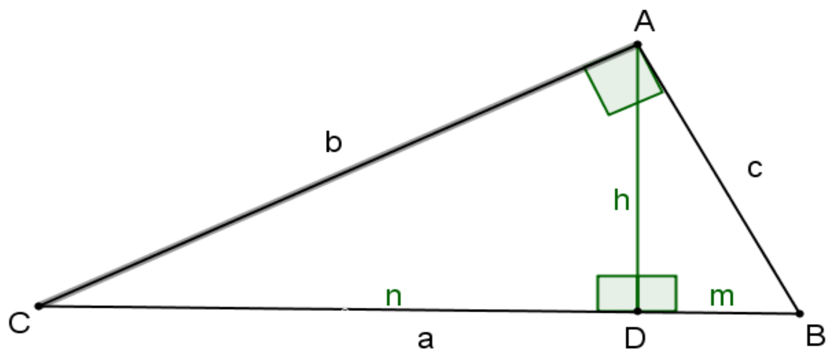
Fonte: Livro Teorema de Pitágoras e áreas (WAGNER, 2006)

Nessa figura ambos os quadrados possuem lados medindo *b* + *c*. Do quadrado da esquerda retira-se quatro triângulos retângulos com hipotenusa medindo *a* e catetos medindo *b* e *c*, respectivamente, restando um quadrado de lado *a*. Do quadrado da direita retira-se quatro triângulos congruentes ao do enunciado, restando assim um quadrado de lado *b* e um quadrado de lado *c*. Desse modo, concluímos que a área do quadrado de lado *a* é igual soma das áreas dos quadrados de lados *b* e *c*. ■

A próxima demonstração é geralmente utilizada para demonstrar o teorema de Pitágoras por autores de livros didáticos do ensino médio, entre eles Ribeiro (2007) e Souza (2013), pois através dela já são determinadas as relações métricas em triângulos retângulos, que não ganharão destaque aqui, por não fazerem parte do objetivo do nosso trabalho.

Demonstração 2. Dado um triângulo retângulo com hipotenusa medindo *a* e catetos medindo *b* e *c*, queremos mostrar que $a^2 = b^2 + c^2$. Para isso observe a Figura 5, onde apresentamos o triângulo retângulo *ABC* no qual foi traçada a altura relativa a hipotenusa *AD* = *h*. O segmento *AD* dividiu a hipotenusa em dois segmentos *CD* = *n* e *DB* = *m*, que são as projeções ortogonais dos catetos *b* e *c*, respectivamente, sobre a hipotenusa.

Figura 5: Demonstração 2



Na Figura 5 os triângulos resultantes após a altura AD ser traçada são todos semelhantes, pois seus ângulos internos são congruentes, ou seja,

$$(ABC) \sim (DAC) \sim (DBA).$$

De *(ABC) ~ (DAC),* temos:

$$\frac{n}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow b^2 = an. \qquad (1)$$

De *(ABC) ~ (DBA),* temos:

$$\frac{m}{c} = \frac{c}{a} \Rightarrow c^2 = am. \qquad (2)$$

Daí, adicionando as identidades (1) e (2) obtemos:

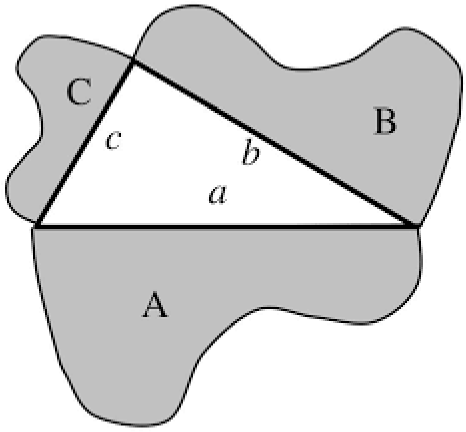
$$b^2 + c^2 = an + am \Rightarrow b^2 + c^2 = a(m + n) \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2, \text{ ou ainda, } a^2 = b^2 + c^2.$$

■

Observação: O teorema desenvolvido na Escola Pitagórica se referia apenas à área de quadrados, porém o mesmo pode ser generalizado para quaisquer figuras semelhantes (não necessariamente polígonos) construídas sobre a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo. A seguir, demonstraremos a validade desta observação:

Demonstração: Sejam *A*, *B* e *C* as áreas das figuras semelhantes construídas sobre a hipotenusa *a* e sobre os catetos *b* e *c* do triângulo retângulo da Figura 6.

Figura 6: Generalização do teorema de Pitágoras



Fonte: Livro Temas e problemas elementares. LIMA, et. al. (2013).

Sabemos que a razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Desse modo, temos:

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow \frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2};$$

e

$$\frac{A}{C} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \Rightarrow \frac{A}{a^2} = \frac{C}{c^2};$$

O que implica em

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2}.$$

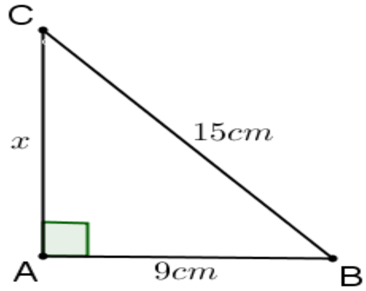
Logo, como $a^2 = b^2 + c^2$, temos pela propriedade das proporções que $A = B + C$ (LIMA, et. al. 2013). ■

Para introduzir a forma na qual o teorema de Pitágoras é utilizado na prática, apresentaremos dois exemplos de aplicação do mesmo.

Exemplo 1. Em um triângulo *ABC*, retângulo em *A*, as medidas dos lados *AB* e *BC* são, respectivamente, *9cm* e *15cm*. Qual é a medida do lado *AC*?

Solução: Observe a Figura 7.

Figura 7: Solução do Exemplo 1

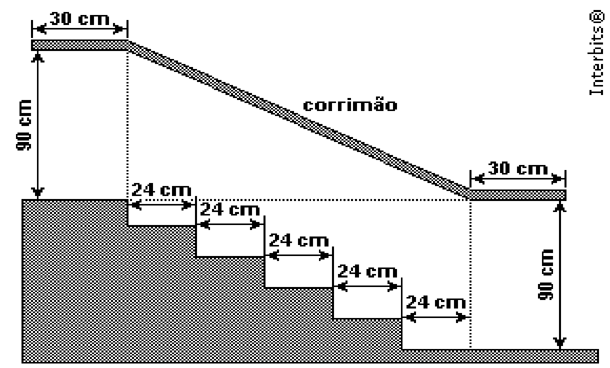


Utilizando o teorema de Pitágoras, temos:

$$15^2 = x^2 + 9^2 \Rightarrow 225 = x^2 + 81 \Rightarrow 225 - 81 = x^2 \Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow x = \pm 12.$$

Como *x* deve ser um número positivo, pois se trata de uma medida de comprimento, temos que *x* = 12. Logo, a medida do segmento *AC* é *12cm*.

Exemplo 2: (ENEM 2006)



Na figura acima, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a

a) 1,8 m.

b) 1,9 m.

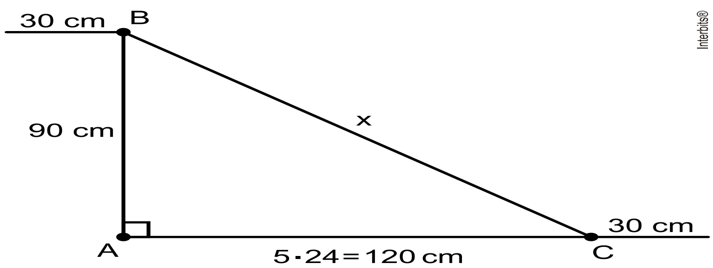
c) 2,0 m.

d) 2,1 m.

e) 2,2 m.

Solução: Observe a Figura 8.

Figura 8: Solução do Exemplo 2.



Fonte: Banco de questões do portal SAS

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *ABC*, temos

$$x^2 = 90^2 + 120^2 \Rightarrow x^2 = 8100 + 14400 \Rightarrow x^2 = 22500 \Rightarrow x = \pm\sqrt{22500},$$

o que implica em

$$x = \pm 150.$$

Logo *x* = 150 cm e, portanto, o comprimento *C* do corrimão é

$$C = 150 + 30 + 30 \Rightarrow C = 210cm \Rightarrow C = 2{,}1m.$$

Logo a alternativa correta é d).

Com os exemplos 1 e 2 finalizamos a seção 2.2. Na próxima seção iremos apresentar as razões trigonométricas em triângulos retângulos e como as mesmas são utilizadas na prática para resolver problemas.

2.3. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS EM TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

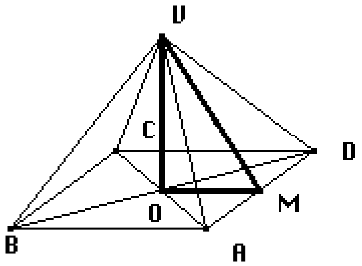
A matemática é notavelmente reconhecida pela sua aplicabilidade em diversas situações do cotidiano e por ter se desenvolvido, em parte, junto as necessidades humanas. De acordo com COSTA (1997) a trigonometria se desenvolveu, desde o mundo antigo, a partir das necessidades práticas da época, principalmente aquelas ligadas à Astronomia, à Agrimensura e à Navegação.

A trigonometria não foi uma obra de uma só nação, pois há evidências de que os egípcios e os babilônios foram responsáveis pelos primeiros indícios de rudimentos da mesma, a partir do uso de razões entre lados de triângulos semelhantes (BOYER, 1974).

Os babilônios que tinham grande interesse pela Astronomia utilizavam esse ramo da matemática tanto por razões religiosas, quanto pelas conexões com o calendário e as épocas de plantio (COSTA, 1997). Já no Egito utilizava-se triângulos retângulos para medir a inclinação de pirâmides, a partir do que hoje conhecemos como cotangente de um ângulo.

> [...] No Egito, isto pode ser observado no Papiro **Ahmes,** conhecido como Papiro **Rhind[3]**, que data de aproximadamente 1650 a.C., e contém 84 problemas, dos quais quatro fazem menção ao **seqt** de um ângulo.
>
> Ahmes não foi claro ao expressar o significado desta palavra mas, pelo contexto, pensa-se que o **seqt** de uma pirâmide regular seja equivalente, hoje, à cotangente do ângulo **OMV**.

Figura 9: Pirâmide



Fonte: Artigo A História da Trigonometria de COSTA (1997).

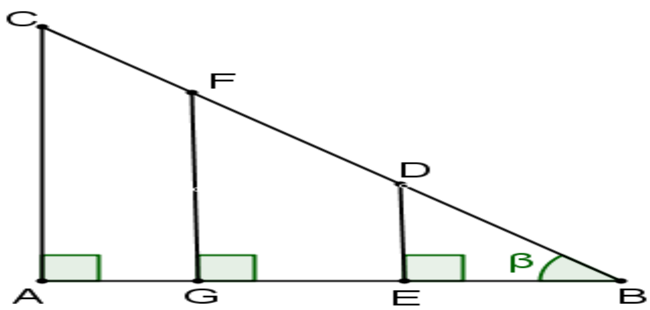
Exemplo: Seja OV = 40 e OM = 80, então o seqt = 80/40, isto é: seqt = 2 (COSTA, 1997, p. 2).

Rudimentos primitivos da trigonometria também foram encontrados na China, em aproximadamente 1110 a.C., onde triângulos retângulos eram frequentemente utilizados para medir distâncias, comprimentos e profundidades. Os chineses deixaram vestígios de que faziam essas medições com o auxílio das relações trigonométricas e das medições de ângulos, porém não se sabe a técnica utilizada nas medições e nem quais unidades eram utilizadas (COSTA, 1997).

Como podemos observar as razões trigonométricas em triângulos retângulos foram desenvolvidas em civilizações antigas para suprir as necessidades de medições de distâncias, alturas e inclinações e é notório que as mesmas necessidades ocupam um lugar significativo até os dias atuais.

Para enunciar as razões trigonométricas em triângulos retângulos, observaremos inicialmente a Figura 10.

Figura 10: Relações trigonométricas



Nessa figura os triângulos *ABC*, GBF e *EBD* são semelhantes e, portanto, vale as seguintes relações:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{FG}{BF} = \frac{DE}{BD} = k; \tag{1}$$

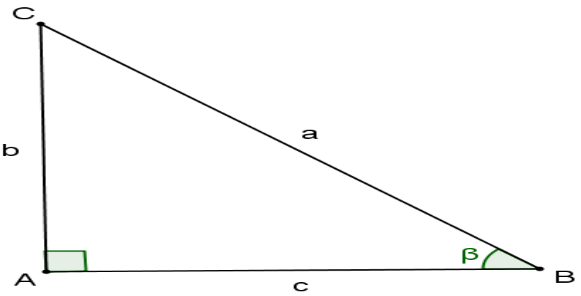
$$\frac{AB}{BC} = \frac{BG}{BF} = \frac{BE}{BD} = k'; \tag{2}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{FG}{BG} = \frac{DE}{BE} = k". \tag{3}$$

Observamos ainda que qualquer outro triângulo retângulo que possua um ângulo agudo β também será semelhante aos apresentados na Figura 10 e, portanto, a razão entre o cateto oposto ao ângulo β e à hipotenusa será *k*; a razão entre o cateto adjacente ao ângulo β e à hipotenusa será *k';* e a razão entre o cateto oposto ao ângulo β e o cateto adjacente a esse ângulo será *k"*. Essa ideia de semelhança dá origem as relações trigonométricas em triângulos retângulos (LIMA et. al., 2013).

Dado um triângulo retângulo *ABC* com um ângulo agudo medindo β, como o da Figura 11, identificamos seis razões trigonométricas entre os lados de *ABC*, que são denominadas de razões trigonométricas do ângulo β, pois tais razões dependem exclusivamente deste ângulo e não das medidas dos lados do triângulo.

Figura 11: Relações trigonométricas 2



As principais razões trigonométricas são seno, cosseno e tangente, que são encontradas a partir das expressões (1), (2) e (3) respectivamente, ou seja:

- O seno do ângulo β é a razão entre o cateto oposto a β e à hipotenusa do triângulo. Na Figura 11, temos $sen\ \beta = \frac{b}{a}$;
- O cosseno do ângulo β é a razão entre o cateto adjacente a β e à hipotenusa do triângulo. Na Figura 11, temos $\cos \beta = \frac{c}{a}$;
- A tangente do ângulo β é a razão entre o cateto oposto a β e o cateto adjacente a β. Na Figura 11, temos $tg\ \beta = \frac{b}{c}$.

As outras três razões trigonométricas são denominadas cossecante, secante e cotangente; e são as razões inversas do seno, cosseno e tangente, respectivamente (LIMA et. al. 2013).

2.3.1 RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA

Relacionando os dois conceitos principais utilizados neste capitulo, chegaremos a uma importante identidade matemática, conhecida como relação fundamental da trigonometria. Afim de obtermos essa relação utilizaremos ângulos agudos, pois trabalharemos com triângulos retângulos, porém a mesma é válida para ângulos quaisquer.

Relação fundamental da trigonometria: Dado um ângulo β qualquer, então

$$sen^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

De fato, observando o triângulo da Figura 11, temos que $sen\,\beta = \frac{b}{a}$ e $\cos\beta = \frac{c}{a}$, desse modo

$$sen^2\beta + \cos^2\beta = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2}.$$

Lembrando que pelo Teorema de Pitágoras $b^2 + c^2 = a^2$, obtemos

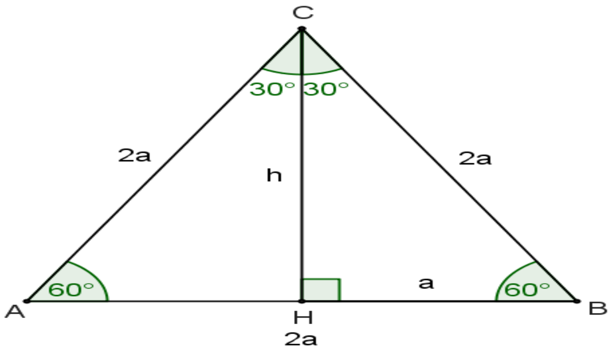
$$sen^2\beta + cos^2\beta = \frac{a^2}{a^2} = 1\,. \quad \blacksquare$$

2.3.2. SENO, COSSENO E TANGENTE DOS ÂNGULOS NOTÁVEIS

Como observamos anteriormente, as razões trigonométricas dependem exclusivamente do ângulo. Deste modo, cada ângulo possui valores próprios de seno, cosseno e tangente. Apresentaremos a seguir um método semelhante ao utilizado por Ribeiro (2007), Souza (2013) e Fugita et. al. (2015), para encontrar tais valores para os ângulos de 30°, 45° e 60° que são utilizados frequentemente no estudo de trigonometria e são conhecidos por ângulos notáveis.

Encontraremos a princípio as razões trigonométricas dos ângulos de 30° e 60°. Faremos isso utilizando o triângulo equilátero *ABC* da Figura 12, no qual traçamos a altura relativa ao lado *AB*, que em se tratando de um triângulo equilátero, coincide com a mediana e a bissetriz, dividindo o triângulo *ABC* em dois triângulos retângulos *ACH* e *BCH*.

Figura 12: Triângulo equilátero



Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo *BCH* da figura 12, temos que:

$$(2a)^2 = a^2 + h^2 \Rightarrow 4a^2 - a^2 = h^2 \Rightarrow h^2 = 3a^2 \Rightarrow h = \pm\sqrt{3a^2} \Rightarrow h = \pm a\sqrt{3},$$

pois $a > 0$. Como $h > 0$, então

$$h = a\sqrt{3}.$$

Agora que conhecemos as medidas de todos os lados do triângulo *BCH* em função de *a*, podemos encontrar as razões procuradas. Faremos isso a seguir:

$$sen\ 30° = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2};$$

$$\cos 30° = \frac{h}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$tg\ 30° = \frac{a}{h} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

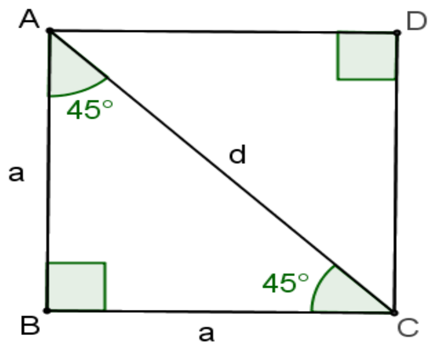
$$sen\ 60° = \frac{h}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 60° = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2};$$

$$tg\ 60° = \frac{h}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}.$$

Encontradas as razões trigonométricas dos ângulos de 30° e 60°, resta encontrar as mesmas para o ângulo de 45°. Faremos isso com o auxílio do quadrado *ABCD* da Figura 13, no qual traçamos a diagonal *AC,* que em se tratando de um quadrado, também é a bissetriz, formando dois triângulos retângulos A*BC* e *ADC.*

Figura 13: Quadrado



Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo *ABC* da Figura 13, temos que:

$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2a^2 \Rightarrow d = \pm\sqrt{2a^2} \Rightarrow d = \pm\, a\sqrt{2}$, pois $a > 0$.

Como $d > 0$, então

$$d = a\sqrt{2}.$$

Agora que conhecemos as medidas de todos os lados do triângulo *ABC* em função de *a*, podemos encontrar as razões procuradas, faremos isso a seguir:

$$sen\ 45° = \frac{a}{d} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45° = \frac{a}{d} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$tg\ 45° = \frac{a}{a} = 1.$$

Os dados calculados estão dispostos no Quadro 1.

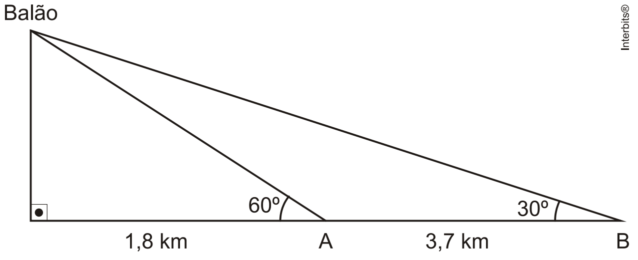
Quadro 1: Razões trigonométricas dos ângulos notáveis

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Finalizaremos esta seção ilustrando o modo como as razões trigonométricas em triângulos retângulos são utilizadas na prática, através de dois exemplos extraídos do ENEM.

Exemplo 3: (ENEM 2010) Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.

Disponível em: http://www.correiodobrasil.com.br. Acesso em: 02 maio 2010.



Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60°; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de 30°.

Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

a) 1,8 km

b) 1,9 km

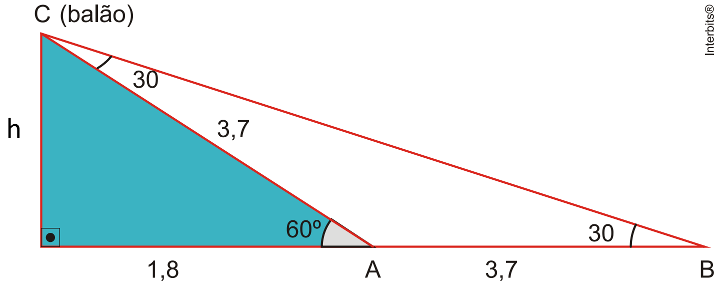
c) 3,1 km

d) 3,7 km

e) 5,5 km

Solução: Observe a Figura 14.

Figura 14: Solução do Exemplo 3



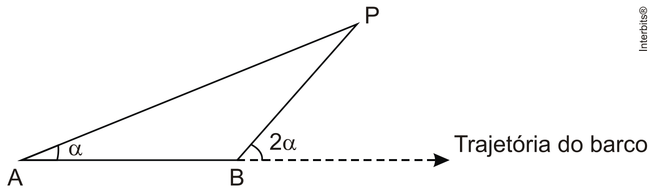
Fonte: Banco de questões do portal SAS

Como as informações disponíveis são as medidas do ângulo e do seu cateto adjacente e o objetivo é determinar a medida do cateto oposto, utilizaremos a razão trigonométrica tangente, em relação ao ângulo de 60º, no triângulo destacado na Figura 14, de onde obtemos

$$tg\ 60° = \frac{h}{1{,}8} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{1{,}8} \Rightarrow h \cong 1{,}7 \times 1{,}8 \Rightarrow h \cong 3{,}1.$$

Logo a alternativa correta é a c).

Exemplo 4: (ENEM 2011) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação:



Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30^{o}$ e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância $AB = 2000\ m$. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será

a) $1000\ m$.

b) $1000\sqrt{3}\ m$.

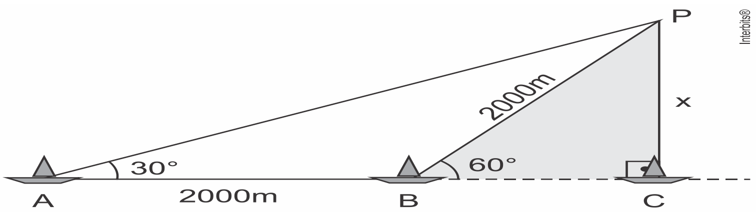
c) $2000\frac{\sqrt{3}}{3}m$.

d) $2000\ m$.

e) $2000\sqrt{3}\ m$.

Solução: Observe a Figura 15.

Figura 15: Solução do Exemplo 4



Fonte: Banco de questões do portal SAS

A partir da Figura 15, note que o ângulo $\hat{P}$ do triângulo *BPC* mede 30°, logo o triângulo *ABP* é isósceles. Daí, temos que *BP* = *2000m*. Utilizando a razão trigonométrica seno, em relação ao ângulo de 60º, no triângulo *BCP*, temos:

$$sen\ 60° = \frac{x}{2000} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{2000} \Rightarrow 2x = 2000\sqrt{3} \Rightarrow x = 1000\sqrt{3}.$$

Desse modo, a alternativa correta é b).

Os exemplos 2, 3 e 4 apresentados, também ilustram a relevância dos temas abordados neste capítulo no Exame Nacional do Ensino Médio o qual é hoje, a principal forma de acesso ao ensino superior no Brasil. No próximo capítulo discutiremos as relações trigonométricas em triângulos quaisquer.

CAPÍTULO 3
RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM TRIÂNGULOS QUAISQUER

No capítulo 2 vimos como encontrar e como utilizar as razões trigonométricas em triângulos retângulos. Neste capítulo, utilizaremos as razões trigonométricas em triângulos quaisquer, mais especificamente usaremos duas leis, a lei dos senos e a lei dos cossenos.

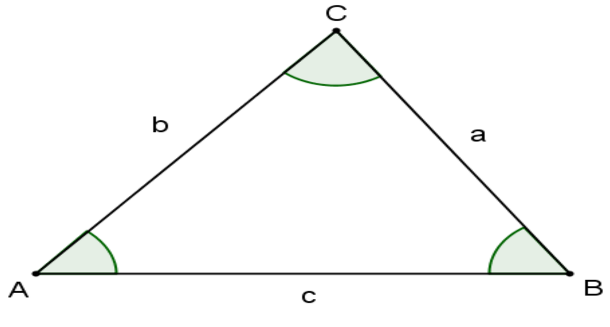
3.1. LEI DOS SENOS

A lei dos senos é um resultado muito importante no estudo da geometria e da trigonometria, pois nos permite encontrar as medidas de lados e ângulos de triângulos quaisquer, relacionando dois lados e seus respectivos ângulos opostos. A mesma garante que, em qualquer triângulo a razão entre um lado e o seno do ângulo oposto é constante, ou seja, é a mesma independentemente do lado escolhido. Desse modo, ao enunciar a lei dos senos, temos:

Lei dos senos. Dado um triângulo *ABC,* com *AB* = *c*, *AC* = *b* e *BC* = *a*, como o da Figura 16, sempre é válida a relação

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}\,.$$

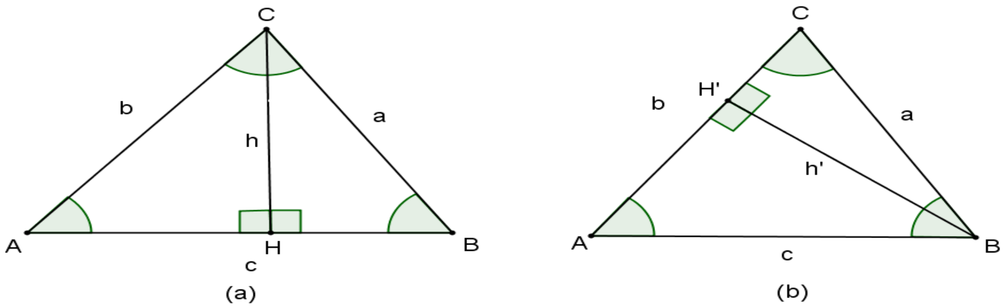
Figura 16: Lei dos senos



Demonstração: Faremos a demonstração em três partes. Primeiro provaremos para o triângulo *ABC* acutângulo (Todos os ângulos internos agudos), segundo para o triângulo *ABC* obtusângulo (Possui um ângulo interno obtuso) e por fim para o caso no qual *ABC* é retângulo.

1. Triângulo acutângulo

Figura 17: Demonstração da lei dos senos



Na Figura 17 (a) temos o triângulo *ABC* com a altura *h* relativa ao lado *AB*, enquanto na Figura 17 (b) temos o mesmo triângulo *ABC* com a altura *h’* relativa ao lado *AC*.

Utilizando a Figura 17 (a), temos do triângulo *ACH*, que

$$sen\ \hat{A} = \frac{h}{b},$$

o que implica em

$$h = b\ sen\ \hat{A}. \tag{1}$$

Do triângulo *BCH*, temos:

$$sen\ \hat{B} = \frac{h}{a},$$

daí obtemos

$$h = a\ sen\ \hat{B}. \tag{2}$$

Logo, comparando as identidades (1) e (2), temos que

$$a\ sen\ \hat{B} = b\ sen\ \hat{A} \Rightarrow \frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}}, \qquad \hat{A}, \hat{B} \neq 0° \tag{3}$$

Utilizando agora a Figura 17 (b), temos do triângulo *BCH’*, que

$$sen\ \hat{C} = \frac{h'}{a},$$

de onde vem

$$h' = a\ sen\ \hat{C}. \tag{4}$$

Do triângulo *ABH’*, temos:

$$sen\ \hat{A} = \frac{h'}{c}\ ou\ h' = c\ sen\ \hat{A}. \tag{5}$$

Logo, pelas igualdades (4) e (5), segue que

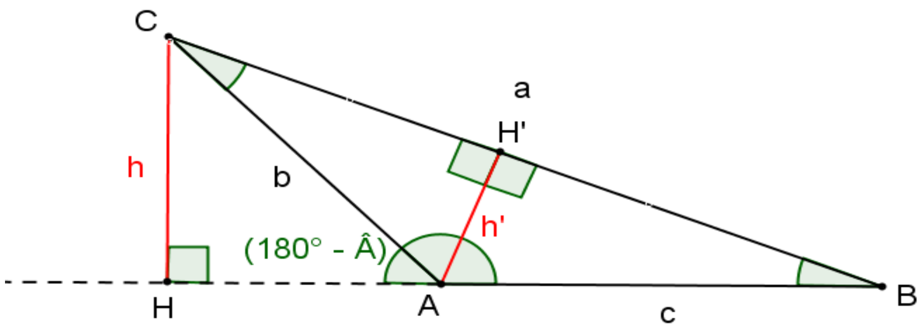
$$a\ sen\ \hat{C} = c\ sen\ \hat{A}\ \Rightarrow \frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}}, \qquad \hat{C} \neq 0°. \tag{6}$$

Daí, comparando as igualdades (3) e (6), obtemos

$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}}, como\ queríamos!$$

2. Triângulo obtusângulo

Figura 18: Demonstração da lei dos senos 1



Na Figura 18, temos o triângulo *ABC* com as alturas *h* e *h'* relativas aos lados *AB* e *BC*, respectivamente. Do triângulo *BCH*, temos

$$sen\ \hat{B} = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a\ sen\ \hat{B}. \tag{1}$$

Do triângulo *ACH*, temos

$$sen\ (180° - \hat{A}) = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b\ sen\ (180° - \hat{A})\ \Rightarrow h = b\ sen\ \hat{A}, \tag{2}$$

pois $sen\ (180° - \hat{A}) = sen\ \hat{A}$ (Ver Apêndice C).

Logo, comparando as igualdades (1) e (2), temos que

$$a\ sen\ \hat{B} = b\ sen\ \hat{A}\ \Rightarrow \frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}}, \qquad \hat{A} \neq 180°\ e\ \hat{A}, \hat{B}\ \neq 0°. \tag{3}$$

Do triângulo *ABH'*, temos

$$sen\ \hat{B} = \frac{h'}{c} \Rightarrow h' = c\ sen\ \hat{B}. \tag{4}$$

Do triângulo *ACH'*, temos

$$sen\ \hat{C} = \frac{h'}{b} \Rightarrow h' = b\ sen\ \hat{C}. \tag{5}$$

Logo, comparando as igualdades (4) e (5), temos que

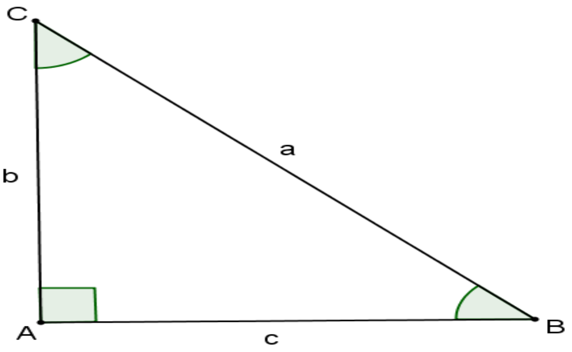
$$b\ sen\ \hat{C} = c\ sen\ \hat{B}\ \Rightarrow \frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}}, \qquad \hat{C} \neq 0°. \tag{6}$$

Daí, comparando as igualdades (3) e (6), temos

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}\ , como\ queríamos!$$

3. Triângulo retângulo

Figura 19: Demonstração da lei dos senos 2



A Figura 19 mostra um triângulo *ABC*, retângulo em *A*. Desse triângulo temos que

$$sen\,\hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{sen\,\hat{B}}{1} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{sen\,\hat{B}}{sen\,90°} = \frac{b}{a} \Rightarrow a\ sen\,\hat{B} = b\ sen\,\hat{A},$$

daí obtemos

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}}\ , \qquad \hat{A}, \hat{B} \neq 0°. \qquad (1)$$

Lembramos que $sen 90° = 1$ (Ver Apêndice C).

Analogamente, temos que

$$sen\,\hat{C} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{sen\,\hat{C}}{1} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{sen\,\hat{C}}{sen\,90°} = \frac{c}{a} \Rightarrow a\ sen\,\hat{C} = c\ sen\,\hat{A},$$

o que implica em

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}\ , \qquad \hat{C} \neq 0°. \qquad (2)$$

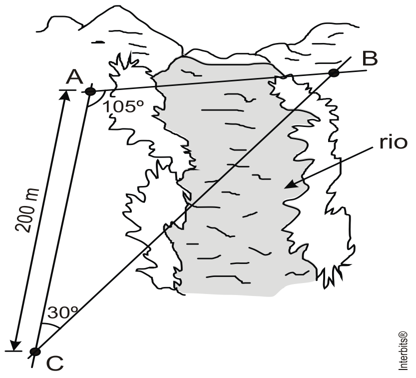
Logo, comparando as equações (1) e (2), temos

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}\ , como\ queríamos!$$

Portanto a lei dos senos é válida para todos os triângulos. ■

Para introduzir o modo como a lei dos senos é utilizada na prática, apresentaremos um exemplo de aplicação da mesma.

Exemplo 1: (UFPB 2010) A prefeitura de certa cidade vai construir, sobre um rio que corta essa cidade, uma ponte que deve ser reta e ligar dois pontos, A e B, localizados nas margens opostas do rio. Para medir a distância entre esses pontos, um topógrafo localizou um terceiro ponto, C, distante 200*m* do ponto A e na mesma margem do rio onde se encontra o ponto A. Usando um teodolito (instrumento de precisão para medir ângulos horizontais e ângulos verticais, muito empregado em trabalhos topográficos), o topógrafo observou que os ângulos $B\hat{C}A$ e $C\hat{A}B$ mediam, respectivamente, 30º e 105º, conforme ilustrado na figura a seguir.



Com base nessas informações, é correto afirmar que a distância, em metros, do ponto A ao ponto B é de:

a) $200\sqrt{2}$

b) $180\sqrt{2}$

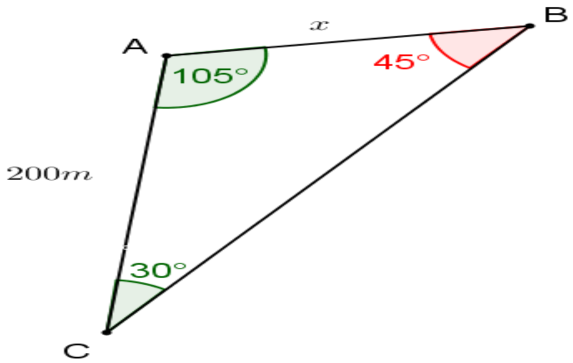
c) $150\sqrt{2}$

d) $100\sqrt{2}$

e) $50\sqrt{2}$

Solução: Observe a Figura 20.

Figura 20: Solução do Exemplo 1 do Capítulo 3



Nesta figura temos uma ilustração da situação citada no Exemplo 1. Nosso objetivo é encontrar o valor do lado *AB*, ou seja, o valor de x. Para isso inicialmente notamos que $\hat{B}$ = 45°, pois

$$105° + 30° + \hat{B} = 180° \Rightarrow \hat{B} = 45°.$$

Daí, aplicando a lei dos senos no triângulo *ABC*, temos que

$$\frac{x}{sen\ 30°} = \frac{200}{sen\ 45°} \Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{200}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow x \times \frac{2}{1} = 200 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{200}{\sqrt{2}},$$

racionalizando esta fração, obtemos

$$x = \frac{200}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{200\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 100\sqrt{2}.$$

Logo, a distância do ponto *A* ao ponto *B* é de $100\sqrt{2}\,m$ e portanto a alternativa correta é d).

3.2. LEI DOS COSSENOS

Assim como a lei dos senos, a lei dos cossenos é um resultado muito importante para a geometria e para trigonometria, pois a mesma também traz subsídios para encontrar medidas de lados e ângulos de triângulos quaisquer. De acordo com Souza (2013) a relação que hoje conhecemos como lei dos cossenos pode ser encontrada em uma das obras mais importantes da história da geometria, pois a mesma está presente no livro II da obra Os Elementos, de Euclides.

Enquanto a lei dos senos relaciona dois lados e seus respectivos ângulos opostos, a lei dos cossenos relaciona os três lados e um ângulo do triângulo. A mesma afirma que em qualquer triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual a soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos duas vezes o produto das medidas desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles. Desse modo ao enunciar a lei dos cossenos, temos:

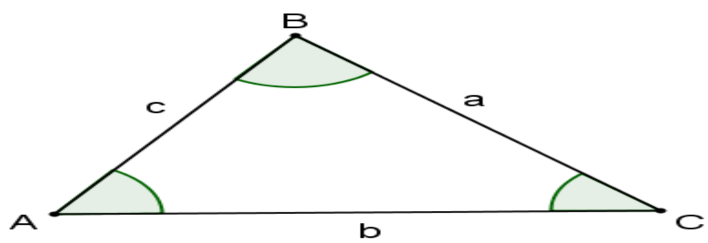
Lei dos cossenos. Dado um triângulo *ABC,* com *AB* = *c*, *AC* = *b* e *BC* = *a*, como o da Figura 21, são sempre válidas as seguintes relações

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}\,;$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}\,;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}.$$

Figura 21: Lei dos cossenos

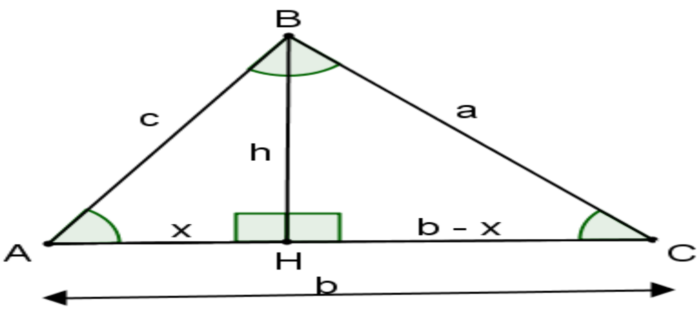


Faremos duas demonstrações para esse teorema, a Demonstração 1, que é a demonstração tradicional, similar a encontrada em diversos livros, como Ribeiro (2007), Souza (2013), Fugita et. al. (2015) e Lima (2013); e a Demonstração 2, similar a encontrada em Muniz Neto (2013) que utiliza a relação fundamental da trigonometria. Em ambas as demonstrações, mostraremos apenas que a primeira relação da lei dos cossenos é válida, as demais podem ser demonstradas de modo análogo.

Demonstração 1. De modo análogo ao que fizemos na demonstração da lei dos senos, iremos considerar aqui os casos em que o triângulo *ABC* é acutângulo, obtusângulo e retângulo.

1. **Triângulo acutângulo**

Figura 22: Demonstração da lei dos cossenos 1



Na Figura 22, o segmento *BH*, altura relativa ao lado *AC*, divide o triângulo *ABC* em dois triângulos retângulos *ABH* e *BCH*. Do triângulo *ABH*, temos

$$\cos \hat{A} = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c \cos \hat{A}; \tag{1}$$

$$c^2 = x^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - x^2. \tag{2}$$

Daí, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *BHC*, temos:

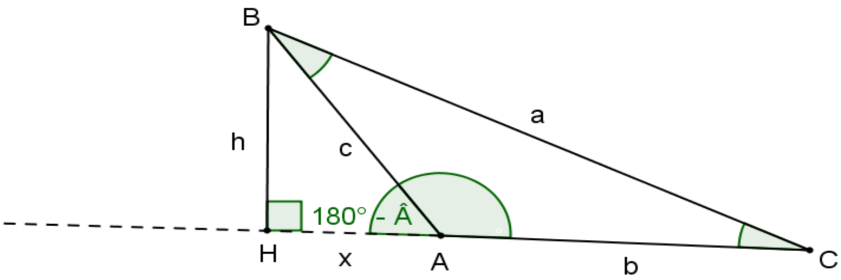
$$a^2 = h^2 + (b - x)^2 \Rightarrow a^2 = h^2 + b^2 - 2bx + x^2.$$

Substituindo os resultados das equações (1) e (2), temos

$$a^2 = c^2 - x^2 + b^2 - 2bc \cos \hat{A} + x^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}.$$

2. Triângulo obtusângulo

Figura 23: Demonstração da lei dos cossenos 2



No triângulo *ABC* da Figura 23, foi traçado o segmento *BH*, altura relativa ao lado *AC*, obtendo assim, dois triângulos retângulos *ABH* e *BCH*. Do triângulo *ABH*, temos

$$\cos(180° - \hat{A}) = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c\cos(180° - \hat{A}) \Rightarrow x = -c\cos\hat{A}, \qquad (1)$$

pois $\cos(180° - \hat{A}) = -\cos\hat{A}$ (Ver Apêndice C); e

$$c^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - x^2. \qquad (2)$$

Daí, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *BCH*, temos

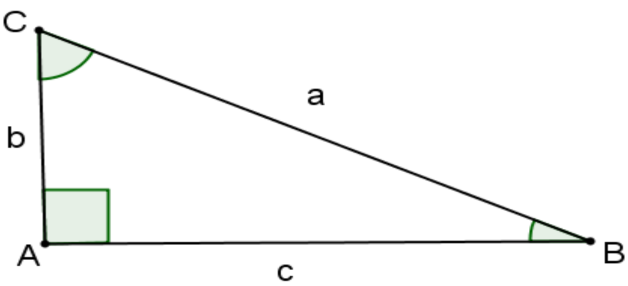
$$a^2 = h^2 + (b + x)^2 \Rightarrow a^2 = h^2 + b^2 + 2bx + x^2.$$

Substituindo agora os resultados das equações (1) e (2), obtemos

$$a^2 = c^2 - x^2 + b^2 + 2b(-c\cos\hat{A}) + x^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}.$$

3. Triângulo retângulo

Figura 24: Demonstração da lei dos cossenos 3



Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo da Figura 24, obtemos

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

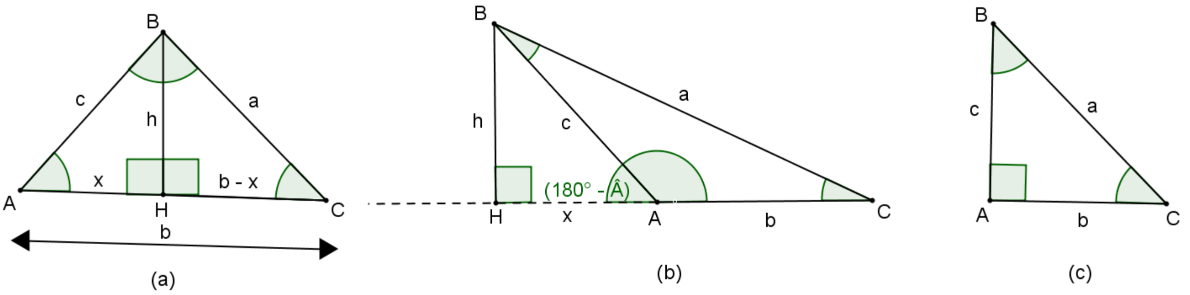
Mas, como $\cos 90° = 0$ (Ver Apêndice C), temos que $-2bc\,cos90° = 0$ e portanto $-2bc\cos\hat{A} = 0$. Logo

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}.$$

Portanto, a lei dos cossenos é válida para todos os triângulos. ■

Demonstração 2: Consideraremos aqui os casos em que o triângulo *ABC* é acutângulo, obtusângulo e retângulo separadamente.

Figura 25: Demonstração 2 da lei dos cossenos



1. Triângulo acutângulo

Observando o triângulo *ABH* da Figura 25 (a), temos

$$\cos \hat{A} = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c\cos \hat{A} \ \ e \ sen\ \hat{A} = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c\ sen\ \hat{A}.$$

Daí aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *BCH*, obtemos

$$a^2 = h^2 + (b-x)^2 \Rightarrow \ a^2 = \left(c\ sen\ \hat{A}\right)^2 + \left(b - c\cos \hat{A}\right)^2.$$

Portanto

$$a^2 = c^2 sen^2 \hat{A} + b^2 - 2bc\cos \hat{A} + c^2 cos^2 \hat{A},$$

o que implica em

$$a^2 = b^2 + c^2\left(sen^2 \hat{A} + cos^2 \hat{A}\right) - 2bc\cos \hat{A},$$

de onde vem

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos \hat{A}\,, já\ que\ sen^2 \hat{A} + cos^2 \hat{A} = 1.$$

2. Triângulo Obtusângulo

Do triângulo *ABH* da Figura 25 (b) vem que

$$sen\ \left(180° - \ \hat{A}\right) = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c\ sen\ \hat{A}\ e \cos\left(180° - \ \hat{A}\right) = \frac{x}{c} \Rightarrow x = \ -c\cos \hat{A},$$

Pois $sen\ \left(180° - \ \hat{A}\right) = sen\ \hat{A}$ e $\cos(180° - \ \hat{A}) = - \ \cos \hat{A}$.

Daí, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *BCH*, obtemos:

$$a^2 = h^2 + (b+x)^2 \ \Rightarrow a^2 = c^2 sen^2 \hat{A} + \left(b - c\cos \hat{A}\right)^2,$$

o que implica em

$$a^2 = c^2 sen^2 \hat{A} + b^2 - 2bc\cos \hat{A} + \ c^2 cos^2 \hat{A},$$

ou ainda

$$a^2 = b^2 + c^2\left(sen^2\hat{A} + cos^2\hat{A}\right) - 2bc\cos\hat{A} \;\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}.$$

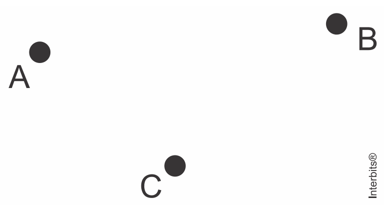
3. Triângulo retângulo

No caso do triângulo retângulo, Figura 25 (c), a demonstração é análoga a Demonstração 1 e por isso não faremos aqui.

Assim mostramos que a lei dos cossenos é válida para todos os triângulos. ■

Para introduzir o modo como a lei dos cossenos é aplicada na prática, apresentaremos um exemplo de aplicação da mesma.

Exemplo 2: (IFSUL 2015) Em certa cidade, a igreja está localiza no ponto A, a prefeitura no ponto B, e a livraria no ponto C, como mostra os pontos a seguir. Sabendo-se que a distância da igreja à prefeitura é de 10 metros, a distância da prefeitura à livraria corresponde a 15 metros, e que o ângulo formado por essas duas direções é $60°$, a distância da livraria à igreja é



a) $17\sqrt{5}$ m

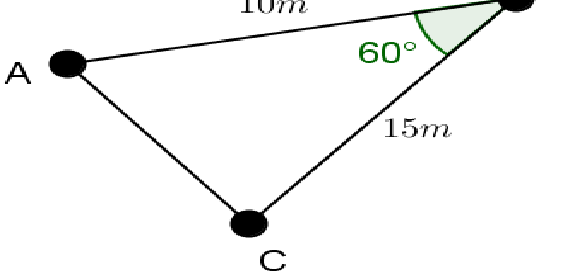
b) $5\sqrt{7}$ m

c) $25\sqrt{7}$ m

d) $7\sqrt{5}$ m

Solução. Observe a Figura 26.

Figura 26: Solução do Exemplo 2 do Capítulo 3



A situação descrita no Exemplo 2 está representada na Figura 26, na qual a distância procurada é a medida do lado *AC*, encontraremos essa medida, aplicando a lei dos cossenos no triângulo *ABC* da Figura 26, faremos isso como segue:

$$AC^2 = 10^2 + 15^2 - 2 \times 10 \times 15 \times \cos 60° \;\Rightarrow\; AC^2 = 100 + 225 - 300 \times \frac{1}{2},$$

de onde vem

$$AC^2 = 325 - 150 \;\Rightarrow\; AC^2 = 175 \;\Rightarrow AC = \pm\sqrt{175} \;\Rightarrow AC = \pm 5\sqrt{7}.$$

Como $AC > 0$, temos que $AC = 5\sqrt{7}$. Logo a distância da livraria à igreja é de $5\sqrt{7}$ m e, portanto, a alternativa correta é b).

Com o Exemplo 2 finalizamos a seção 3.2, onde apresentamos, demonstramos e vimos uma aplicação da lei dos cossenos. Na próxima seção apresentaremos como utilizar a lei dos senos e a lei dos cossenos para encontrar os seis elementos (lados e ângulos) de um triângulo, conhecendo as de três deles.

3.3. UTILIZANDO A LEI DOS SENOS E A LEI DOS COSSENOS PARA COMPLETAR OS ELEMENTOS (MEDIDAS DE LADOS E ÂNGULOS) DE UM TRIÂGULO DE ACORDO COM OS CASOS DE CONGRUÊNCIA

Quando juntas, a lei dos senos e a lei dos cossenos nos dão a possibilidade de encontrar os seis elementos, lados e ângulos, de um triângulo, conhecendo-se apenas três deles, sendo um, necessariamente a medida de um dos lados do triângulo, conforme os casos de congruência (LIMA, 2013).

Apresentaremos nessa seção quatro exemplos que nos darão a oportunidade de verificar como encontrar todos os elementos (lados e ângulos) de um triângulo conhecendo apenas três deles. Para tal, iremos apresentar um exemplo de cada um dos casos de congruência a seguir: LLL – Este caso garante que se dois triângulos possuem os três lados iguais, então eles são congruentes; LAL – Afirma que se dois triângulos possuem dois lados e o ângulo formado por esses dois lados iguais, então eles são congruentes; e ALA – Garante que se dois triângulos possuem dois ângulos e o lado compreendido entre esses ângulos iguais, então eles são congruentes.

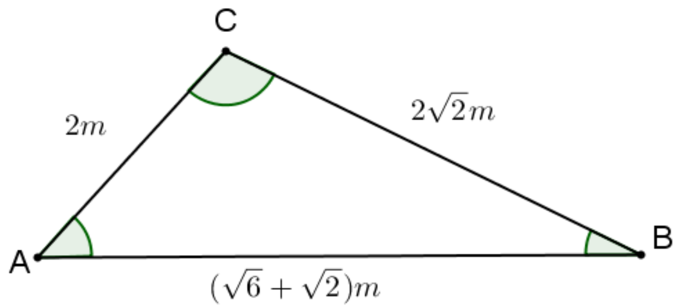
Além dos casos clássicos de congruência citados acima, apresentaremos ainda um exemplo do pouco conhecido quarto caso de congruência. De acordo com Lima (2013) esse caso afirma que se dois triângulos possuem dois lados iguais e o ângulo oposto ao maior desses dois lados igual, então eles serão congruentes. Os

Exemplos 3, 4 e 5 ilustrarão os casos de congruência LLL, LAL e ALA, respectivamente.

Exemplo 3. Encontrar todos os elementos de um triângulo *ABC*, sabendo que $AB = (\sqrt{6} + \sqrt{2})\ m$, $AC = 2\ m$ e $BC = 2\sqrt{2}\ m$.

Solução. Observamos que qualquer outro triângulo com essas medidas será congruente a *ABC* e, portanto, esse triângulo está totalmente determinado. A seguir encontraremos os elementos que estão faltando, ou seja, os ângulos desse triângulo. Tal triângulo *ABC* está representado na Figura 27.

Figura 27: Solução do Exemplo 3 do Capítulo 3



Encontraremos inicialmente o ângulo $\hat{A}$, aplicando a lei dos cossenos no triângulo *ABC*. Faremos isso a seguir:

$$\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 2^2 + \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)^2 - 2 \times 2 \times \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\cos\hat{A},$$

o que implica em

$$8 = 4 + 6 + 2\sqrt{12} + 2 - 4\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\cos\hat{A} \Rightarrow 4\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\cos\hat{A} = 4 + 2\sqrt{12}.$$

Daí obtemos

$$\cos\hat{A} = \frac{4 + 4\sqrt{3}}{4\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)} \Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \times \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}\right),$$

ou ainda

$$\cos\hat{A} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2} + \sqrt{18} - \sqrt{6}}{6 - 2} \Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{-\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Logo $\hat{A}$ = 45°. Encontrado o valor do ângulo $\hat{A}$, encontraremos agora o ângulo $\hat{B}$, aplicando a lei dos senos no triângulo ABC. Desse modo, temos:

$$\frac{2}{sen\ \hat{B}} = \frac{2\sqrt{2}}{sen\ \hat{A}} \Rightarrow \frac{2}{sen\ \hat{B}} = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \frac{2}{sen\ \hat{B}} = 2\sqrt{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{2}{sen\ \hat{B}} = 4,$$

de onde vem

$$4sen\ \hat{B} = 2 \Rightarrow sen\ \hat{B} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Como AC < BC < AB é de se esperar que $\hat{B} < \hat{A} < \hat{C}$, pois em um triângulo qualquer, opostos aos maiores lados estão os maiores ângulos. Desse modo a solução $\hat{B} = 150°$ está descartada e, portanto $\hat{B}$ = 30°. Agora que conhecemos $\hat{A}$ e $\hat{B}$, podemos encontrar facilmente o ângulo $\hat{C}$, utilizando a relação a seguir:

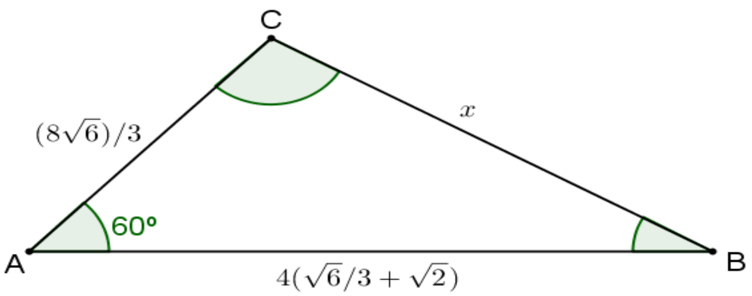
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \Rightarrow 45° + 30° + \hat{C} = 180° \Rightarrow \hat{C} = 105°.$$

Desse modo, encontramos os elementos procurados. Esse processo pode ser aplicado em qualquer outro triângulo no qual se deseje encontrar as medidas dos ângulos, conhecendo as medidas dos lados.

Exemplo 4. Encontrar todos os elementos de um triângulo *ABC*, sabendo que $AB = 4\left(\frac{\sqrt{6}}{3} + \sqrt{2}\right)$ *cm*, AC = $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ cm e que $\hat{A}$ = 60°.

Solução: Observamos que qualquer outro triângulo que possua dois lados que formam entre si um ângulo de 60° e medem $4\left(\frac{\sqrt{6}}{3} + \sqrt{2}\right)$ *cm* e $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ cm será congruente a *ABC*, sendo assim, o triângulo ABC está totalmente definido. A seguir encontraremos os elementos que estão faltando. O triângulo *ABC* aparece na Figura 28.

Figura 28: Solução do Exemplo 4 do Capítulo 3



Nessa situação, encontraremos inicialmente a medida *x* do lado *BC*. Faremos isso aplicando a lei dos cossenos no triângulo *ABC*. Desse modo, temos

$$x^2 = \left(\frac{8\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left[4\left(\frac{\sqrt{6}}{3} + \sqrt{2}\right)\right]^2 - 2 \times \frac{8\sqrt{6}}{3} \times 4\left(\frac{\sqrt{6}}{3} + \sqrt{2}\right)\cos 60°.$$

Daí obtemos

$$x^2 = \frac{128}{3} + 16\left(\frac{6}{9} + \frac{2\sqrt{12}}{3} + 2\right) - \frac{64\sqrt{6}}{3}\left(\frac{\sqrt{6}}{3} + \sqrt{2}\right) \times \frac{1}{2},$$

o que implica em

$$x^2 = \frac{128}{3} + 16\left(\frac{8}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) - \frac{32\sqrt{6}}{3}\left(\frac{\sqrt{6}}{3} + \sqrt{2}\right),$$

e de onde vem

$$x^2 = \frac{128}{3} + \frac{128}{3} + \frac{64\sqrt{3}}{3} - \frac{64}{3} - \frac{32\sqrt{12}}{3},$$

ou ainda

$$x^2 = \frac{192}{3} + \frac{64\sqrt{3}}{3} - \frac{64\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = \sqrt{64} \Rightarrow x = \pm 8.$$

Como *x* é uma medida de comprimento, então *x* = *8cm*. Encontrada a medida do lado *BC*, encontraremos agora a medida do ângulo $\hat{B}$ aplicando a lei dos senos no triângulo *ABC*. Desse modo, temos:

$$\frac{8}{sen\ 60°} = \frac{\frac{8\sqrt{6}}{3}}{sen\ \hat{B}} \Rightarrow \frac{8}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{8\sqrt{6}}{3}}{sen\ \hat{B}} \Rightarrow 8sen\ \hat{B} = \frac{8 \times 3\sqrt{2}}{6} \Rightarrow sen\ \hat{B} = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

logo $\hat{B}$ = 45°, pois $\hat{B} = 135°$ está excluída já que $\hat{A} = 60°$. Por fim, encontraremos a medida do ângulo $\hat{C}$. Faremos isso utilizando a seguinte relação:

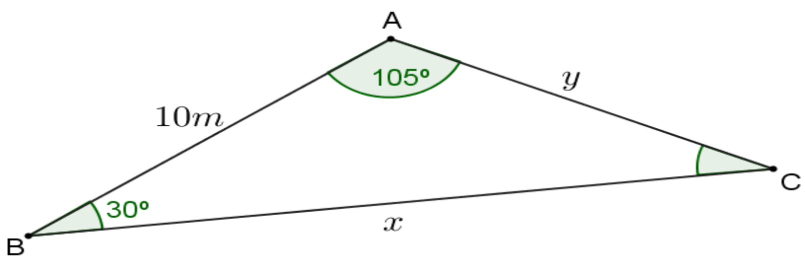
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \Rightarrow 60° + 45° + \hat{C} = 180° \Rightarrow \hat{C} = 75°.$$

Desse modo, encontramos os elementos procurados. Esse processo pode ser aplicado em qualquer outro triângulo no qual se deseje encontrar a medida de um dos lados e dois dos ângulos, sendo conhecidos dois lados e o ângulo compreendido entre eles.

Exemplo 5. Encontrar todos os elementos de um triângulo *ABC*, sabendo que $\hat{A}$ = *105°*, $\hat{B}$ = *30°* e *AB* = *10 m*.

Solução. Note que qualquer outro triângulo com dois ângulos de medidas 105° e 30° no qual a medida do lado compreendido entre esses ângulos seja 10m será congruente a *ABC*. Sendo assim, o triângulo ABC está totalmente definido. A seguir encontraremos os elementos que estão faltando. O triângulo ABC aparece na Figura 29.

Figura 29: Solução do Exemplo 5 do Capítulo 3



Nessa situação encontraremos inicialmente o ângulo que está faltando. Faremos isso com o auxílio da seguinte relação:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \Rightarrow 105° + 30° + \hat{C} = 180° \Rightarrow \hat{C} = 45°.$$

Encontrado o terceiro ângulo, resta encontrar as medidas dos lados *AC* e *BC*. Encontraremos primeiro a medida *y* do lado *AC* com o auxílio da lei dos senos. Faremos isso a seguir:

$$\frac{y}{sen30°} = \frac{10}{sen45°} \Rightarrow \frac{y}{\frac{1}{2}} = \frac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \frac{y\sqrt{2}}{2} = 5 \Rightarrow y\sqrt{2} = 10 \Rightarrow y = \frac{10}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

de onde vem

$$y = \frac{10\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = 5\sqrt{2}.$$

Agora, resta encontrarmos a medida *x* do lado *BC*. Podemos encontrar essa medida utilizando a lei dos cossenos ou novamente a lei dos senos. Para que possamos trabalhar apenas com ângulos notáveis, utilizaremos a lei dos cossenos. Desse modo, temos:

$$\left(5\sqrt{2}\right)^2 = x^2 + 10^2 - 2 \times 10x\, cos30° \Rightarrow 50 = x^2 + 100 - 20x \times \frac{\sqrt{3}}{2},$$

daí obtemos

$$x^2 - 10\sqrt{3}x + 50 = 0,$$

utilizando a fórmula de Bhaskara, temos:

$$x' = 5\left(\sqrt{3} + 1\right)\ e\ x'' = 5\left(\sqrt{3} - 1\right).$$

Observe que $x'' = 5(\sqrt{3} - 1)$ não pode ser a medida de *BC*, pois $10 > 5\sqrt{2} > 5(\sqrt{3} - 1)$ o que contraria o fato de que em qualquer triângulo os maiores lados ficam opostos aos maiores ângulos. Desse modo BC = $5\left(\sqrt{3} + 1\right)$ m.

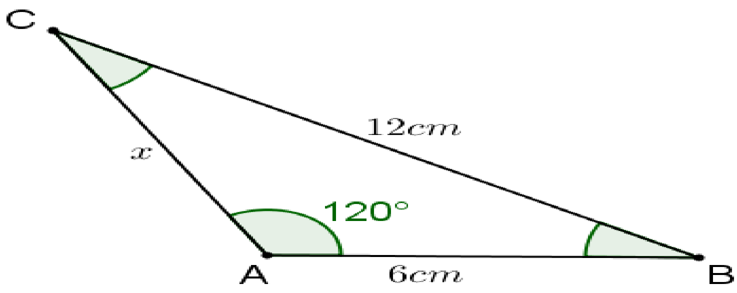
Assim, encontramos todos os elementos procurados. Esse processo pode ser aplicado em qualquer outro triângulo, no qual se deseje encontrar as medidas de dois lados e um ângulo, sendo conhecidas as medidas de dois ângulos e do lado compreendido entre eles.

O próximo exemplo ilustra o quarto caso de congruência.

Exemplo 6. Encontre todos os elementos de um triângulo *ABC*, sabendo que $\hat{A}$ = 120°, BC = 12cm e AB = 6cm.

Solução. Sabemos que qualquer outro triângulo com lados medindo 12cm e 6cm, no qual a medida do ângulo oposto ao lado que mede 12cm seja 120° será congruente a *ABC*, sendo assim, o triângulo *ABC* está totalmente definido. A seguir encontraremos os elementos que estão faltando. O triângulo *ABC* aparece na Figura 30

Figura 30: Solução do Exemplo 6 do Capítulo 3



Nesta situação, encontraremos inicialmente a medida do ângulo $\hat{C}$. Observe que o ângulo $\hat{C}$ é necessariamente agudo, pois a soma $\hat{B} + \hat{C}$ deve ser igual a 60º. Encontraremos a medida de tal ângulo utilizando a lei dos senos no triângulo *ABC*. Desse modo temos:

$$\frac{12}{sen\ 120°} = \frac{6}{sen\ \hat{C}} \Rightarrow \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6}{sen\ \hat{C}} \Rightarrow 12\ sen\ \hat{C} = 3\sqrt{3} \Rightarrow sen\ \hat{C} = \frac{3\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

logo o ângulo procurado é o ângulo agudo $\hat{C} = arc\ sen\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \approx 25{,}7°$. Encontrada a medida do ângulo $\hat{C}$, nosso próximo passo será encontrar a medida do ângulo $\hat{B}$. Faremos isso a seguir, com o auxílio da seguinte relação:

$$120° + \hat{B} + arc\ sen\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 180° \Rightarrow \hat{B} = 60° - arc\ sen\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \approx 34{,}3°.$$

Encontrados os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, resta encontrarmos a medida *x* do lado *AC*. Podemos fazer isso com o auxílio da lei dos senos ou da lei dos cossenos, porém para que possamos trabalhar apenas com o ângulo notável, utilizaremos a lei dos cossenos no triângulo *ABC*. Desse modo, temos

$$12^2 = 6^2 + x^2 - 2 \times 6x \cos 120° \Rightarrow 144 = 36 + x^2 - 12x \times \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x^2 + 6x - 108 = 0,$$

O que implica, por Bhascara, em

$$x' = 3\left(\sqrt{13} - 1\right)\ e\ x" = 3(-\sqrt{13} - 1).$$

Observe que $3\left(-\sqrt{13} - 1\right) < 0$ e, portanto não pode ser a medida de *AC*, daí *AC* = $3(\sqrt{13} - 1)$*cm*. Assim, encontramos todos os elementos procurados. Esse processo pode ser aplicado em qualquer outro triângulo, no qual se deseje encontrar as medidas de dois ângulos e um lado, sendo conhecidas as medidas de dois lados e do ângulo oposto ao maior deles.

Com os exemplos anteriores finalizamos a seção 3.3 e, consequentemente, o capítulo 3, no qual apresentamos a lei dos senos, a lei dos cossenos e a funcionalidade das mesmas para encontrar medidas de lados e ângulos de triângulos quaisquer. No próximo capítulo apresentaremos uma abordagem sobre as relações trigonométricas em triângulos quaisquer com o auxílio de triângulos retângulos.

CAPÍTULO 4

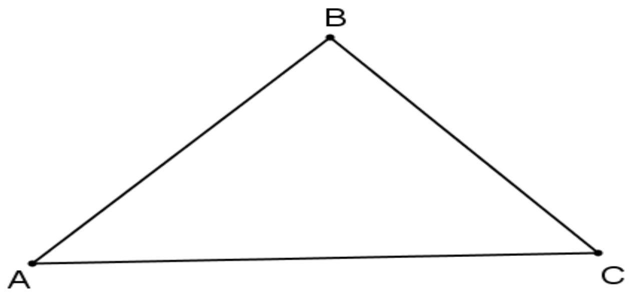
TRIGONOMETRIA NUM TRIÂNGULO QUALQUER VIA TRIÂNGULO RETÂNGULO

Neste capítulo, apresentaremos uma abordagem alternativa para a resolução de problemas envolvendo as relações trigonométricas em triângulos quaisquer. A abordagem utiliza triângulos retângulos, mais precisamente, o teorema de Pitágoras e as razões trigonométricas em triângulos retângulos. A proposta deste trabalho não é promover a substituição da abordagem tradicional pela nossa abordagem, mas sim, oportunizar ao alunado e professores de Matemática o conhecimento dos dois métodos distintos para resolver o mesmo tipo de problema.

A abordagem consiste em utilizar a ideia de que a partir de um triângulo não retângulo podemos obter dois triângulos retângulos por meio da altura relativa a um dos lados - conceito adotado pelos autores para demonstrar a lei dos senos e lei dos cossenos, que são as leis mais utilizadas para resolução de problemas sobre as relações trigonométricas em triângulos não retângulos. A abordagem será apresentada a seguir.

Abordagem proposta. Dado um triângulo *ABC* não retângulo, como o da Figura 31, podemos encontrar as medidas dos lados e ângulos desse triângulo seguindo os seguintes passos:

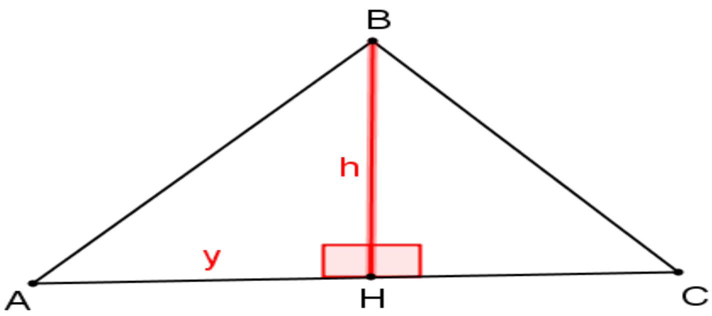
Figura 31: Triângulo ABC.



Passo 1: *Traçar a altura relativa a um dos lados do triângulo não retângulo ABC da Figura 31, obtendo dois triângulos retângulos. Essa altura deve ser escolhida de modo a manter o máximo possível dos dados conhecidos.*

Por exemplo, se conhecermos a medida do ângulo $\hat{A}$, podemos traçar a altura relativa ao vértice *B* ou *C*. Uma ilustração dessa situação aparece na Figura 32, quando traçamos a altura relativa ao vértice B, obtendo os triângulos retângulos *ABH* e *BCH.*

Figura 32: Passo 1**.**



Passo 2: *Utilizar as razões trigonométricas em um dos triângulos retângulos, resultantes do* ***Passo 1****, para encontrar a medida da altura e, quando necessário, outras medidas desse triângulo. Esse segundo passo deve ser aplicado no triângulo que possui um ângulo conhecido ou, em caso de não haver ângulos conhecidos, no triângulo que possui o ângulo que deseja-se encontrar.*

Na nossa ilustração, Figura 32, como supomos conhecer o ângulo $\hat{A}$, devemos aplicar o **Passo 2** no triângulo *ABH* encontrando assim, o valor de *h* e, se necessário, o valor de *y*.

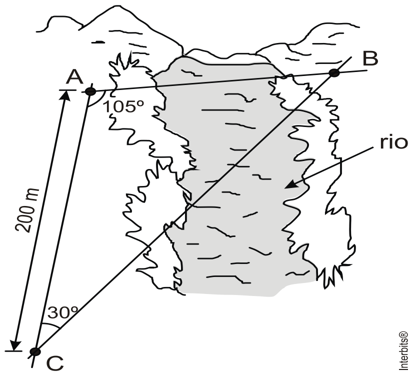
Passo 3: *Utilizar as razões trigonométricas em triângulos retângulos ou o teorema de Pitágoras no outro triângulo, resultante do Passo 1, para assim, obter a(s) medida(s) desejada(s).*

Na ilustração apresentada, devemos aplicar o **Passo 3** no triângulo *BCH* da Figura 32.

Observação: Se o triângulo *ABC* fosse retângulo, as razões trigonométricas em triângulos retângulos e o teorema de Pitágoras seriam suficientes para encontrar as medidas dos lados e ângulos que estivessem faltando.

Por conseguinte, a abordagem proposta pode resolver todos os problemas que geralmente são resolvidos com a lei dos senos e com a lei dos cossenos. Apresentaremos a seguir como se aplica o método sugerido, resolvendo novamente todos os exemplos apresentados no Capítulo 3 com a abordagem proposta.

Exemplo 1: (UFPB 2010) A prefeitura de certa cidade vai construir, sobre um rio que corta essa cidade, uma ponte que deve ser reta e ligar dois pontos, A e B, localizados nas margens opostas do rio. Para medir a distância entre esses pontos, um topógrafo localizou um terceiro ponto, C, distante 200*m* do ponto A e na mesma margem do rio onde se encontra o ponto A. Usando um teodolito (instrumento de precisão para medir ângulos horizontais e ângulos verticais, muito empregado em trabalhos topográficos), o topógrafo observou que os ângulos $B\hat{C}A$ e $C\hat{A}B$ mediam, respectivamente, 30º e 105º, conforme ilustrado na figura a seguir.



Com base nessas informações, é correto afirmar que a distância, em metros, do ponto A ao ponto B é de:

a) $200\sqrt{2}$

b) $180\sqrt{2}$

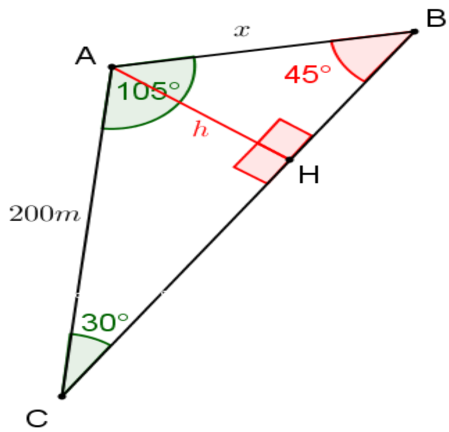
c) $150\sqrt{2}$

d) $100\sqrt{2}$

e) $50\sqrt{2}$

Solução: Observe a Figura 33.

Figura 33: Solução do Exemplo 1 do Capítulo 4



Nesta figura temos o triângulo *ABC* do Exemplo 1. Nosso objetivo é encontrar o valor do lado *AB*, ou seja, o valor de *x*. Para isso inicialmente notamos que o ângulo $\hat{B}$ = 45°, pois

$$105° + 30° + \hat{B} = 180° \Rightarrow \hat{B} = 45°.$$

Depois de observarmos a medida de tal ângulo, iremos aplicar a abordagem proposta neste trabalho. Para isso, devemos escolher um dos lados do triângulo *ABC* para traçar sua altura relativa, obtendo dois triângulos retângulos (Passo 1). Nesta situação, escolhemos o lado *BC*, como indicado na Figura 33, pois, com esta escolha, mantemos os ângulos de 30° e 45° e os lados *AC*, de medida conhecida, e *AB*, que estamos procurando. Após esta divisão, utilizaremos a razão trigonométrica seno no triângulo retângulo *ACH* para encontrar o valor de *h* (Passo 2). Faremos isso, como segue:

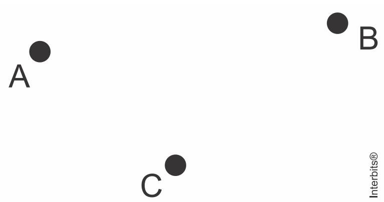
$$sen30° = \frac{h}{200} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{200} \Rightarrow 2h = 200 \Rightarrow h = 100.$$

Por fim, utilizaremos novamente o seno, só que agora no triângulo *ABH*, para encontrar a medida *x* do lado *AB* (Passo 3). Desse modo, temos que

$$sen45° = \frac{h}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{100}{x} \Rightarrow \sqrt{2}x = 200 \Rightarrow x = \frac{200}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{200\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 100\sqrt{2}.$$

Logo, a distância do ponto *A* ao ponto *B* é de $100\sqrt{2}\,m$ e, portanto, a alternativa correta é d).

Exemplo 2: (IFSUL 2015) Em certa cidade, a igreja está localiza no ponto A, a prefeitura no ponto B, e a livraria no ponto C, como mostra os pontos a seguir. Sabendo-se que a distância da igreja à prefeitura é de 10 metros, a distância da prefeitura à livraria corresponde a 15 metros, e que o ângulo formado por essas duas direções é 60°, a distância da livraria à igreja é



a) $17\sqrt{5}$ m

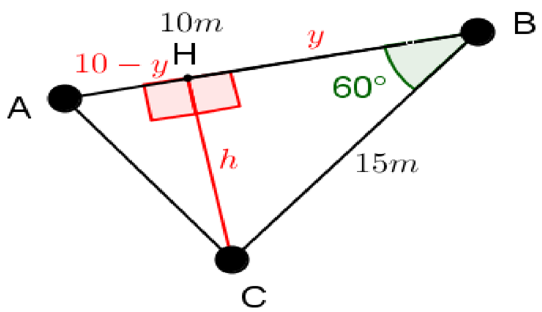
b) $5\sqrt{7}$ m

c) $25\sqrt{7}$ m

d) $7\sqrt{5}$ m

Solução. Observe a Figura 34.

Figura 34: Solução do Exemplo 2 do Capítulo 4



A situação descrita no Exemplo 2 está representada na Figura 34, na qual a distância procurada é a medida do lado *AC*. Para encontrar essa medida, iremos utilizar a abordagem proposta traçando a altura relativa ao lado *AB* e obtendo dois triângulos retângulos *ACH* e *BCH* (Passo 1), pois assim, preservamos o ângulo $\hat{B}$, único ângulo que conhecemos. Feita a divisão, utilizaremos inicialmente as razões trigonométricas no triângulo retângulo *BCH*, com o intuito de encontrar as medidas *h* e *y* (Passo 2). Faremos isso como segue:

$$sen60° = \frac{h}{15} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{15} \Rightarrow 2h = 15\sqrt{3} \Rightarrow h = \frac{15\sqrt{3}}{2};$$

e

$$cos60° = \frac{y}{15} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{15} \Rightarrow 2y = 15 \Rightarrow y = \frac{15}{2}.$$

Por fim, encontraremos a medida de *AC*, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo *ACH* (Passo 3)

$$AC^2 = h^2 + (10 - y)^2 \Rightarrow AC^2 = \left(\frac{15\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow AC^2 = \frac{675}{4} + \frac{25}{4} \Rightarrow AC^2 = \frac{700}{4},$$

ou ainda

$$AC^2 = 175 \Rightarrow AC = \sqrt{175} \Rightarrow AC = 5\sqrt{7}.$$

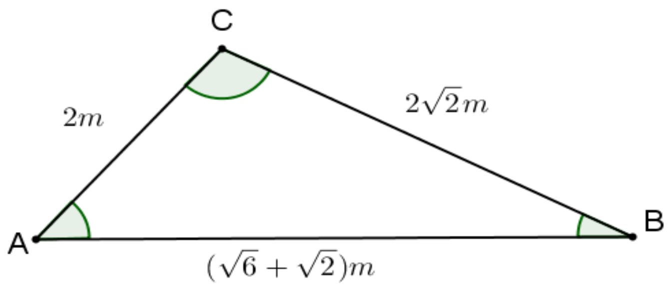
Logo a distância da livraria à igreja é de $5\sqrt{7}$ m e, portanto, a alternativa correta é a b).

Observação: No Exemplo 2, se tivéssemos traçado a altura relativa ao lado *BC*, em vez de *AB*, a solução seria análoga.

Exemplo 3. Encontrar todos os elementos de um triângulo *ABC*, sabendo que *AB* = *(*$\sqrt{6}$ + $\sqrt{2}$*) m*, *AC = 2 m* e *BC =* $2\sqrt{2}$ *m*.

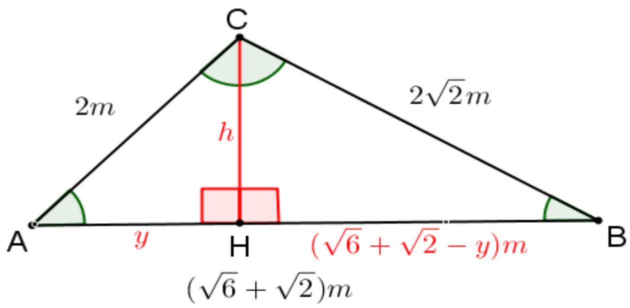
Solução: No Capítulo 3, vimos que este triângulo está totalmente determinado e o mesmo aparece na Figura 27, que reapresentaremos a seguir.

Figura 27: Solução do Exemplo 3 do Capítulo 3



Inicialmente encontraremos a medida do ângulo agudo $\hat{A}$ utilizando a abordagem proposta nessa pesquisa. Sabemos que esse ângulo é agudo, pois ele não está oposto ao maior lado do triângulo. Para isso, traçaremos a altura relativa ao lado *AB*, obtendo dois triângulos retângulos *ACH* e *BCH*, como mostra a Figura 35.

Figura 35: Solução do Exemplo 3 do Capitulo 4



Aplicando as relações trigonométricas no triângulo *ACH* da Figura 35, temos que

$$sen\hat{A} = \frac{h}{2} \Rightarrow h = 2sen\hat{A};$$

e

$$cos\hat{A} = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 2cos\hat{A}.$$

Assim, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *BCH* da Figura 35, segue que

$$\left(2\sqrt{2}\right)^2 = h^2 + \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}-y\right)^2 \Rightarrow 8 = \left(2sen\hat{A}\right)^2 + \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}-2cos\hat{A}\right)^2,$$

o que implica em

$$8 = 4sen^2\hat{A} + 8 + 4\sqrt{3} - 4\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)cos\hat{A} + 4cos^2\hat{A}.$$

Daí, obtemos

$$4\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)cos\hat{A} = 4\left(sen^2\hat{A} + cos^2\hat{A}\right) + 8 + 4\sqrt{3} - 8,$$

de onde vem

$$4\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)cos\hat{A} = 4 + 4\sqrt{3} \Rightarrow cos\hat{A} = \frac{4(\sqrt{3}+1)}{4\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)} \Rightarrow cos\hat{A} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}},$$

ou ainda

$$cos\hat{A} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6-2} \Rightarrow cos\hat{A} = \frac{2\sqrt{2}}{4} \Rightarrow cos\hat{A} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Logo $\hat{A} = 45°$. Encontrado a medida de $\hat{A}$, encontraremos agora, a medida do ângulo $\hat{B}$ utilizando o triângulo *BCH* da Figura 35, como segue:

$$\cos\hat{B} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-y}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-2\cos\hat{A}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Logo $\hat{B} = 30°$. Por fim encontraremos a medida do ângulo $\hat{C}$ com o auxílio da seguinte relação:

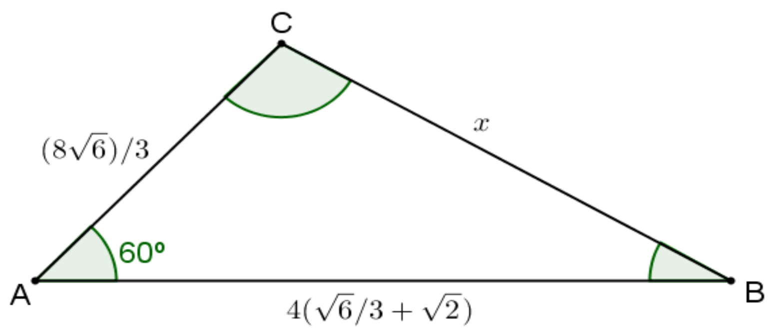
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \Rightarrow 45° + 30° + \hat{C} = 180° \Rightarrow \hat{C} = 105°.$$

Desse modo, encontramos todos os elementos procurados. Esse processo, assim como o utilizado no Capítulo 3, pode ser aplicado sempre que se deseje encontrar as medias dos ângulos de um triângulo, sendo conhecidas as medidas dos seus lados.

Exemplo 4. Encontrar todos os elementos de um triângulo *ABC*, sabendo que *AB* = $4\left(\frac{\sqrt{6}}{3} + \sqrt{2}\right)$ *cm*, AC = $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ cm e que $\hat{A}$ = 60°.

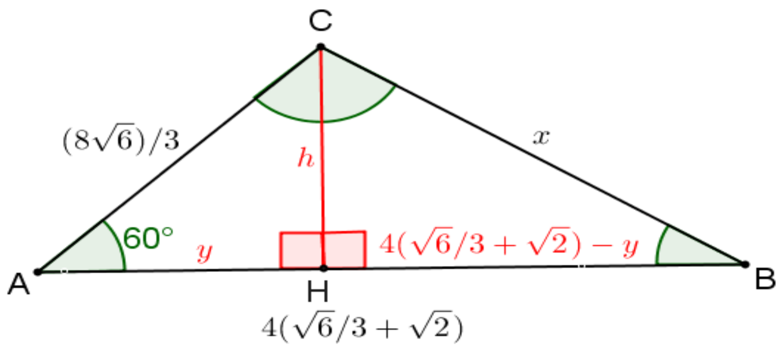
Solução: No Capítulo 3, vimos que este triângulo está totalmente determinado e o mesmo aparece na Figura 28, que reapresentaremos a seguir.

Figura 28: Solução do Exemplo 4 do Capítulo 3



Nessa situação, encontraremos inicialmente a medida *x* do lado *BC*. Utilizando a abordagem proposta, traçaremos a altura relativa ao lado *AB*, dividindo o triângulo *ABC* em dois triângulos retângulos *ACH* e *BCH*, como apresentado na Figura 36.

Figura 36: Solução do Exemplo 4 do Capitulo 4



Utilizando o triângulo *ACH* da Figura 36, temos que

$$sen60° = \frac{h}{\frac{8\sqrt{6}}{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3h}{8\sqrt{6}} \Rightarrow 6h = 24\sqrt{2} \Rightarrow h = 4\sqrt{2};$$

e

$$cos60° = \frac{y}{\frac{8\sqrt{6}}{3}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3y}{8\sqrt{6}} \Rightarrow 6y = 8\sqrt{6} \Rightarrow y = \frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

Utilizando agora, o teorema de Pitágoras no triângulo *BCH* da Figura 36, segue que

$$x^2 = h^2 + \left[4\left(\frac{\sqrt{6}}{3} + \sqrt{2}\right) - y\right]^2 \Rightarrow x^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{6}}{3} + 4\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{6}}{3}\right)^2 \Rightarrow x^2 = 32 + 32,$$

de onde vem

$$x^2 = 64 \ \Rightarrow x = \pm\, 8.$$

Como *x* é a medida do lado de um triângulo, temos que *x = 8* e portanto *BC = 8 cm*. Encontrada a medida do lado *BC*, encontraremos a seguir a medida do ângulo $\hat{B}$. Para isso utilizaremos o triângulo *BCH* da Figura 36, como segue:

$$sen\hat{B} = \frac{h}{x} = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Logo $\hat{B} = 45°$, pois a solução $\hat{B} = 135°$ está descartada já que $\hat{A} = 60°$. Por fim encontraremos a medida do ângulo $\hat{C}$ com o auxílio da seguinte relação:

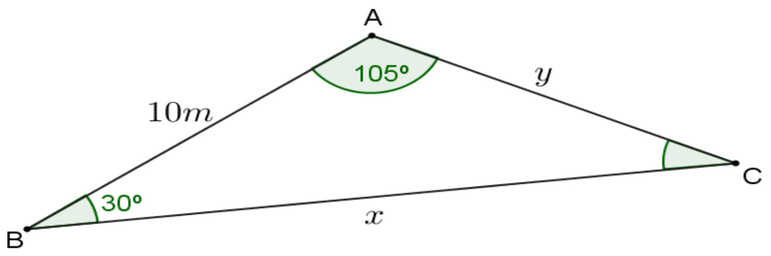
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \Rightarrow 60° + 45° + \hat{C} = 180° \Rightarrow \ \hat{C} = 75°.$$

Desse modo, encontramos todos os elementos procurados. Esse processo, assim como o utilizado no Capítulo 3, pode ser aplicado sempre que se deseje encontrar as medias de dois ângulos e um lado de um triângulo, sendo conhecidas as medidas de dois lados e do ângulo formado por eles.

Exemplo 5. Encontrar todos os elementos de um triângulo *ABC*, sabendo que $\hat{A}$ = *105°*, $\hat{B}$ = *30°* e *AB = 10 m*.

Solução. No Capítulo 3, vimos que este triângulo está totalmente determinado e o mesmo aparece na Figura 29, que reapresentaremos a seguir.

Figura 29: Solução do Exemplo 5 do Capítulo 3

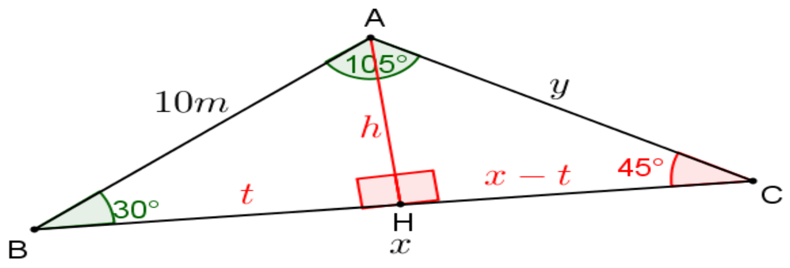


Nessa situação encontraremos inicialmente o valor do ângulo $\hat{C}$ com o auxílio da seguinte relação:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \Rightarrow 105° + 30° + \hat{C} = 180° \Rightarrow \hat{C} = 45°.$$

Encontrada a medida do ângulo $\hat{C}$, encontraremos a seguir as medidas *y* e *x* dos lados *AC* e *BC*, respectivamente. Utilizando a abordagem proposta, traçaremos a altura relativa ao lado BC, obtendo dois triângulos retângulos *ABH* e *ACH*, como apresentado na Figura 37.

Figura 37: Solução do Exemplo 5 do Capítulo 4



Do triângulo *ABH* da Figura 37, temos que

$$sen30° = \frac{h}{10} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{10} \Rightarrow 2h = 10 \Rightarrow h = 5;$$

e

$$cos30° = \frac{t}{10} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{t}{10} \Rightarrow 2t = 10\sqrt{3} \Rightarrow t = 5\sqrt{3}.$$

Assim, utilizando o triângulo *ACH* da Figura 37, temos que

$$sen45° = \frac{h}{y} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{y} \Rightarrow \sqrt{2}y = 10 \Rightarrow y = \frac{10}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2};$$

$$cos45° = \frac{x-t}{y} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x-5\sqrt{3}}{5\sqrt{2}} \Rightarrow 2x - 10\sqrt{3} = 10 \Rightarrow 2x = 10(1+\sqrt{3}),$$

o que implica em

$$x = 5(\sqrt{3}+1).$$

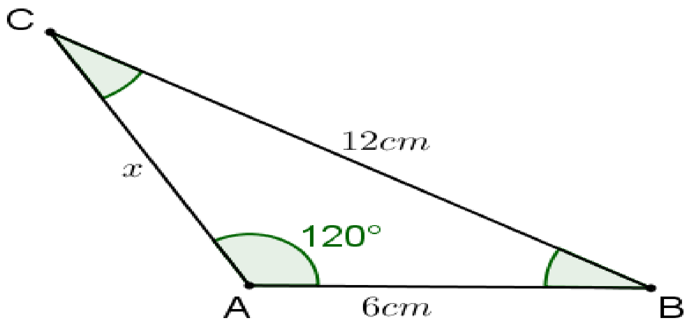
Logo $AC = 5\sqrt{2}m$ e $BC = 5(\sqrt{3}+1)m$.

Então, encontramos todos os elementos procurados. Esse processo, assim como o utilizado no Capítulo 3, pode ser aplicado sempre que se deseje encontrar as medidas de dois lados e um ângulo de um triângulo, sendo conhecidas as medidas de dois ângulos e do lado compreendido entre eles.

Exemplo 6. Encontre todos os elementos de um triângulo *ABC*, sabendo que *Â* = 120°, *BC = 12cm* e *AB = 6cm*.

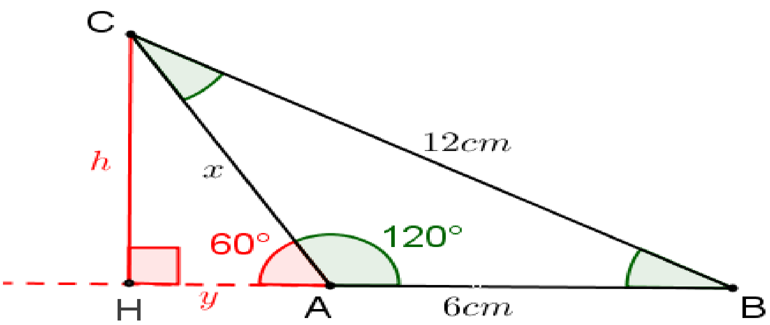
Solução. No Capítulo 3, vimos que este triângulo está totalmente determinado e o mesmo aparece na Figura 30, que reapresentaremos a seguir.

Figura 30: Solução do Exemplo 6 do Capítulo 3



Nessa situação, encontraremos inicialmente a medida *x* do lado *AC*. Aplicando a abordagem proposta, traçaremos a altura relativa ao lado *AB*, obtendo dois triângulos retângulos *ACH* e *BCH*, como indicado na Figura 38.

Figura 38: Solução do Exemplo 6 do Capítulo 4



Utilizando as relações trigonométricas no triângulo retângulo *ACH*, temos:

$$sen60° = \frac{h}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{x} \Rightarrow 2h = x\sqrt{3} \Rightarrow h = \frac{x\sqrt{3}}{2};$$

e

$$cos60° = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{x} \Rightarrow 2y = x \Rightarrow y = \frac{x}{2}.$$

Portanto, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo *BCH*, temos:

$$12^2 = h^2 + (6+y)^2 \Rightarrow 144 = \left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(6 + \frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow 144 = \frac{3x^2}{4} + 36 + 6x + \frac{x^2}{4},$$

o que implica em

$$x^2 + 6x - 108 = 0.$$

Utilizando a fórmula de Bhaskara, temos:

$$x' = 3\left(\sqrt{13} - 1\right)\ e\ x" = 3(-\sqrt{13} - 1).$$

Observe que $3\left(-\sqrt{13} - 1\right) < 0$ e, portanto, não pode ser a medida do lado *AC*, daí *AC* = $3(\sqrt{13} - 1)$cm.

Encontrada a medida *x* do lado *AC*, encontraremos agora a medida do ângulo $\hat{B}$. Para tal, podemos observar no triângulo retângulo *BCH* que:

$$sen\hat{B} = \frac{h}{12} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{12} = \frac{3(\sqrt{13} - 1)\sqrt{3}}{24} = \frac{\sqrt{39} - \sqrt{3}}{8}.$$

Logo $\hat{B} = arc\ sen\ \left(\frac{\sqrt{39}-\sqrt{3}}{8}\right) \approx 34{,}3°$. Por fim, encontraremos a medida do ângulo $\hat{C}$ com o auxílio da seguinte relação:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \Rightarrow 120° + arc\ sen\left(\frac{\sqrt{39} - \sqrt{3}}{8}\right) + \hat{C} = 180°,$$

o que implica em

$$\hat{C} = 60° - arc\ sen\left(\frac{\sqrt{39} - \sqrt{3}}{8}\right) \approx 25{,}7°.$$

Assim, encontramos todos os elementos procurados. Esse processo, assim como o utilizado no Capítulo 3, pode ser aplicado em qualquer outro triângulo, no qual se deseja encontrar as medidas de dois ângulos e um lado, sendo conhecidas as medidas de dois lados e do ângulo oposto ao maior deles.

Neste capítulo, reapresentamos os exemplos do Capítulo 3, porém resolvidos com a abordagem proposta. Vimos que com esta abordagem, podemos resolver a maioria dos problemas, utilizando apenas o teorema de Pitágoras e as razões trigonométricas em triângulos retângulos, que são resultados conhecidos pelos alunos desde o ensino fundamental. Porém o caso em que os três lados são conhecidos e precisamos encontrar um dos ângulos, utilizamos, além desses resultados, a relação fundamental da trigonometria.

O fato de possibilitar a resolução de problemas envolvendo triângulos quaisquer sem a introdução de novas fórmulas é a principal vantagem da abordagem proposta, que também, privilegia a compreensão e a reflexão dos conteúdos. No próximo capítulo, apresentaremos a pesquisa realizada com alunos da 2ª série do Ensino Médio de uma Escola Filantrópica do município de Andorinha – BA e de uma Escola Estadual do município de Petrolina – PE, sobre tal abordagem.

CAPÍTULO 5

APRESENTAÇÃO DA PROPOSTA E RESULTADOS OBTIDOS

Neste capítulo, apresentaremos a metodologia e a análise dos resultados da pesquisa realizada com alunos da 2ª série do Ensino Médio de duas Instituições de Ensino: uma Escola Filantrópica e uma Escola Estadual, localizadas, respectivamente, nos munícipios de Andorinha – BA e Petrolina – PE, sobre a abordagem proposta.

5.1. METODOLOGIA

De acordo com Gil (1991) a metodologia é a parte mais complexa de uma pesquisa. Nela, podemos considerar diversos itens, conforme a extensão e a complexidade da pesquisa.

Neste trabalho, a metodologia foi dividida em cinco tópicos: Abordagem da pesquisa, Tipo de pesquisa, Lócus da pesquisa, Sujeitos da pesquisa e Instrumentos de coleta dos dados.

5.1.1. ABORDAGEM DA PESQUISA

A pesquisa foi realizada no período de setembro de 2015 a janeiro de 2016 e foi dividida em duas etapas. A primeira, constituída da revisão bibliográfica, com intuito de conhecer o referencial concernente ao tema, proposta imprescindível para o desenvolvimento da pesquisa; a segunda, formada pela coleta dos dados, efetuada por oficina e questionário aplicados aos participantes, buscando apresentar a abordagem proposta neste trabalho, verificar o desempenho dessas pessoas com tal abordagem e averiguar a importância que elas atribuem a mesma. Diante disso, podemos afirmar que a pesquisa tem abordagem qualitativa, pois se utiliza da coleta e análise dos dados obtidos no ambiente dos sujeitos participantes. Creswell (2010) afirma que:

> A Pesquisa Qualitativa é um meio para explorar e para entender o significado que os indivíduos ou os grupos atribuem a um problema social ou humano. O processo de pesquisa envolve as questões e os procedimentos que emergem, os dados tipicamente coletados no ambiente do participante, a análise dos dados indutivamente construída a partir das particularidades para os temas gerais e as interpretações feitas pelo pesquisador acerca do significado dos dados. [...] (p. 26)

De acordo com Triviños (1987) a pesquisa qualitativa é descritiva, tendo o ambiente natural como fonte direta de dados e o pesquisador como instrumento chave, preocupando-se com o processo e não simplesmente com os resultados e o produto. Nesse tipo de abordagem os dados são analisados indutivamente e o significado é a preocupação essencial.

5.1.2. TIPO DE PESQUISA

Esta é uma Pesquisa Participante, a qual, Vianna (2001) afirma ser um tipo de pesquisa que busca informações sistemáticas, com o intuito de promover mudanças sociais, denunciar injustiças, buscando meios para mudar a situação detectada. Na Pesquisa Participante sempre há consequências políticas, pois o pesquisador assume um papel de ativista social. Noronha (2010; p. 155 apud Veiga, 1985) afirma que a Pesquisa Participante pode ser entendida como a “alternativa epistemológica, na qual, pesquisadores e pesquisados são sujeitos ativos da produção do conhecimento”.

A pesquisa realizada se encaixa perfeitamente nesse tipo de pesquisa, pois se preocupa com a formação matemática dos alunos integrantes da 2ª série do Ensino Médio. Trata-se, portanto, de uma preocupação relacionada ao ensino de Matemática, investigada por um aluno do PROFMAT da Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF, Campus de Juazeiro - BA. Com isso, partindo do pressuposto que a pesquisa visa uma conscientização sobre o tema e que o pesquisador é atuante na área estudada, podemos classificá-la como Participante.

5.1.3. LÓCUS DA PESQUISA

A pesquisa foi realizada em duas escolas que possuem a 2ª série do Ensino Médio. A primeira, uma Escola Filantrópica do Município de Andorinha-BA, mantida por uma instituição privada, na qual a maioria dos alunos é de família carente e todos eles possuem bolsa integral; e a segunda, uma Escola Estadual do Município de Petrolina-PE que atende alunos, na sua grande maioria, de famílias carentes do município.

5.1.4. SUJEITOS DA PESQUISA

André (2010) afirma que, na pesquisa qualitativa os dados são coletados através da descrição feita pelos sujeitos a respeito do tema estudado. Nesta perspectiva, o sujeito torna-se fundamental para o desenvolvimento de pesquisas desse tipo.

O presente estudo teve como critério para escolha dos sujeitos a participação dos mesmos como alunos da 2ª série do Ensino Médio nas escolas escolhidas. A participação nesta pesquisa foi facultativa aos alunos, de modo que, 25 alunos da Escola Filantrópica de Andorinha – BA e 26 alunos da Escola Estadual de Petrolina – PE aceitaram o convite para participar da mesma. Desse modo, tivemos ao todo 51 sujeitos que contribuíram para a realização deste trabalho, quantidade é razoavelmente pequena, porém ideal para a pesquisa. Todos os discentes responderam ao questionário, assegurando a validade dos dados coletados e tendo garantida a identificação preservada e oculta.

5.1.5. INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS

De acordo com Gressler (1989; p.71) “uma das fases importantes da pesquisa é a determinação de como serão coletados os dados e informações necessárias para testar a hipótese”. Para realização desse estudo foram escolhidos a oficina (Ver sequência didática no APÊNDICE B) - aplicada aos sujeitos participantes, no período de 12 à 19 de Novembro de 2015. Foram realizados dois encontros com duas horas de duração cada, nos quais, foram feitas, por meio de aulas expositivas, uma breve revisão sobre o teorema de Pitágoras e as relações trigonométricas em triângulos retângulos, bem como a apresentação da abordagem proposta em nosso trabalho e a utilização da mesma para resolução de exemplos sobre relações trigonométricas em triângulos quaisquer, encontrados nos livros didáticos do ensino médio. Além disso, foi aplicado o questionário (APÊNDICE A), principal instrumento, no período de 24 à 27 de Novembro de 2015, contendo exemplos similares aos das oficinas e questões sobre a opinião dos alunos com relação ao método aplicado.

As aplicações das oficinas e do questionário foram feitas nas próprias instituições de ensino dos sujeitos desta pesquisa.

A opção pelo questionário sucedeu por ser um instrumento onde os alunos podem expressar suas opiniões com livre-arbítrio. Gressler (1989) afirma que provavelmente a maior vantagem do questionário seja sua versatilidade, pois o anonimato existente nesse instrumento assegura maior liberdade aos sujeitos de expressar suas opiniões.

5.2. ANÁLISE DOS RESULTADOS

A análise dos dados é uma das partes mais importantes da pesquisa cientifica. Castro (2006) afirma que essa é a parte central da pesquisa, que sobreviverá ou afundará dependendo do que o pesquisador consiga fazer nessa fase. Se a análise dos dados é falha, o restante do trabalho perde o sentido, a introdução é inútil e as conclusões não se seguem.

Nesse trabalho, analisaremos os dados coletados pelo questionário aplicado aos alunos da 2ª série do ensino médio de uma escola filantrópica do município de Andorinha – BA e de uma escola estadual do município de Petrolina – PE. A análise dos dados será dívida em duas partes: Questões sobre relações trigonométricas em triângulos quaisquer e questões sobre a opinião dos alunos. Em virtude da facilidade de leitura, as questões serão transcritas conforme questionário aplicado, seguido das suas respectivas respostas pela abordagem proposta e pela abordagem tradicional além dos resultados obtidos pelos entrevistados e da análise efetuada.

5.2.1. ANÁLISE DAS QUESTÕES SOBRE RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM TRIÂNGULOS QUAISQUER

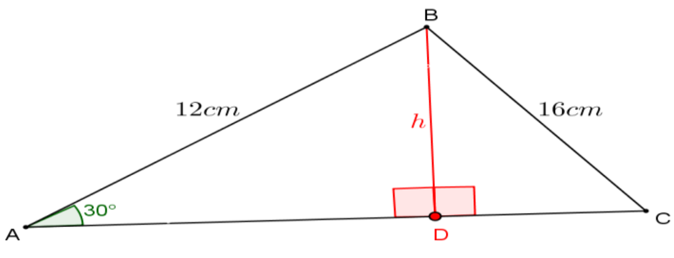
Para a análise dos resultados obtidos pelos alunos nessas questões, utilizamos quatro categorias. As quais serão descritas a seguir: A categoria 1, composta pelos alunos que acertaram completamente a questão; a categoria 2, formada pelos alunos que aplicaram a abordagem corretamente, mas que erraram contas ou manipulações algébricas; a categoria 3, com os alunos que conseguiram utilizar um dos triângulos retângulos corretamente, mas não utilizaram ou utilizaram erradamente o outro; por fim, a categoria 4, onde estarão os alunos que não concluíram nenhum dos triângulos ou erraram completamente a questão ou ainda que as deixaram em branco.

A seguir apresentamos a análise dos resultados obtidos com cada questão separadamente.

Questão 1: No triângulo ABC, temos que as medidas dos lados AB e BC são, respectivamente 12cm e 16cm e a medida do ângulo Â é 30º. Desse modo, qual o valor do sen(Ĉ)?

Solução 1. Utilizando a abordagem proposta no trabalho, montaremos o triângulo *ABC* e traçaremos a altura relativa ao lado *AC*, pois desse modo, mantemos o ângulo conhecido e o ângulo que queremos encontrar o seno. Um esboço dessa situação aprece na Figura 39.

Figura 39: Solução da Questão 1.



Utilizaremos inicialmente o triângulo *ABD* da Figura 39 para encontrar o valor de *h*. Faremos isso como segue:

$$sen\ 30° = \frac{h}{12} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{12} \Rightarrow 2h = 12 \Rightarrow h = 6cm.$$

Daí, a partir do triângulo *BCD*, temos:

$$sen\ (\hat{C}) = \frac{h}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

Solução 2. Utilizando a lei dos senos no triângulo ABC da Figura 39, temos:

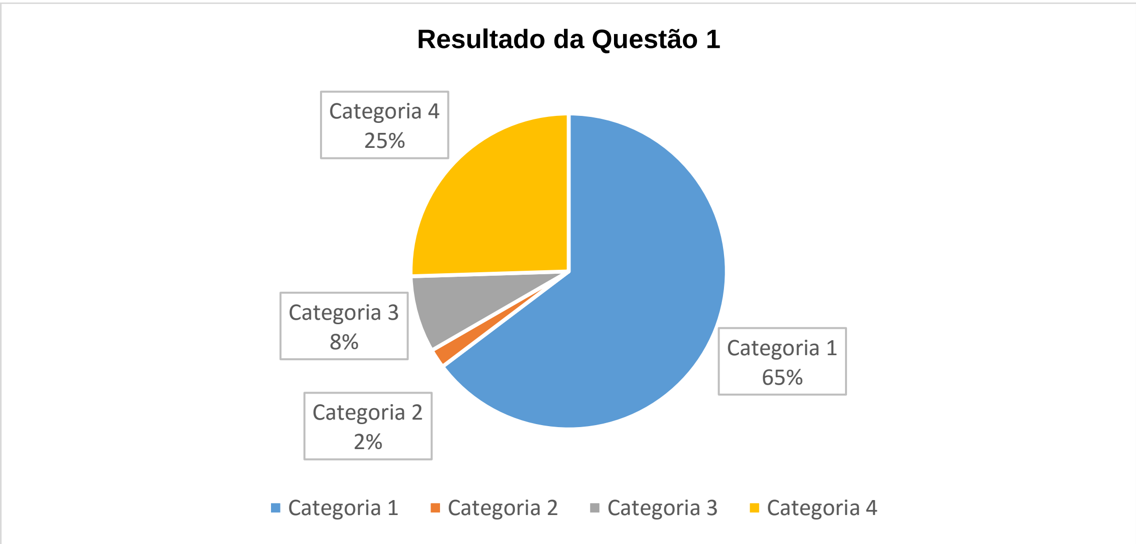
$$\frac{16}{sen\ 30°} = \frac{12}{sen\ (\hat{C})} \Rightarrow \frac{16}{\frac{1}{2}} = \frac{12}{sen\ (\hat{C})} \Rightarrow 16sen\ (\hat{C}) = 6 \Rightarrow sen\ (\hat{C}) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

Os resultados obtidos pelos alunos nesta questão aparecem no Quadro 2 e no gráfico da Figura 40.

Quadro 2: Resultado da Questão 1.

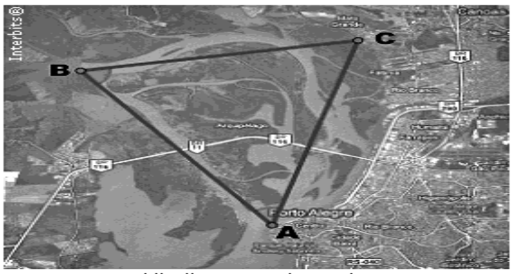
Categoria	Número de alunos
1	33
2	1
3	4
4	13

Figura 40: Gráfico 1.



Os resultados obtidos pelos alunos com esta questão foram muito bons, pois 67% dos alunos ficaram nas categorias 1 ou 2, que são as categorias, nas quais, os alunos demonstram ter compreendido perfeitamente a abordagem proposta. Além disso, 8% dos alunos conseguiram aplicar a ideia inicial de traçar a altura relativa a um dos lados e encontrar medidas em um dos triângulos retângulos resultantes, deixando a desejar apenas na transição dos dados de um triângulo para o outro, fato este, que pode ser superado com a apresentação de mais algumas aulas sobre a abordagem proposta.

Questão 2: **(UFSM 2011, adaptada) A figura a seguir apresenta o delta do rio Jacuí, situado na região metropolitana de Porto Alegre. Nele se encontra o parque estadual Delta do Jacuí, importante parque de preservação ambiental. Sua proximidade com a região metropolitana torna-o suscetível aos impactos ambientais causados pela atividade humana.**

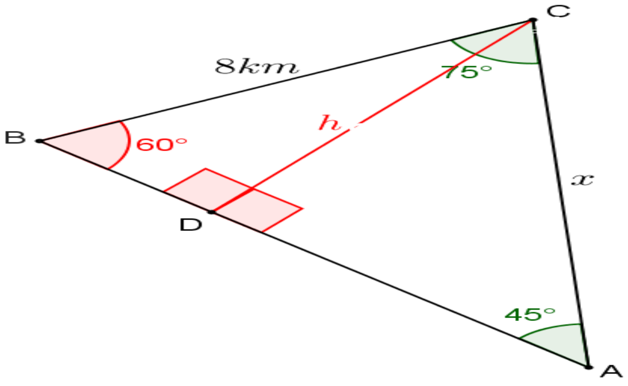


http://maps.google.com.br

A distância do ponto B ao ponto C é de 8 km, o ângulo $\hat{A}$ mede 45° e o ângulo $\hat{C}$ mede 75°. Uma maneira de estimar quanto do Delta do Jacuí está sob influência do meio urbano é dada pela distância do ponto A ao ponto C. Qual é esta distância em quilômetros?

Solução 1. Utilizando a abordagem proposta neste trabalho, primeiro observamos que o ângulo localizado no vértice *B* mede 60°, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°. Depois dessa observação temos que traçar a altura relativa ao lado *AB*, pois assim mantemos os ângulos conhecidos, facilitando nosso trabalho. Fazendo isso, obtemos a Figura 41.

Figura 41: Solução da Questão 2.



Utilizaremos, inicialmente, o triângulo *BCD* da Figura 41, para encontrar o valor da altura *h*, como segue:

$$sen\ 60° = \frac{h}{8} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{8} \Rightarrow 2h = 8\sqrt{3} \Rightarrow h = 4\sqrt{3}\ Km.$$

Então, a partir do triângulo *ACD*, temos:

$$sen\ 45° = \frac{h}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{x} \Rightarrow \sqrt{2}\,x = 8\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{8\sqrt{6}}{2} = 4\sqrt{6}\ Km.$$

Logo, a distância do ponto *A* ao ponto *C* é de $4\sqrt{6}\ km$.

Solução 2. Na solução 1, já vimos que o ângulo localizado no vértice *B* mede 60°. Daí utilizando a lei dos senos no triângulo *ABC* da Figura 41, temos:

$$\frac{x}{sen\ 60°} = \frac{8}{sen\ 45°} \Rightarrow \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \frac{2x}{\sqrt{3}} = \frac{16}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2\sqrt{2}\,x = 16\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{16\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},$$

o que implica em

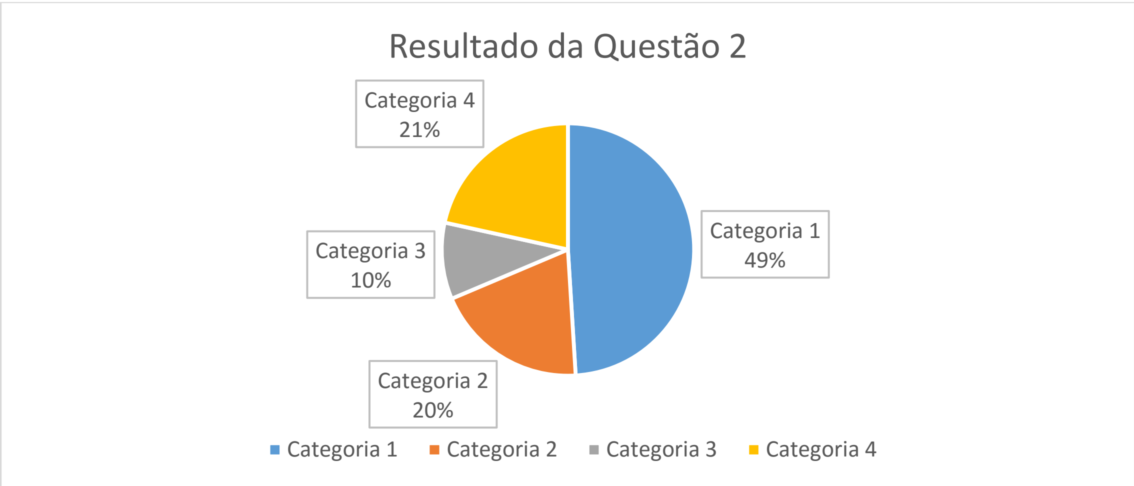
$$x = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{8\sqrt{6}}{2} \Rightarrow x = 4\sqrt{6}\ Km.$$

Logo, a distância do ponto *A* ao ponto *C* é de $4\sqrt{6}\ km$.

O Quadro 3 e o gráfico da Figura 42, demonstram os resultados obtidos pelos alunos nesta questão.

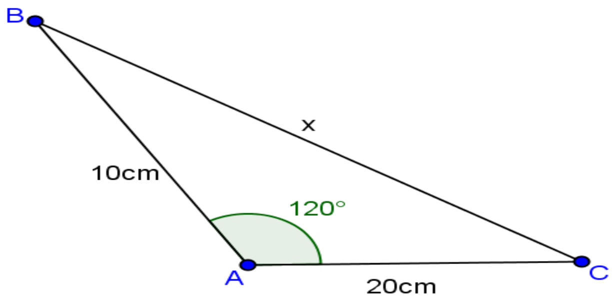
Quadro 3: Resultado da Questão 2.	
Categoria	Número de alunos
1	25
2	10
3	5
4	11

Figura 42: Gráfico 2.



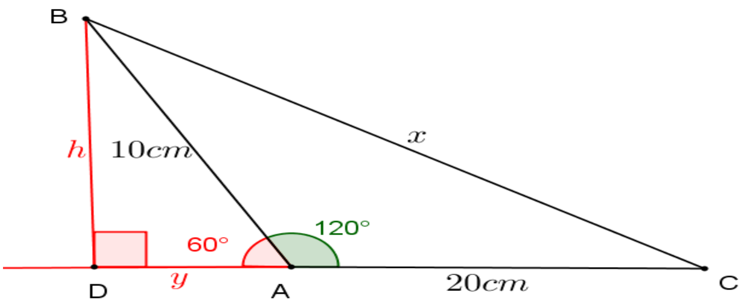
Percebe-se que, nesta questão, os resultados alcançados, também foram muito bons, pois tivemos 69% dos alunos nas categorias 1 ou 2, com um aumento, em relação aos resultados da questão anterior, na quantidade de alunos da categoria 2, possivelmente devido à dificuldade dos alunos em racionalizar frações. Além disso, percebe-se uma queda no percentual de alunos das categorias 3 e 4, o que indica, que a causa de alguns alunos não conseguirem desenvolver a questão anterior não foi a falta de conhecimento total do método.

Questão 3: **Na figura abaixo, determine a medida x do lado BC.**



Solução 1. Utilizando a abordagem proposta, devemos prolongar o lado *AC* e obter a altura relativa ao mesmo, formando a Figura 43.

Figura 43: Solução da Questão 3.



A partir da Figura 43 podemos utilizar o triângulo *ABD* para encontrarmos os valores de *h* e *y*. Faremos da seguinte forma:

$$sen\ 60° = \frac{h}{10} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{10} \Rightarrow 2h = 10\sqrt{3} \Rightarrow h = \frac{10\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = 5\sqrt{3}\ cm;$$

e

$$\cos 60° = \frac{y}{10} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{10} \Rightarrow 2y = 10 \Rightarrow y = \frac{10}{2} \Rightarrow y = 5\ cm.$$

Desse modo, observando o triângulo *BCD*, temos que *BD* = $5\sqrt{3}$, *CD* = *25* e *BC* = *x*. Sendo assim, aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$x^2 = (5\sqrt{3})^2 + 25^2 \Rightarrow x^2 = 75 + 625 \Rightarrow x^2 = 700 \Rightarrow x = \sqrt{700} \Rightarrow x = 10\sqrt{7}.$$

Logo $x = 10\sqrt{7}\ cm.$

Solução 2. Aplicando a lei dos cossenos no triângulo *ABC* da Figura 43, obtemos:

$$x^2 = 10^2 + 20^2 - 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \cos 120° \Rightarrow x^2 = 100 + 400 - 400 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right),$$

de onde vem

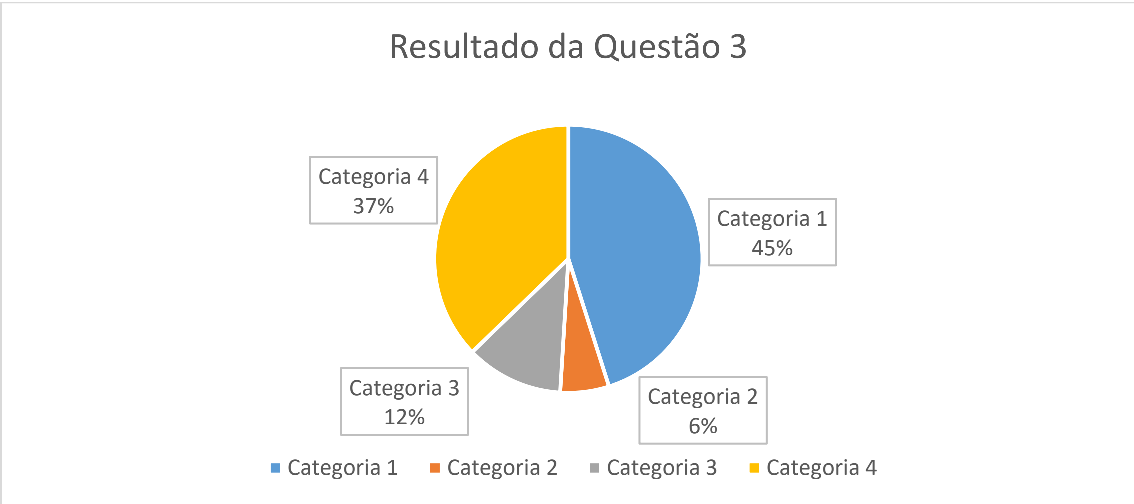
$$x^2 = 500 + 200 \Rightarrow x^2 = 700 \Rightarrow x = \sqrt{700} \Rightarrow x = 10\sqrt{7}.$$

Logo, $x = 10\sqrt{7}\ cm.$

O Quadro 4 e o gráfico da Figura 44, ilustram os resultados obtidos pelos alunos com esta questão.

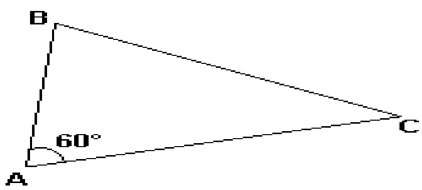
Quadro 4: Resultado da Questão 3.	
Categoria	Número de alunos
1	23
2	3
3	6
4	19

Figura 44: Gráfico 3.



Percebe-se que nesta questão o desempenho dos alunos caiu um pouco em relação as questões anteriores, porém continuaram bons, pois mais da metade dos alunos se enquadraram nas categorias 1 ou 2, além de termos ainda 12% na categoria 3. De acordo com os dados coletados, percebemos ainda um aumento significativo na categoria 4, em relação a mesma categoria nas questões anteriores. Tal aumento pode ter ocorrido devido a necessidade de prolongar o lado e traçar a altura, único modo de manter preservados os dados da questão, ou ainda, pela necessidade de obter a medida do segmento *DC*, a partir da soma das medidas dos segmentos *DA* e *AC*.

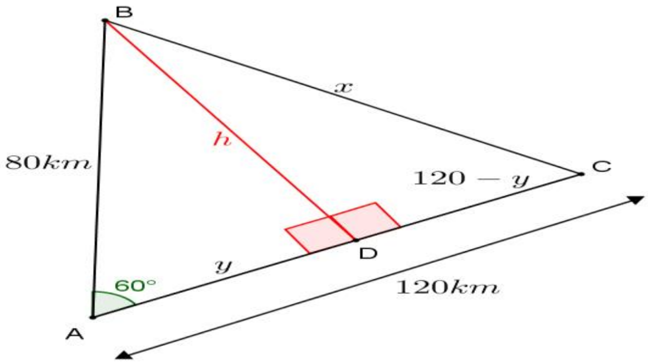
Questão 4: **(UNIRIO 1999, adaptada)**



Deseja-se medir a distância entre duas cidades B e C sobre um mapa, sem escala. Sabe-se que AB = 80 km e AC = 120 km, onde A é uma cidade conhecida, como mostra a figura anterior. Calcule, em quilômetros, a distância entre B e C.

Solução 1. Utilizando a abordagem proposta, traçaremos a altura relativa ao lado *AC*, pois assim manteremos o ângulo conhecido e um dos lados conhecidos (Nesse caso, se traçássemos a altura relativa ao lado *AB*, teríamos algo semelhante). Um esboço do que foi citado acima aparece na Figura 45.

Figura 45: Solução da Questão 4.



Utilizaremos inicialmente o triângulo *ABD* para encontrarmos o valor de *y* e *h*. Faremos isso como segue:

$$\cos 60° = \frac{y}{80} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{80} \Rightarrow 2y = 80 \Rightarrow y = \frac{80}{2} \Rightarrow y = 40\ Km;$$

e

$$sen\ 60° = \frac{h}{80} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{80} \Rightarrow 2h = 80\sqrt{3} \Rightarrow h = \frac{80\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = 40\sqrt{3}\ Km.$$

Assim, teremos no triângulo *BCD* que *CD* = *80*, *BD* = *40*$\sqrt{3}$ e *BC* = *x*. Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$x^2 = 80^2 + \left(40\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow x^2 = 6400 + 4800 \Rightarrow x^2 = 11200 \Rightarrow x = \sqrt{11200},$$

o que implica em

$$x = 40\sqrt{7}.$$

Logo, a distância entre *B* e *C* é de $40\sqrt{7}\ Km$.

Solução 2. Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ABC da Figura 45, temos:

$$x^2 = 80^2 + 120^2 - 2 \cdot 80 \cdot 120 \cdot \cos 60° \Rightarrow x^2 = 6400 + 14400 - 19200 \cdot \frac{1}{2},$$

de onde vem

$$x^2 = 20800 - 9600 \Rightarrow x^2 = 11200 \Rightarrow x = \sqrt{11200} \Rightarrow x = 40\sqrt{7}.$$

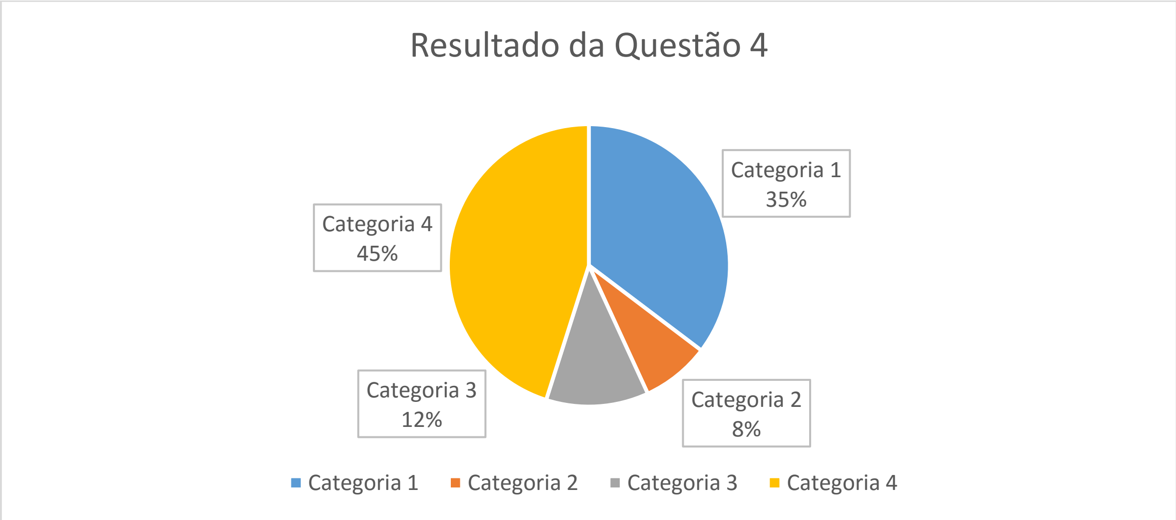
Logo a distância entre B e C é de $40\sqrt{7}\ Km$.

Os resultados obtidos pelos participantes nesta questão aparecem no Quadro 5 e no gráfico da Figura 46.

Quadro 5: Resultado da Questão 4.

Categoria	Número de alunos
1	18
2	4
3	6
4	23

Figura 46: Gráfico 4.

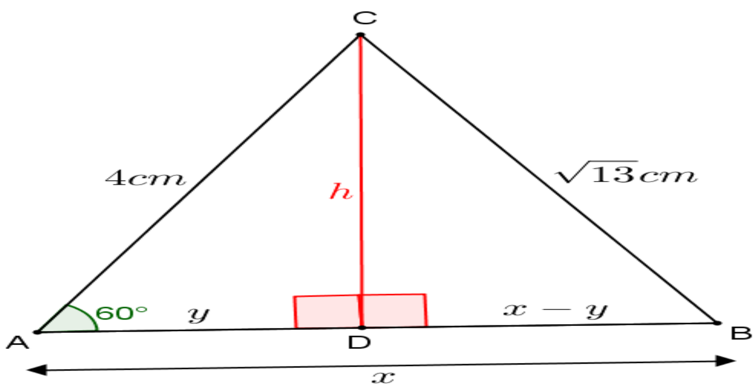


De acordo com os dados do Quadro 5 e do gráfico da Figura 46, percebemos que houve uma queda, em relação as questões anteriores, no desempenho dos alunos, porém continuamos com resultados significantes, pois tivemos 43% dos participantes nas categorias 1 ou 2, além de 12% na categoria 3. Além do exposto, tivemos ainda, outro aumento significativo, em relação às questões anteriores, no número de alunos que deixaram a questão em branco e consequentemente no percentual de participantes na categoria 4. Percebe-se ainda que, mesmo esta questão sendo semelhante a anterior, o desempenho dos alunos foi um pouco inferior à mesma.

Questão 5: **(CFTRJ 2014) Considerando que ABC é um triângulo tal que** $AC = 4\text{ cm}, BC = \sqrt{13}\text{ cm}$ **e** $\hat{A} = 60°$, **calcule os possíveis valores para a medida do lado AB.**

Solução 1. Para resolver essa questão pelo método proposto neste trabalho, inicialmente construiremos dois triângulos, pois temos duas possibilidades para *ABC* como indica o enunciado. Na primeira situação, temos que o ângulo $\hat{B}$ é agudo, como indicado na Figura 47 onde traçamos a altura relativa ao lado *AB*, pois assim manteremos o ângulo e os lados conhecidos do triângulo *ABC*.

Figura 47: Solução da Questão 5



Para encontrar o valor do lado *AB*, inicialmente iremos calcular os valores de *h* e *y*. Para isso utilizaremos o triângulo *ACD*, como segue:

$$sen\ 60° = \frac{h}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{4} \Rightarrow 2h = 4\sqrt{3} \Rightarrow h = \frac{4\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = 2\sqrt{3}\ cm;$$

e

$$\cos 60° = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{4} \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{2} \Rightarrow y = 2\ cm.$$

Portanto, podemos observar que no triângulo *BCD*, temos $CD = 2\sqrt{3}$, $BD = x - 2$ e $BC = \sqrt{13}$. Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$(\sqrt{13})^2 = (x-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow 13 = x^2 - 4x + 4 + 12 \Rightarrow x^2 - 4x + 16 - 13 = 0,$$

o que implica em

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Aplicando a fórmula de Bhaskara, temos:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \Rightarrow x = \frac{4 \pm 2}{2},$$

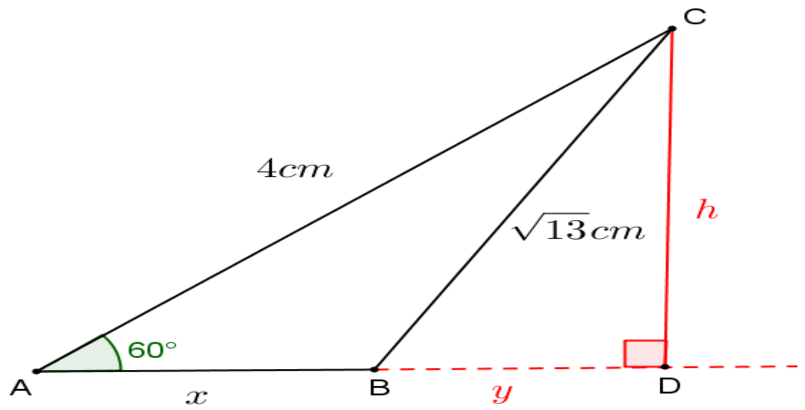
ou ainda

$$x' = \frac{4+2}{2} = 3 \; e \; x" = \frac{4-2}{2} = 1. \qquad (1)$$

Logo, como *x = 1* não convém, pois *y = 2,* temos que a medida do lado *AB* nessa situação é *3 cm*.

Na segunda situação, temos que o ângulo $\hat{B}$ é obtuso, como indicado na Figura 48, onde traçamos a altura relativa ao lado *AB*, pois assim manteremos o ângulo e os lados conhecidos do triângulo *ABC*.

Figura 48: Solução da Questão 5 II



Nessa situação, encontraremos inicialmente o valor de *h.* Faremos isso, aplicando a razão trigonométrica seno no triângulo *ACD* da Figura 48, como segue:

$$sen\, 60° = \frac{h}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{4} \Rightarrow 2h = 4\sqrt{3} \Rightarrow h = 2\sqrt{3}\, cm.$$

Encontrado o valor de *h*, aplicaremos o teorema de Pitágoras no triângulo *BCD* para descobrir o valor de *y*. Faremos isso a seguir:

$$(\sqrt{13})^2 = h^2 + y^2 \Rightarrow 13 = (2\sqrt{3})^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = 13 - 12 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1} \Rightarrow y = \pm 1.$$

Como *y* representa uma medida o – 1 não convém, daí *y = 1cm*.

Por fim, para determinarmos o valor de *x*, aplicaremos o teorema de Pitágoras no triângulo *ADC.* Faremos isso a seguir:

$$4^2 = h^2 + (x+y)^2 \Rightarrow 16 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + (x+1)^2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 + 12 - 16 = 0,$$

ou ainda

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Utilizando a fórmula de Bhaskara, temos:

$$x' = 1 \; e \; x" = -3.$$

Como *x* é uma medida, temos que o – 3 não convém e portanto, a medida do lado *AB* nessa situação é *AB = 1cm.*

Logo, as possíveis medidas para o lado *AB* são *1 cm* e *3 cm*.

Solução 2. Na solução dois é indiferente o ângulo $\hat{B}$ ser agudo ou obtuso, desse modo, utilizando a lei dos cossenos no triângulo *ABC* da Figura 47 ou da Figura 48, temos:

$$(\sqrt{13})^2 = x^2 + 4^2 - 2 \cdot x \cdot 4 \cdot \cos 60° \Rightarrow 13 = x^2 + 16 - 8x \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow 13 = x^2 + 16 - 4x,$$

de onde vem

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

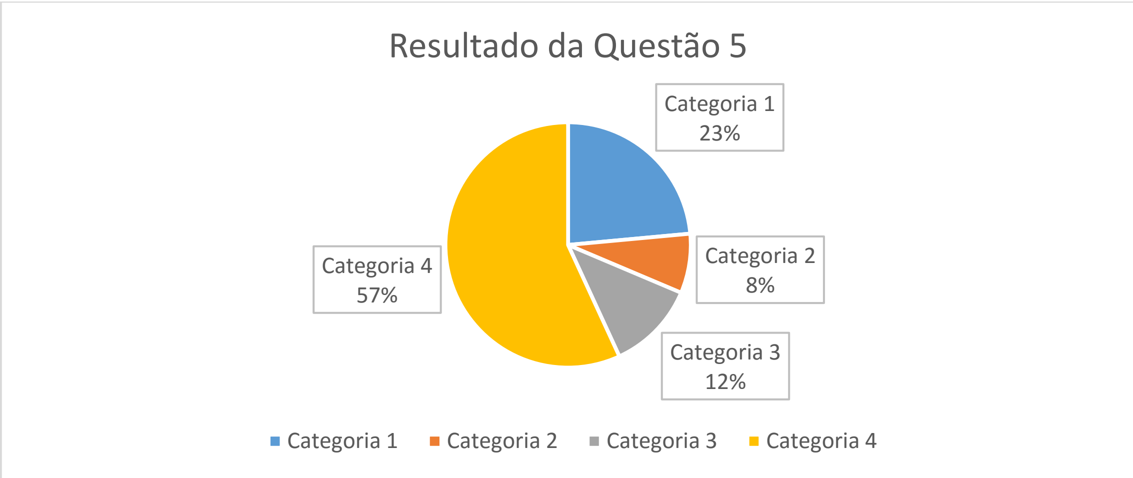
Daí, por (1), temos que x’ = 1 e x” = 3. Logo os possíveis valores para *AB* são *1 cm* e *3 cm*.

O Quadro 6 e o gráfico da Figura 49, ilustram os resultados obtidos pelo alunado nesta questão.

Quadro 6: Resultado da Questão 5.

Categoria	Número de alunos
1	12
2	4
3	6
4	29

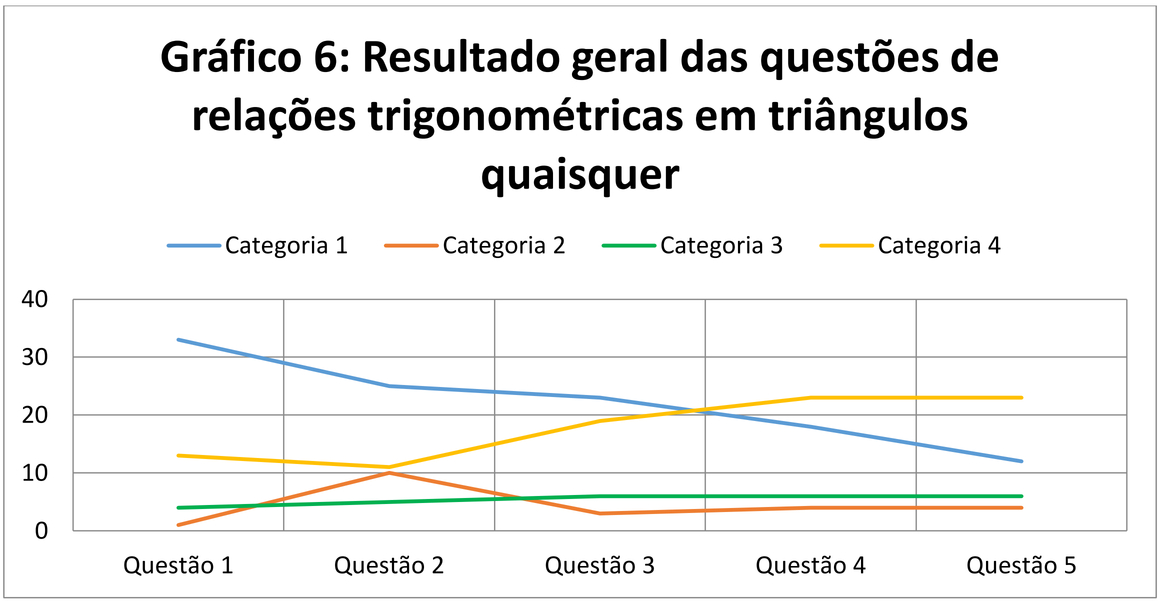
Figura 49: Gráfico 5.



De acordo com os dados do gráfico da Figura 49, percebemos outro aumento, em relação às questões anteriores, no número de alunos que não responderam a questão, e consequentemente no número de alunos na categoria 4. Tal aumento pode ter ocorrido pela necessidade de dividir o lado que se deseja encontrar, única forma de manter preservados os dados da questão; por haver a possibilidade de mais de uma medida para o mesmo segmento; e/ou pela necessidade do desenvolvimento do quadrado da diferença e do quadrado da soma de dois termos.

A seguir, mostraremos na Figura 50 um gráfico que ilustra os resultados obtidos pelos participantes em todas as questões de acordo com as categorias citadas anteriormente.

Figura 50: Gráfico 6.



A partir da análise das resoluções apresentadas pelos participantes, podemos considerar que os resultados obtidos foram satisfatórios, pois a maioria dos alunos conseguiram aplicar corretamente a abordagem proposta nas três primeiras questões, ficando nas categorias 1 ou 2, conforme Figura 50. Nas duas últimas questões, houve uma queda no número de alunos nessas categorias, porém consideramos que o mesmo se manteve significativo, pois em se tratando de uma abordagem alternativa, demonstrou poder ajudar os alunos a melhorar o seu rendimento no estudo das relações trigonométricas em triângulos quaisquer.

5.2.2. ANÁLISE DAS QUESTÕES SOBRE A OPINIÃO DOS ALUNOS

Questão 1: **Você acha interessante para sua formação diminuir o número excessivo de fórmulas no ensino de matemática?**

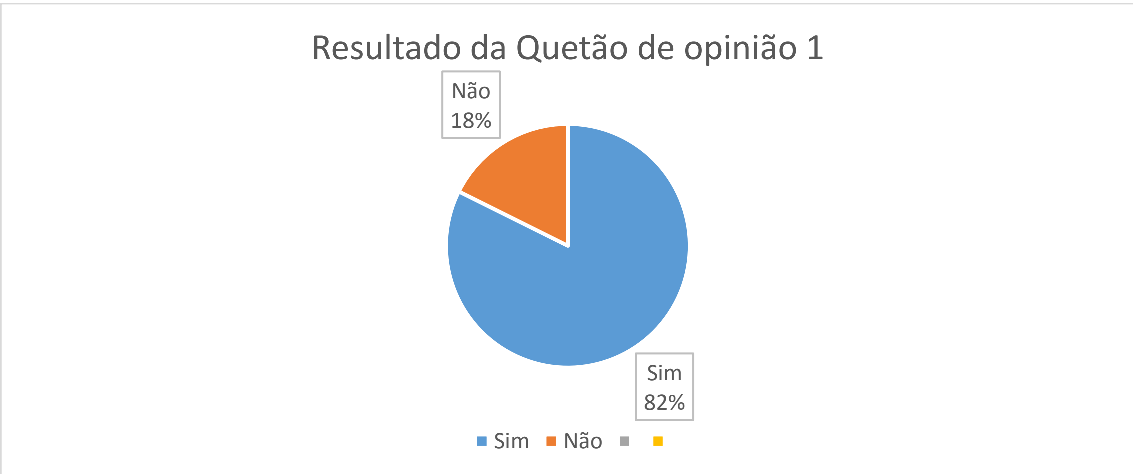
(   ) Sim   (   ) Não

Os resultados obtidos a respeito deste questionamento aparecem no Quadro 7 e no gráfico da Figura 51 a seguir.

Quadro 7: Resultado da Questão de opinião 1

Resposta	Número de alunos
Sim	42
Não	9

Figura 51: Gráfico 7.



Com este questionamento pretendíamos verificar se o grande número de fórmulas no estudo de matemática incomodava ou não o alunado. De acordo com os dados coletados, percebe-se que 82% dos alunos acham interessante diminuir o número de fórmulas trabalhadas no ensino de matemática e um caminho para tal diminuição pode ser a opção por métodos intuitivos como o exposto neste trabalho.

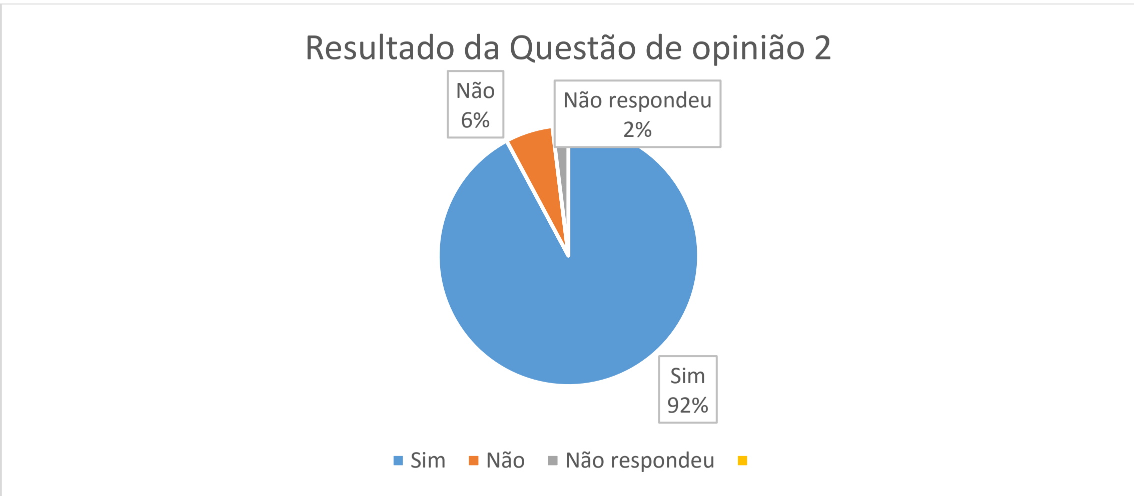
***Questão 2:* Você acha interessante para sua formação conhecer dois modos distintos (lei dos senos e lei dos cossenos; e o método apresentado na oficina) para resolução do mesmo tipo de questão?**

(   ) Sim   (   ) Não

O Quadro 8 e o gráfico da Figura 52 ilustram as respostas dos alunos sobre tal questionamento.

Quadro 8: Resultado da Questão de opinião 2	
Resposta	Número de alunos
Sim	47
Não	3
Não respondeu	1

Figura 52: Gráfico 8.



Com essa pergunta, pretendíamos verificar se os alunos participantes acham interessante ou não para sua formação conhecer duas maneiras distintas para resolver o mesmo tipo de questão. Os resultados obtidos, como já esperávamos, foram expressivos, pois 92% do alunado acham que sim. Tais resultados mostram que os sujeitos desta pesquisa concordam que ter a oportunidade de conhecer mais de uma maneira de abordar um assunto de matemática pode ser uma das chaves para melhorar o desempenho dos alunos ao estudar a disciplina.

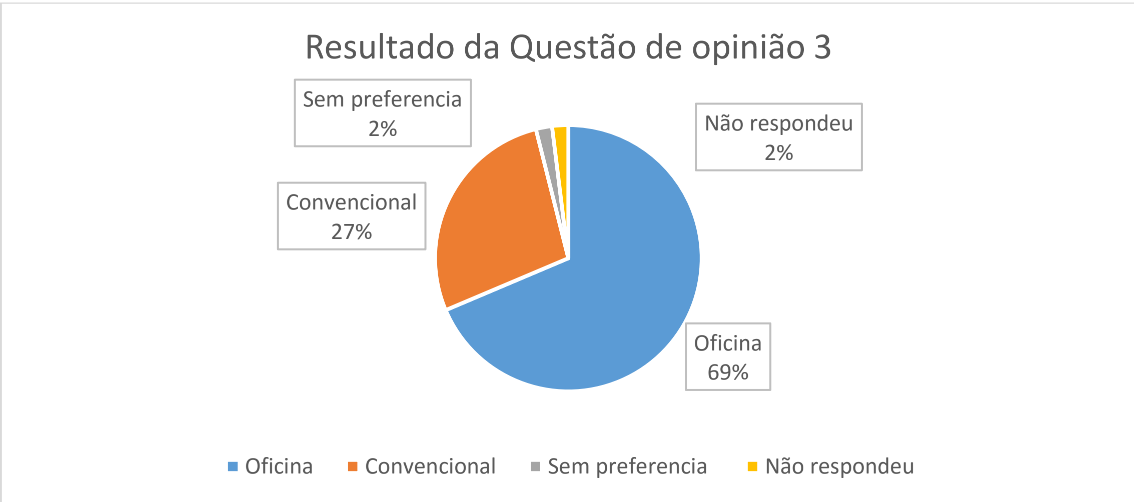
***Questão 3:* Você prefere o método utilizado na oficina ou o método convencional (Lei dos senos e lei dos cossenos) para resolver questões sobre relações trigonométricas em triângulos quaisquer? Justifique.**

O Quadro 9 e o Gráfico 9 da Figura 53 ilustram o resultado obtido sobre a preferência do alunado.

Quadro 9: Resultado da Questão de opinião 3

Resposta	Número de alunos
Oficina	35
Convencional	14
Sem preferência	1
Não respondeu	1

Figura 53: Gráfico 9.



De acordo com os dados coletados, temos que 69% dos alunos preferem a abordagem proposta neste trabalho, 27% optam pela abordagem tradicional, 2% afirmam não ter preferencia e outros 2% não responderam a questão. Tal resultado indica que a maioria dos alunos prefere a abordagem que propomos para estudar as relações trigonométricas em triângulos quaisquer. Para ilustrar as justificativas do alunado, construiremos a seguir dois quadros, um para as justificativas pela escolha da abordagem proposta neste trabalho (método utilizado na oficina), outro para as justificativas pela escolha do método tradicional. Alguns alunos deram mais de uma das justificativas apresentadas nos Quadros a seguir:

Quadro 10: Justificativas pela escolha da abordagem proposta neste trabalho

Motivo pela escolha	**Número de alunos**
Fácil e/ou prática para resolver questões	18
Difícil de esquecer	17
Diminui o excesso de fórmulas	5
Sem justificativa	1
Substitui nas fórmulas	1

De acordo com os dados expostos no Quadro 10, podemos observar que a maioria dos alunos que preferem a abordagem proposta neste trabalho justifica sua escolha afirmando que a mesma é mais prática e/ou fácil para resolver questões, além dessa justificativa, apareceram outras, como a menor probabilidade de esquecimento e o fato desta abordagem ajudar a diminuir o número de fórmulas no estudo de Matemática, que são características utilizadas por nós, para explicar a importância de tal abordagem. Tivemos ainda, um aluno que não justificou sua resposta e outro que demonstra não ter compreendido bem a pergunta, pois a abordagem proposta é dinâmica e não possui fórmulas prontas para resolução das questões.

Quadro 11: Justificativas pela escolha da abordagem tradicional

Motivo pela escolha	**Número de alunos**
Fácil e/ou prática para resolver questões	7
Prefere usar fórmulas	5
Achou curta a apresentação da abordagem proposta na oficina	1
Sem justificativa	1
Não precisa de fórmulas	1
Acha que fórmulas grandes são mais fáceis de serem esquecidas	1

De acordo com os dados do Quadro 11, percebe – se que a maioria dos alunos que optaram pela abordagem tradicional, justifica achá-la mais fácil e/ou prática do que a proposta neste trabalho, enquanto outros alunos, explicam sua resposta, pelo fato de acharem melhor utilizar fórmulas prontas para resolução de problemas. Tivemos ainda, um aluno que não justificou sua resposta e outros dois que não demonstram ter entendido ao questionamento, pois um afirma que esse método não precisa de fórmulas e o outro que as fórmulas grandes são mais fáceis de serem esquecidas e a abordagem que utiliza tais fórmulas é a escolhida por ele e não a proposta neste trabalho.

Além dos alunos citados nos Quadros 10 e 11, tivemos um aluno que afirmou não ter preferência quanto às abordagens, pois o mesmo prefere escolher a abordagem que vai utilizar, de acordo com as questões que for resolver.

Com este questionamento pretendíamos verificar qual abordagem os alunos preferem para estudar as relações trigonométricas em triângulos quaisquer e assim como esperado, não tivemos unanimidade nesta escolha. Não esperávamos unanimidade, pois imaginávamos que os alunos que possuem facilidade na memorização de fórmulas iriam escolher a abordagem tradicional, enquanto, os alunos que preferem uma matemática mais dinâmica optariam pela abordagem proposta neste trabalho.

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentamos uma ferramenta de resolução para as questões relacionadas às relações trigonométricas em triângulos quaisquer que se utiliza apenas das relações existentes em triângulos retângulos (relações trigonométricas e o teorema de Pitágoras) e verificamos se a utilização de tal abordagem produz ou não um resultado positivo por parte dos alunos.

Participaram da pesquisa 51 alunos da 2ª série do Ensino médio de uma escola filantrópica do município de Andorinha – BA e de uma escola estadual do município de Petrolina – PE, sendo ouvintes de uma oficina para apresentação da abordagem proposta e respondendo de forma escrita a um questionário, instrumento essencial para a coleta e análise dos dados. Percebemos que a abordagem proposta pode ser uma boa ferramenta alternativa para o ensino-aprendizagem das relações trigonométricas em triângulos quaisquer.

Os melhores resultados com a abordagem proposta foram obtidos com problemas que relacionam dois lados e dois ângulos do triângulo; e que relacionam três lados e um ângulo obtuso do triângulo, quando o objetivo é encontrar a medida do lado oposto a tal ângulo.

Resultados obtidos no questionário de opinião apontam que a grande maioria dos entrevistados acha que o número excessivo de fórmulas no estudo de matemática prejudica o seu aprendizado; que mais de noventa por cento dos alunos acham interessante o conhecimento de métodos alternativos para resolver questões; e que a maioria prefere a abordagem que propomos neste trabalho ao método tradicional, pois a acham mais prática e/ou fácil para resolver as questões; acreditam que a probabilidade de esquecer essa abordagem é menor do que a tradicional e que tal abordagem contribui para diminuir o número de fórmulas no ensino da matemática.

A partir desse estudo é possível afirmar que houve uma boa aceitação da abordagem que propomos por parte dos alunos e que o desempenho dos mesmos com tal abordagem foi significativo, pois em se tratando de uma abordagem alternativa, mostrou-se bem eficiente e capaz de ajudar boa parte do alunado sempre que os mesmos não quiserem/souberem utilizar as leis dos senos e dos cossenos.

Para trabalhos futuros, propomos que outros assuntos da matemática possam ser trabalhados, além das abordagens tradicionais, por meio de abordagens intuitivas como a que acabamos de mostrar. Assuntos como volume do tronco de cone, volume do tronco de Pirâmide, altura e área de triângulos equiláteros, dentre outros, são bem propícios para a implantação de tais abordagens. Propomos ainda, um estudo sobre as possíveis dificuldades dos alunos na aplicação da abordagem para resolver problemas nos quais se relaciona três lados e um ângulo do triângulo, quando o objetivo é encontrar a medida do lado oposto a tal ângulo ou as possíveis medidas para um dos lados adjacente ao mesmo.

REFERÊNCIAS

ANDRÉ, Marli E. D. A. **A Pesquisa no cotidiano escolar.** In: FAZENDA, Ivani. Metodologia da Pesquisa Educacional. São Paulo, Cortez, p. 39-50, 2010.

BOYER, Carl Benjamin; GOMIDE, Elza F. (tra). **História da Matemática.** ed. Da Universidade de São Paulo. São Paulo, Edgar Blücher, p. 116 – 128, 1974.

BRASIL, Ministério da Educação; Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio):** parte III – ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, MEC, p. 40 – 55, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em 15 de jan. 2016.

CASTRO, Cláudio de Moura. **A prática da pesquisa.** 2. ed. São Paulo, Pearson Prentice Hall, p. 177 – 184, 2006.

COSTA, Nielce M. da Costa. **A História da Trigonometria.** São Paulo, PUCSP, 1997. 18 p. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3_pdf/historia_triogono.pdf>. Acesso em 28 dez. 2015.

CRESWELL, John W. **Projeto de Pesquisa:** métodos qualitativo, quantitativo e misto. Tradução LOPES, Magda; consultoria, supervisão e revisão técnica SILVA, Dirceu da. 3. ed. Porto Alegre, Artmed, p. 206 – 237, 2010.

FUGITA, Felipe. et. al. **Ser Protagonista Box: Matemática.** São Paulo, Edições SM, Volume único, p. 201 – 256, 2015.

GIL, Antonio Carlos. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 3. ed. São Paulo, Atlas, p. 144 – 149, 1991.

GRESSLER, Lori Alice. **Pesquisa Educacional:** importância, modelos, validade, variáveis, hipóteses, amostragem, instrumentos. 3. ed. São Paulo, Loyola, p. 116 – 170, 1989.

IEZZI, Gelson. **Matemática:** ciência e aplicações, 1ª série: ensino médio, matemática. Ilustrador IZOMAR, Artur Kenji Ogawa. 2 ed. São Paulo, Atual, p. 356 – 398, 2004.

LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais.** Rio de Janeiro, SBM, p. 215 – 240, 2013.

LIMA, Elon Lages. **Medida e Forma em Geometria:** Comprimento, Área, Volume e Semelhança. Rio de Janeiro, SBM, p. 31 – 55, 2006.

LIMA, Elon Lages. et. al. **Temas e Problemas Elementares.** 5. ed. Rio de Janeiro, SBM, p. 69 – 88 e 127 – 136, 2013.

LOOMIS, Elisha Scott. **The Pythagorean Proposition**. National council of teachers of mathematics. Washington, 284 p., 1940.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar:** geometria euclidiana plana. 2. ed. Rio de Janeiro, SBM, V. 2, p. 295 – 337, 2013.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Geometria**. Rio de Janeiro, SBM, p. 25 – 64, 2013.

NORONHA, Olinda Maria. **Pesquisa participante:** repondo questões teórico-metodológicas. In: FAZENDA, Ivani. Metodologia da Pesquisa Educacional. São Paulo, Cortez, p. 153-160, 2010.

RIBEIRO, Jackson. **Matemática:** ciência e linguagem. São Paulo, Scipione, volume único, p. 207 – 235, 2007.

SISTEMA ARI DE SÁ. **Banco de Questões.** online: Disponível em: <http://www.portalsas.com.br/portal/index.php/pagina-inicial>. Acesso em 18 de fev. de 2016.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo Olhar: Matemática.** 2. ed. São Paulo, FTD, V. 1, p. 258 – 292, 2013.

TRIVIÑOS, Augusto Nibaldo Silva. **Introdução à Pesquisa em Ciências Sociais:** a pesquisa qualitativa em educação**.** São Paulo, Atlas S. A., p. 11 – 24, 1987.

VIANNA, Ilca Oliveira de Almeida. **Metodologia do Trabalho Cientifico:** um enfoque didático da população cientifica. São Paulo, E. P. U., p. 95 – 210, 2001.

WAGNER, Eduardo. **Iniciação Cientifica OBMEP 2006:** teorema de Pitágoras e áreas. Rio de Janeiro, SBM, V. 3, p. 1 – 23, 2006.

APÊNDICE A

QUESTIONÁRIO

UNIVASF - UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DOCENTE: Wagner Santiago de Souza
ORIENTADOR: Prof. Dr. Lino Marcos da Silva

Observação: Este questionário tem como objetivo coletar dados referentes à pesquisa de Mestrado intitulada "Relações trigonométricas em triângulos quaisquer com o auxílio de triângulos retângulos". Para isso conto com sua colaboração! Desde já, meus agradecimentos. ***Não é necessário identificar-se**.

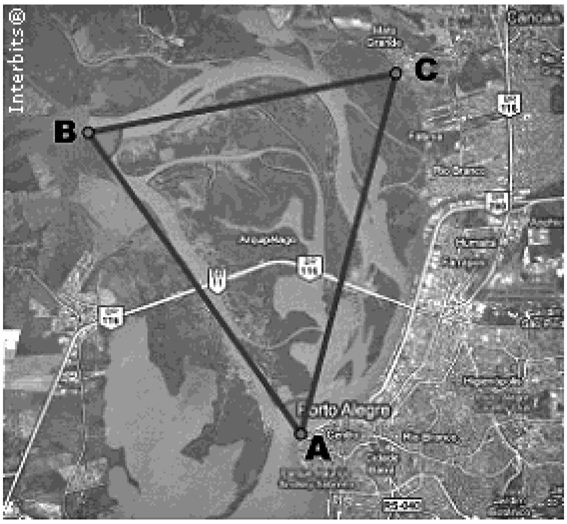
Questionário

Questões sobre relações trigonométricas em triângulos quaisquer

Utilizando a abordagem proposta na oficina, resolva as seguintes questões:

1. No triângulo ABC, temos que as medidas dos lados AB e BC são, respectivamente 12m e 16m e a medida do ângulo Â é 30º. Desse modo, qual o valor do sen(B)?

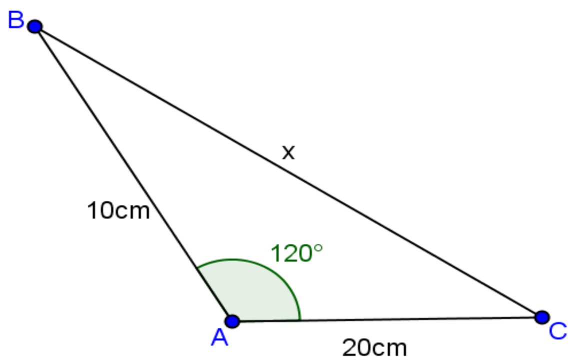
2. (UFSM 2011, adaptada) A figura a seguir apresenta o delta do rio Jacuí, situado na região metropolitana de Porto Alegre. Nele se encontra o parque estadual Delta do Jacuí, importante parque de preservação ambiental. Sua proximidade com a região metropolitana torna-o suscetível aos impactos ambientais causados pela atividade humana.



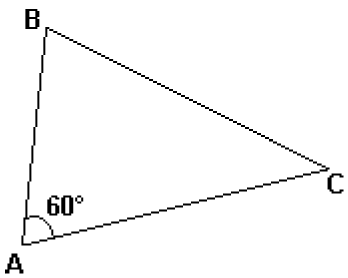
http://maps.google.com.br

A distância do ponto B ao ponto C é de 8 km, o ângulo $\hat{A}$ mede 45° e o ângulo $\hat{C}$ mede 75°. Uma maneira de estimar quanto do Delta do Jacuí está sob influência do meio urbano é dada pela distância do ponto A ao ponto C. Qual é esta distância em quilômetros?

3. Na figura abaixo, determine a medida x do lado BC.



4**.** (UNIRIO 1999, adaptada)



Deseja-se medir a distância entre duas cidades B e C sobre um mapa, sem escala. Sabe-se que AB = 80 km e AC = 120 km, onde A é uma cidade conhecida, como mostra a figura anterior. Calcule, em quilômetros, a distância entre B e C.

5**.** (CFTRJ 2014) Considerando que ABC é um triângulo tal que $AC = 4\text{ cm}, BC = \sqrt{13}\text{ cm}$ e $\hat{A} = 60°,$ calcule os possíveis valores para a medida do lado AB.

Questões sobre a opinião dos alunos

1. Você acha interessante para sua formação diminuir o número excessivo de fórmulas no ensino de matemática?

(   ) Sim   (   ) Não

2. Você acha interessante para sua formação conhecer dois modos distintos (lei dos senos e lei dos cossenos; e o método apresentado na oficina) para resolução do mesmo tipo de questão?

(   ) Sim   (   ) Não

3. Você prefere o método utilizado na oficina ou o método convencional (Lei dos senos e lei dos cossenos) para resolver questões sobre relações trigonométricas em triângulos quaisquer? Justifique.

APÊNDICE B

Sequência didática da oficina e do questionário

Tema: Trigonometria em triângulos quaisquer.

Série: 2ª Série do ensino médio.

Tempo estimado: 6 aulas com duração de 1 hora cada.

Conteúdos:

- Teorema de Pitágoras;
- Razões Trigonométricas em triângulos retângulos;
- Trigonometria num triângulo qualquer via triângulo retângulo.

Competências:

- Revisar o teorema de Pitágoras e as razões trigonométricas em triângulos retângulos;
- Compreender uma abordagem alternativa para o ensino das relações trigonométricas em triângulos quaisquer que utiliza apenas o teorema de Pitágoras e as razões trigonométricas em triângulos retângulos.

Habilidades:

- Aplicar corretamente o teorema de Pitágoras na resolução de problemas;
- Utilizar corretamente as razões trigonométricas em triângulos retângulos na resolução de problemas;
- Resolver problemas sobre trigonometria em triângulos quaisquer utilizando a abordagem proposta.

Aulas 01 e 02

Nas duas primeiras aulas faremos uma revisão do teorema de Pitágoras e das razões trigonométricas em triângulos retângulos. Para tal, faremos aulas expositivas sobre tais resultados com a apresentação dos mesmos e com a resolução de alguns problemas. Iremos ainda, sugerir problemas para os alunos resolverem em sala, com o intuito de aperfeiçoar seus conhecimentos sobre os conteúdos estudados. Todos os problemas serão tirados de Ribeiro (2007) e Souza (2013).

Aulas 03 e 04

Nessas aulas, iremos apresentar a abordagem alternativa para o estudo das relações trigonométricas em triângulos quaisquer. Para tal, faremos aula expositiva com a resolução de problemas, seguida da proposta de alguns problemas para que os alunos resolvam em sala, com o intuito de aperfeiçoar seus conhecimentos sobre a abordagem proposta. Todos os problemas serão tirados de Ribeiro (2007) e Souza (2013).

Aulas 05 e 06

Aplicação do questionário do APÊNDICE A para avaliar o desempenho dos alunos com a abordagem proposta e verificar a opinião dos mesmos sobre tal abordagem.

Recursos:

- Quadro branco;
- Pincel;
- Livros didáticos;
- Banco de questões do Sistema Ari de Sá.

Avaliação:

- Questionário.

Bibliografia:

RIBEIRO, Jackson. **Matemática:** ciência e linguagem. São Paulo, Scipione, volume único, p. 207 – 235, 2007.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo Olhar: Matemática.** 2. ed. São Paulo, FTD, V. 1, p. 258 – 292, 2013.

SISTEMA ARI DE SÁ. **Banco de Questões.** online: Disponível em: <http://www.portalsas.com.br/portal/index.php/pagina-inicial>. Acesso em 18 de fev. de 2016.

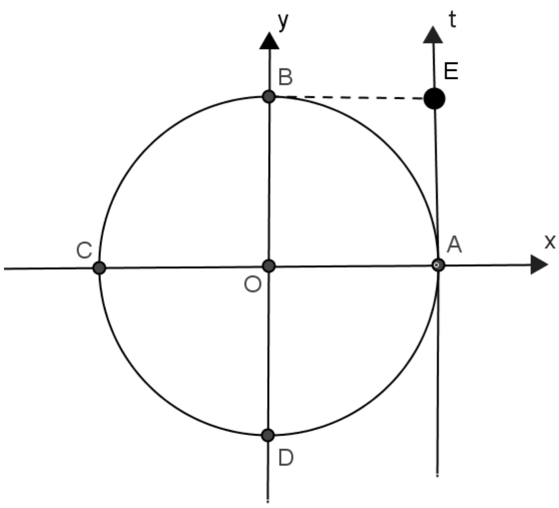
APÊNDICE C

ALGUNS ELEMENTOS DE TRIGONOMETRIA

Ciclo Trigonométrico

O ciclo trigonométrico é uma circunferência unitária com centro na origem de um sistema cartesiano ortogonal, como mostra a Figura 54.

Figura 54: Ciclo Trigonométrico



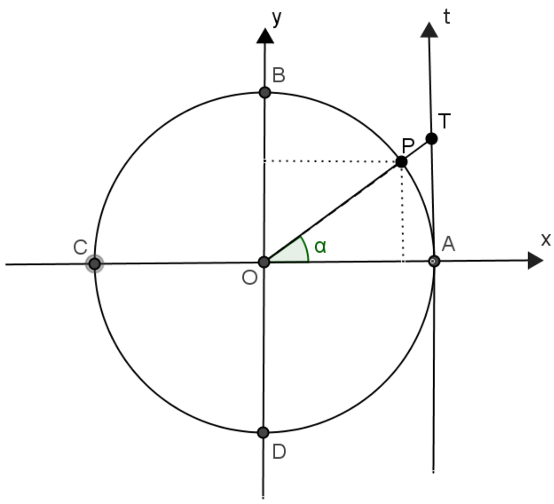
Nessa circunferência temos:

- *A* é a origem da circunferência;
- O arco que vai de *A* até *B* no sentido anti-horário é o 1º quadrante;
- O arco que vai de *B* até *C* no sentido anti-horário é o 2º quadrante;
- O arco que vai de *C* até *D* no sentido anti-horário é o 3º quadrante;
- O arco que vai de *D* até *A* no sentido anti-horário é o 4º quadrante;
- AC é o eixo dos cossenos com – 1 em *C* e 1 em *A*;
- BD é o eixo dos senos com – 1 em *D* e 1 em *B*;
- A reta orientada t é o eixo das tangentes com 0 em *A* e 1 em *E*.
- Os arcos a partir de *A,* serão positivos quando tomados no sentido anti-horário e, negativos no sentido horário.

Seno, cosseno e tangente de um arco

Na Figura 55, temos que P é imagem do ângulo α no ciclo trigonométrico.

Figura 55: Ciclo trigonométrico 2



Desse modo, α é a medida do arco AP e define-se:

- $\cos\alpha = abscissa\ do\ ponto\ P.$
- $sen\ \alpha = ordenada\ do\ ponto\ P.$
- $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{\cos\alpha} = ordenada\ de\ T\ sobre\ o\ eixo\ t,\ \ desde\ que \cos\alpha \neq 0.$

Sendo assim, observamos que os sinais do seno cosseno e tangente de um arco dependem do quadrante em que o arco está localizado. No Quadro 12 apresentaremos os sinais de cada uma dessas relações de acordo com os quadrantes do ciclo trigonométrico.

Quadro 12: Sinais das relações trigonométricas de acordo com os quadrantes

Relação trigonométrica	1º Quadrante	2º Quadrante	3º Quadrante	4º Quadrante
Seno	+	+	–	–
Cosseno	+	–	–	+
Tangente	+	–	+	–

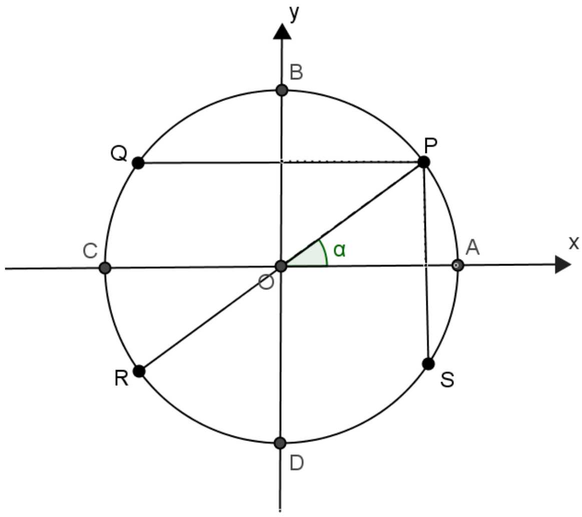
A partir das definições citadas anteriormente temos que os pontos A, B, C, D e A da Figura 55 são imagens, respectivamente, dos ângulos 0°, 90°, 180°, 270° e 360°. Desse modo, observamos que:

Quadro 13: Seno, cosseno e tangente de alguns arcos					
	0º	90º	180º	270º	360º
Seno	0	1	0	– 1	0
Cosseno	1	0	– 1	0	1
Tangente	0	∄	0	∄	0

Redução ao 1º quadrante

No ciclo trigonométrico da Figura 56, temos que P é a imagem do ângulo α, Q, R e S são, respectivamente, os pontos simétricos de P em relação ao eixo y, à origem do sistema cartesiano e ao eixo x. Desse modo, Q, R e S são, respectivamente as imagens dos ângulos correspondentes de α no 2º, 3º e 4º quadrantes.

Figura 56: Ciclo trigonométrico 3



Observa-se na Figura 56 que o arcos AP, QC, CR e AS possuem a mesma medida, sendo assim, temos:

- Q é a imagem do ângulo (180º - α);
- R é a imagem do ângulo (180º + α);
- S é a imagem do ângulo (360º - α).

Assim, pela definição de seno, cosseno e tangente podemos definir as seguintes relações:

Redução do 2º para o 1º quadrante:

$$sen\ (180° - \alpha) = sen\ \alpha;$$

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha\ ;$$

$$tg\ (180° - \alpha) = -tg\ \alpha.$$

Exemplo 1: $\text{sen } 120° = \text{sen } (180° - 60°) = sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Redução do 3º para o 1º quadrante:

$$sen\ (180° + \alpha) = -sen\ \alpha;$$

$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha\ ;$$

$$tg\ (180° + \alpha) = tg\ \alpha.$$

Exemplo 2: $\cos 225° = \cos(180° + 45°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Redução do 4º para o 1º quadrante:

$$sen\ (360° - \alpha) = -sen\ \alpha;$$

$$\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha\ ;$$

$$tg\ (360° - \alpha) = -tg\ \alpha.$$

Exemplo 3: $tg\ 330° = tg\ (360° - 30°) = -tg\ 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Com essas relações de redução ao primeiro quadrante finalizamos o Apêndice C que traz alguns elementos da trigonometria que de certo modo foram utilizados em nosso texto.