UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL- PROFMAT

ARNALDO ALVES FERREIRA

PROPOSTA DE ENSINO DAS FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICA E SUAS DERIVDAS COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA

JUAZEIRO – BA
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL- PROFMAT

ARNALDO ALVES FERREIRA

PROPOSTA DE ENSINO DAS FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICA E SUAS DERIVDAS COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Vale do São Francisco, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Drº. Severino Cirino de Lima Neto

JUAZEIRO – BA

2016

Ferreira, Arnaldo Alves
F383p Proposta de ensino das funções afim e quadrática e suas derivadas com o auxilio do geogebra. / Arnaldo Alves Ferreira.-- Juazeiro, 2016.
xvii,67 f. : il. ; 29 cm.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional - PROFMAT) – Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro-BA, 2016.

Orientador: prof. Dr. Severino Cirino de Lima Neto.

1 Funções (Matemática). 2. Derivada. 3. Limite I. Título. II. Lima Neto, Severino Cirino de.III. Universidade Federal do Vale do São Francisco

CDD 515.7

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Biblioteca SIBI/UNIVASF
Bibliotecário: Renato Marques Alves

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

Universidade Federal do Vale do São Francisco

Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT/UNIVASF

PROFMAT

PROPOSTA DE ENSINO DAS FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICA E SUAS DERIVADAS COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA

Por:

ARNALDO ALVES FERREIRA

Dissertação aprovada em 15 de abril de 2016.

Prof. Dr. Severino Cirino de Lima Neto
Orientador - UNIVASF

Lucília Batista Dantas Pereira

Profa. Dra. Lucília Batista Dantas Pereira
Examinadora Interna - Universidade de Pernambuco - UPE

Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes
Examinador Externo – Universidade Federal de Campina Grande - UFCG

Juazeiro
2016

À minha família .

AGRADECIMENTOS

A Deus por me dar força e coragem para suportar a rotina pesada de trabalhar e estudar.

Aos meus pais, que se esforçaram muito para dar uma vida decente aos dezesseis filhos.

A família, especialmente Elaina (esposa), Helena (irmã) e Maria Fernanda (filha) que cuidaram de tudo em minha ausência, incluindo a criação de João Pedro, filho que nasceu durante o curso e aos irmãos que me acolheram em suas casas durante o Ensino Médio e Graduação.

Aos colegas de trabalho, da Escola Municipal Osmundo Bezerra, especialmente Isailde e Maria do Patrocínio, que assumiram meu trabalho durante minhas ausências.

Aos colegas de curso: Ana Lúcia, Erinaldo Borges, Luzia Coelho, Marta Rejane, Paulo Vitor, Raimundo Campos, Rinaldo Miranda, Roberto Rayala, Wagner Ferreira, Wagner Santiago e Waldiclecyo Souza, pelo apoio e especialmente ao nosso grupo, pelos finais de semana de estudo.

Ao meu Orientador Prof. Dr. Severino Cirino de Lima Neto, pelo conhecimento compartilhado.

Aos professores do curso Beto Rober, Felipe Wergete, Lino Marcos e Lucília Batista, pelo ótimo trabalho realizado.

A Sociedade Brasileira de Matemática pela iniciativa e oportunidade aos discentes.

A CAPES pelo apoio financeiro.

A UNIVASF por disponibilizar o programa

“*A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos, como também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens*”.

(Descartes).”

RESUMO

Este trabalho tem como foco principal mostrar uma proposta de ensino das funções afim e quadrática a partir da análise de gráficos via software GeoGebra e utilizando noção de Limite e Derivada para resolução de problemas envolvendo ponto de máximo ou de mínimo, intervalos de crescimento, decrescimento e ponto crítico da função quadrática. A pesquisa foi realizada em uma turma de segundo ano do Ensino Médio na cidade de Salgueiro, Pernambuco. Considerando que o ensino de Matemática não deve se restringir ao uso de papel, quadro branco e pincel, e que o resultado, com relação a esses conteúdos, nas avaliações externas realizadas por nossos alunos está abaixo do esperado. Partimos da premissa que a utilização do software GeoGebra e o uso da noção de Derivada melhoram a aprendizagem desses conteúdos. Avaliamos os alunos participantes da pesquisa antes de iniciarmos e após a conclusão dos trabalhos, os resultados apresentaram uma diferença considerável nos percentuais de acertos no teste final em relação ao teste inicial, o que mostra êxito no trabalho realizado.

Palavras-chave: Funções Afim e Quadrática, Gráficos, GeoGebra, Limite e Derivada

ABSTRACT

This work is mainly focused show an educational proposal of Affine and quadratic functions from the graphical analysis via GeoGebra software and using the notion's limit and derivative to solve problems involving minimum or maximum point, growth intervals, decrease and critical point the quadratic function. The survey was conducted in a class high school senior's education in Salgueiro city from Pernambuco. Whereas the teaching of mathematics should not be restricted to the paper's use, whiteboard and brush so, the result with respect to such content, external evaluations conducted by our students is lower than expected. We assume that the software GeoGebra's use to derivative notion improve learning such content. Evaluated the students participating in the survey before starting and after completing the work, the results showed a significant difference in the percentage of correct answers between the final test and the initial test, which shows successful work.

Keywords: Affine Function and Quadratic, Graphics, GeoGebra, Limit and Derivative

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Janela de visualização 3D do GeoGebra.................................... 23

Figura 2 – Limite da função real f(x) = x – 2, quando x tende a 3 30

Figura 3 – Tendência do limite de f(x) = 1/x 31

Figura 4 – Gráfico de $\lim_{x\to 2}(x^2 - 1) = 3$ 32

Figura 5 – Derivada em um ponto *a* 35

Figura 6 – Teste da derivada primeira 37

Figura 7 – Teste da derivada segunda 38

Figura 8 – Plano cartesiano, valores de X e Y... 39

Figura 9 – Gráfico da função seno.. 40

Figura 10 – Circunferência 40

Figura 11 - Domínio e imagem de uma função afim 41

Figura 12 – Domínio e imagem da função quadrática................................. 41

Figura 13 – Gráfico da função f(x) = 1/(x+2) e assíntota x = - 2................... 42

Figura 14 – Gráfico da função g(x) = $\sqrt{x-2}$ 43

Figura 15 – Gráfico da função f : ℝ → ℝ definida por f(x) = 2x 44

Figura 16 – Função sobrejetora e não sobrejetora 44

Figura 17 – gráfico da função f : [- 2, 2] → [-7, 9] definida por f(x) = x^3 + 1 .. 45

Figura 18 – Gráfico da função f : ℝ → ℝ, f(x) = $2x^2$ - 2 46

Figura 19 – Gráfico da função f : ℝ → ℝ, definida por f(x) = 2x 46

Figura 20 –Função afim crescente e decrescente 47

Figura 21 – Gráfico da função identidade 48

Figura 22 – Gráfico da função constante 49

Figura 23 – Gráfico da função linear 49

Figura 24 – f : R → R, definida por $f(x) = x^2 + 2x +2$ 50

Figura 25 – Elementos da função quadrática 52

Figura 26 – Gráfico da função quadrática com retas tangentes 53

Figura 27 – $f(x) = x^2 - 4x + 3$ 55

Figura 28 – Variação de “a” na reta y = ax + b 56

Figura 29 – Retas perpendiculares 57

Figura 30 – Retas paralelas 58

Figura 31 – Variação no coeficiente “a” da função $f(x) = ax^2 - 2$. 59

Figura 32 – Mudanças no coeficiente “b” da função quadrática 59

Figura 33 – Variação no coeficiente “c” da função quadrática 60

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Limite pela esquerda.. 29

Tabela 2 – Limite pela direita.. 29

Tabela 3 – Limite de 1/x pela esquerda... 30

Tabela 4 – Limite de f(x) = pela direita 30

Tabela 5 - $\lim_{x \to 2-} x^2 - 1$ 32

Tabela 6 - $\lim_{x \to 2+} x^2 - 1$ 32

Tabela 7 – Altura em função do tempo 37

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1– Questões em branco no teste de entrada 65

Gráfico 2 – Percentual de questões em branco no teste de saída 65

Gráfico 3 – Acertos nos testes de entrada e saída 67

Gráfico 6 – Desempenho nas questões envolvendo Derivada 68

LISTA DE SIGLAS

a.C.	Antes de Cristo
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação
OCN’s	Orientações Curriculares para o Ensino Médio
PCN	Parâmetro Curricular Nacional
PCN+	Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais
SAEPE	Sistema de Avaliação da Educação de Pernambuco
Tg	Tangente
Cotg	Cotangente

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 17

CAPITULO 1 20

1 **A CONTRIBUIÇÃO DOS SOFTWARES EDUCACIONAIS** 20

1.1 – CONHECENDO O GEOGEBRA... 22

CAPITULO 2 24

2 A IMPORTÂNCIA E PROPOSTA DO ENSINO DE FUNÇÕES 24

2.1 – HISTÓRIA DAS FUNÇÕES 24

2.2 –FUNÇÃO NO ENSINO BÁSICO 24

CAPITULO 3 28

3 NOÇÃO DE LIMITE E DERIVADA DE FUNÇÃO CONTÍNUA 28

3.1 - NOÇÃO INTUITIVA DE LIMITE 29

3.2 – NOÇÃO INTUITIVA DE DERIVADA 33

3.2.1 – Derivada das Funções Polinomiais 35

3.2.2 – Resumo das Propriedades Operatórias das Derivadas 36

3.2.3 – Exemplos de Cálculo de Derivada de Funções Polinomiais....... 36

3.2.4 – Teorema (Teste da Derivada Primeira) 37

3.2.5 – Teorema (Teste da Derivada Segunda) 38

CAPITULO 4 39

4 DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES 39

4.1 - PRODUTO CARTESIANO 39

4.2 – FUNÇÃO 39

4.3 - DOMÍNIO, CONTRADOMÍNIO E IMAGEM DE UMA FUNÇÃO 40

4.4 – RESTRIÇÕES NOS DOMÍNIOS REAIS DE CERTAS FUNÇÕES 41

4.5 – FUNÇÃO INJETORA 43

4.6 - FUNÇÃO SOBREJETORA 44

4.7 - FUNÇÃO BIJETORA 45

4.8 - FUNÇÃO PAR 46

4.9 - FUNÇÃO ÍMPAR 46

4.10 – FUNÇÕES CRESCENTES, DECRESCENTES OU CONSTANTES ... 47

4.10.1 – **Função Afim** 47

4.10.2 - **Casos Particulares de Funções Afim** 48

4.11 – FUNÇÃO QUADRÁTICA 49

4.11.1 – Definição e Gráfico 49

4.11.2 – **Zeros da Função** 50

4.11.3 – **Vértice da Parábola** 51

4.11.4 – **Ponto de Máximo ou Ponto de Mínimo** 51

4.11.5 – **Concavidade da Parábola** 52

4.11.6 - **Intervalos de Crescimento, Decrescimento e Ponto Crítico** 52

4.11.7 - Exemplo de Função Quadrática e Derivada 54

CAPITULO 5 56

5 MUDANÇAS SOFRIDAS PELO GRÁFICO DAS FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICA QUANDO SE ALTERAM SEUS COEFICIENTES.................... 56

5.1 – VARIAÇÃO DO COEFICIANTE “A” NA RETA F(X) = AX +B 56

5.2 – VARIAÇÃO DO COEFICIANTE LINEAR “B” RETA F(X) = AX +B 57

5.3 – MUDANÇAS NO COEFICIENTE “A” DA FUNÇÃO F(X) = AX² + BX + C 58

5.4 – MUDANÇAS NO COEFICIENTE “B” DA FUNÇÃO F(X) = AX² + BX + C 59

5.5 – MUDANÇAS NO COEFICIENTE “C” DA FUNÇÃO F(X) = AX² + BX + C 59

CAPITULO 6 61

6 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS 61

CAPITULO 7 64

7 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS 64

CONSIDERAÇÕES FINAIS 69

REFERÊNCIAS 72

APÊNDICES 75

APÊNDICE A 75

APÊNDICE B 79

INTRODUÇÃO

A revolução tecnológica mudou o mundo de tal maneira como nunca se tinha visto antes. Em todos os setores da sociedade, é de alguma forma empregada tecnologia, ligada principalmente à informática. Nas escolas o uso do computador não se deu tão rapidamente quanto em outras entidades, porém de acordo com pesquisa realizada por Barbosa (2013), o uso de computadores em sala de aula vem crescendo gradativamente e melhorando a qualidade do ensino/aprendizagem. Nesse sentido, Cotta (2002 *apud* LIMA 2013) afirma que se tem adotado a utilização da informática como alternativa a metodologia tradicional como um recurso para a melhoria dos resultados do ensino da Matemática nas escolas.

A aprendizagem com a informática é classificada segundo Jonassen (1996 *apud* LOPES 2004) em: **Aprender a partir da tecnologia**, sendo a tecnologia transmissora do conhecimento, e o papel do aluno é recebê-lo; **Aprender acerca da tecnologia,** sendo a tecnologia objeto de aprendizagem; **Aprender através da tecnologia**, em que o aluno aprende ensinando o computador (programando-o através de linguagens como BASIC ou o LOGO); **Aprender com a tecnologia** em que o aluno aprende usando a tecnologia como ferramenta que o auxilia no processo de aprendizagem.

Neste trabalho é destacado "Aprender com a tecnologia" com o intuito de mostrar que o uso de softwares melhora o ensino-aprendizagem das funções afim e quadrática, nesse sentido, os Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012) sugerem a utilização de software, principalmente no que diz respeito às mudanças sofridas no gráfico da função quando se alteram os seus coeficientes. Nesta ideia, Jucá (2006, p. 23) afirma que:

> os elementos que mais contribuíram para que o computador se tornasse um dos mais versáteis mediadores tecnológicos no campo da educação, foram os programas e protocolos da Educação que recebem o nome de *Software.* Com a introdução do computador como mediador didático, desenvolveram–se softwares específicos para a educação.

Faremos análise dos gráficos de funções afim e quadrática, identificando elementos como: domínio, contradomínio, imagem, zeros da função, intervalos de crescimento e decrescimento, ponto crítico, concavidade, ponto máximo e mínimo, além de mostrar como se comportam os gráficos de funções pares, ímpares, injetoras, sobrejetoras e bijetoras. Para a análise de intervalos de crescimento, decrescimento, ponto crítico, concavidade, ponto máximo e mínimo foi usado neste trabalho a ideia de Limite e Derivada de função contínua.

É perceptível o quanto é deficiente a aprendizagem dos alunos no final do Ensino Médio no que diz respeito ao tema função e que nas questões referentes a esse assunto, nas avaliações externas realizadas por eles (SAEPE e Prova Brasil) o resultado é abaixo do desejado. Para sanar esse problema existem vários recursos que podem e devem ser usados, entre eles estão à tecnologia e outros conteúdos que possam explicar o porquê do comportamento da função e facilitar seu aprendizado.

O uso, em sala de aula, de softwares específicos para educação permite que o aluno conjecture, investigue hipóteses e faça verificação com rapidez e agilidade, oportunizando a ele o direito de interagir e assim a aprendizagem torna-se mais significativa. De acordo com Ponte (1990 *apud* LIMA 2013) a tecnologia pode ajudar os estudantes a desenvolverem uma atividade matemática mais profunda, facilitando a generalização, dando-lhes poder para resolver problemas difíceis.

Na presente pesquisa usa-se nas atividades o software GeoGebra que é uma interface de alto desempenho e de fácil utilização. Além de ser um programa livre e pode ser baixado e utilizado por todos.

Os Conteúdos relacionados a Limite e Derivada de função não fazem parte do currículo do Ensino Médio da grande maioria das escolas públicas brasileiras, mas a noção deles é facilmente compreensível pelos alunos desse nível de ensino, além de ser de grande importância para a compreensão de intervalos de crescimento, decrescimento, ponto máximo ou mínimo e ponto crítico de funções. Existe também uma grande dificuldade dos alunos de graduação das áreas de exatas quando se deparam com a disciplina de Cálculo, uma vez que conhecem pouco ou nada desse assunto, então Cálculo I passa a ser um dos vilões da graduação.

O trabalho ficou dividido em sete capítulos que abordam o tema da seguinte maneira:

O primeiro capítulo contextualiza o surgimento dos softwares educacionais classificando-os em: Programas Tutoriais, Exercício-e-Prática, Jogos Educacionais, Programas de Demonstração, Simulação e como Ferramenta Educacional, descrevendo cada um deles e ainda chama a atenção de como deve ser a escolha e seu uso em sala de aula. Apresenta o software GeoGebra, destacando sua criação e funcionalidade.

O segundo capítulo descreve o surgimento das funções, de acordo com trabalhos publicados anteriormente, faz um apanhado das funções no Ensino Básico no Brasil, destacando em que ano/série/ciclo é iniciado o trabalho e a abordagem que os documentos oficiais, como o PCNs, trazem.

O objetivo do terceiro capítulo é apresentar a noção de Limite e derivada ao Ensino Médio, uma vez que esses conteúdos não fazem parte do currículo da grande maioria das escolas desse nível de ensino. A abordagem é feita com o teor dos teoremas, sem o rigor das demonstrações e com o auxílio do software GeoGebra.

O capítulo quatro traz as definições, propriedades, classificações e elementos das funções, com destaque para as funções afim e quadrática, tema de nossa pesquisa, utilizando sempre a o software GeoGebra para mostrar o comportamento dos gráficos e a noção de Derivada para encontrar os elementos da função quadrática.

O capítulo cinco mostra o comportamento dos gráficos das funções afim e quadrática quando se altera um de seus coeficientes numéricos e fixa-se os demais. É utilizado o software GeoGebra para mostrar a parte gráfica e Derivada para justificar esse comportamento.

No capítulo seis descreve-se os procedimentos metodológicos utilizados durante a pesquisa e o capítulo sete faz-se a apresentação e discussão dos resultados obtidos.

CAPITULO 1

1 A CONTRIBUIÇÃO DOS SOFTWARES EDUCACIONAIS

O computador pode ser usado em sala de aula de modos diversos e com objetivos bem distintos, porém a maneira que se mostra mais eficaz em relação aos resultados obtidos no ensino-aprendizagem é a utilização de programas que ajudem o aluno a compreender melhor o conteúdo trabalhado. Esses programas são chamados de softwares e parte deles são criados com objetivos específicos educacionais e assim classificados. De acordo com Giraffa (1999) um programa pode ser considerado educacional desde que utilize uma metodologia que contextualize o ensino-aprendizagem, não importando com que objetivo foi desenvolvido. Logo são softwares educacionais aqueles construídos para esse fim e os que foram projetados com outra finalidade, mas que atendem às necessidades pedagógicas. Bons exemplos de programas que não foram criados como softwares educacionais, mas que tem uma boa utilização em sala de aula são as planilhas eletrônicas e os processadores de texto.

Analisando o desenvolvimento dos softwares educacionais é possível observar que de início eram apenas uma versão informatizada dos métodos e técnicas já utilizadas pelos professores em suas aulas, porém esse fato pode ser considerado um processo normal, uma vez que isso acontece com a maioria das tecnologias presentes em nossa sociedade, foram criadas imitando processos ou objetos já existentes e evoluíram até tornarem-se um método a parte do copiado.

Valente (1998) classifica os softwares educacionais como: Programas Tutoriais, Exercício-e-Prática, Jogos Educacionais, Programas de Demonstração, Simulação e como Ferramenta Educacional. Sendo que os Programas Tutorias são considerados uma versão tecnológica dos métodos já apresentados em sala de aula, porém com alguns elementos a mais como animação, som e a utilização de grande quantidade de dados. Ainda de acordo com Valente (1998 p. 8)

> a tendência dos bons programas tutoriais é utilizar técnicas de Inteligência Artificial para analisar padrões de erro, avaliar o estilo e a capacidade de aprendizagem do aluno e oferecer instrução especial sobre o conceito que o aluno está apresentando dificuldade.

Porém são programas que necessitam de uma grande quantidade de recursos computacionais o que os tornam muito caros.

Os programas de exercício-e-pratica servem para reforçar o conteúdo já trabalhado em sala de aula e em muitos casos são apresentados como jogos. Sua vantagem principal é a grande quantidade de exercícios que o professor pode utilizar, com níveis de dificuldade diferentes, agilidade nas respostas e atratividade para o aluno. Uma das desvantagens desse tipo de software é o fato de não identificar o motivo do erro do aprendiz, mostrando apenas que ele errou.

Os jogos educacionais têm caráter mais lúdico, apesar de trabalhar o que está sendo proposto. Segundo Valente (1998, p.10) a pedagogia por trás dessa abordagem é de exploração autodirigida, ao invés da instrução direta e explícita. Apresenta a vantagem de o aluno praticar conceitos difíceis de serem trabalhados na práxis, porém tem a mesma dificuldade que os programas de exercício-e-prática, pois não mostram o motivo do erro.

Os programas de simulação simulam situações do mundo real. Algumas delas seriam improváveis de serem realizadas, por apresentarem dificuldades como: utilização de produtos químicos, altas temperaturas, velocidades muito altas entre outras. De acordo com Valente (1998, p. 11) a simulação oferece a possibilidade de o aluno desenvolver hipóteses, testá-las, analisar resultados e refinar os conceitos. Uma boa simulação oferece ao aprendiz a oportunidade de testar virtualmente hipóteses que seriam impossíveis de ser observadas no mundo real.

Nesse contexto, o computador pode ser usado também como ferramenta educacional, assim ele passa a ser um instrumento que auxilia professor e/ou aluno no processo de ensino/aprendizagem. De acordo com Valente (1998, p. 11) nessa modalidade o computador deixa de ser um instrumento que ensina o aprendiz e passa a ser uma ferramenta pela qual o aluno desenvolve algo executando uma tarefa por intermédio do computador.

O uso de software é uma boa opção como recurso didático, porém a escolha do programa a ser utilizado deve ser muito criteriosa para que se atinja o objetivo desejado, pois o fato de ter o nome de “Software Educacional” não garante a qualidade do produto e não implica que atenderá às necessidades. A escolha de um bom software depende muito do tipo de aula que se pretende apresentar e da proposta pedagógica da escola. Para Batista (2004) o software educacional pode ser um grande aliado do professor, porém, sua adoção como recurso didático deve passar por um processo de avaliação criteriosa. De acordo com o Proinfo (1999 *apud* BATISTA 2004 p. 56) a identificação dos tipos de software, do público alvo, dos objetivos, das estratégias de utilização, do momento do processo educativo e das condicionantes técnicas, são alguns dos critérios a serem usados na escolha desse tipo de programa para o processo de ensino aprendizagem.

Existem muitos softwares desenvolvidos para o ensino de matemática, dentro de todas as classificações citadas anteriormente e dependendo do que se pretende a grande maioria deles é útil, seja para ajudar o aluno a memorizar uma regra, repetindo-a por várias vezes; seja para tornar a aula mais dinâmica e chamar a atenção do educando ou para ajudá-lo a pensar, observar regularidades, particularidades e especificidades dos conteúdos matemáticos. O certo é que se tem investido muito em pesquisa na área da informática com o objetivo de melhorar o ensino aprendizagem da Matemática e que os resultados são bons, ficando a cargo dos Sistemas de Ensino, Escolas e Professores, em conformidade com a Proposta Pedagógica e o Projeto Político Pedagógico, a utilização de softwares em sala de aula.

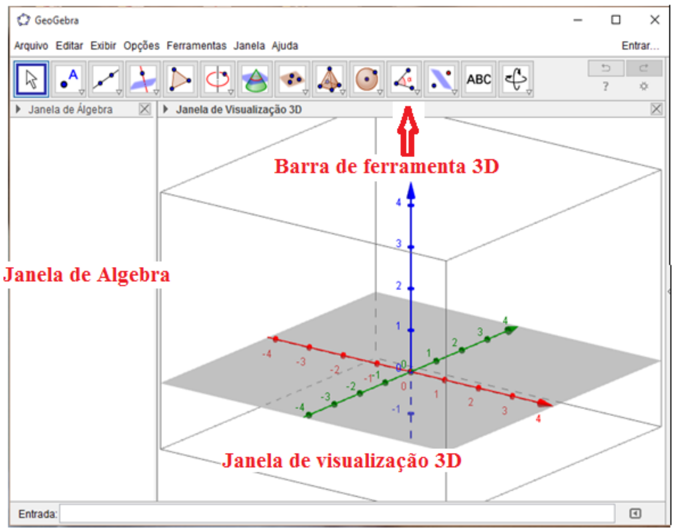
1.1 - CONHECENDO O GEOGEBRA

O software GeoGebra foi criado em 2001 como tese de Markus Hohenwarter. O projeto foi iniciado na Universidade Salzburgo, na Austria e tem prosseguido em desenvolvimento na Universidade Atlântica da Flórida, nos Estados Unidos da América. Atualmente é usado na maioria dos países do mundo, traduzido para mais de cinquenta idiomas. Foram criados Institutos GeoGebra, oferecendo curso e material de estudos em todos os continentes, para dar suporte para o seu uso. Segundo Lima (2013):

> o GeoGebra conta com um grande número de institutos a nível mundial. Esses institutos tem o propósito de agregar interessados no uso do software como ferramenta de ensino e aprendizagem promovendo a colaboração entre profissionais e pesquisadores através da distribuição de materiais gratuitos, oficinas e formações presenciais e a distância de professores e alunos de licenciaturas em matemática.

Nome dado pela aglutinação de **geo**metria e ál**gebra,** o GeoGebra é um software livre de fácil utilização não precisando ter conhecimentos prévios de informática para utilizá-lo. Pode ser encontrado para download no site http://www.geogebra.org e em vários outros, necessita-se apenas digitar “GeoGebra para download” no google. Segundo Flôres (2011 apud LIMA, 2013) pode rodar em Windows, Linux e Macintosh. Pode ser executado virtualmente ou em qualquer sistema operacional. Com o GeoGebra também é possível inserir equações e coordenadas diretamente nos gráficos. É um programa que trabalha com variáveis de números, vetores e pontos e consegue calcular derivadas e integrais de funções. Na versão 5.0 tem a janela de visualização 3D onde podem ser visualizados gráficos em três dimensões, conforme mostra a figura 1. É indicado para uso desde o Ensino Fundamental ao Ensino Superior por ser de fácil manipulação. Necessita que o aluno conheça o conteúdo trabalhado, pois ele apenas executa o que for inserido.

Figura 1 - Janela de visualização 3D do GeoGebra



Fonte: Elaborada pelo autor.

O Geogebra pode ser utilizado a partir do comando entrada, digitando o que se pretende construir (ou utilizando fórmulas prontas, disponíveis em “ajuda” localizado a direita do comando entrada, na parte inferior da tela), ou usando os comandos da barra de menu.

CAPITULO 2

2 A IMPORTÂNCIA E PROPOSTA DO ENSINO DE FUNÇÕES

2.1 – HISTÓRIA DAS FUNÇÕES

Existe certa divergência entre os autores quanto ao surgimento do conceito de função. Algumas ideias datam esse fato na Idade da Pedra, quando se relaciona a quantidade de animais ou caça com pedras, riscos em lascas de madeira ou ossos. O homem associava, por exemplo, uma pedra a cada animal de um rebanho para fazer o controle e dessa forma estava criando uma relação de dependência entre as pedras e os animais. (SÁ, SOUZA e SILVA, 2003 *apud* MACIEL, 2011, p.10). De forma muito intuitiva, surge o sentido de função junto com a ideia de contagem. Essa ideia inicial vem evoluindo durante os séculos, até chegarmos ao conceito que temos hoje. Maciel (2011) descreve em detalhes como aconteceu o surgimento e a evolução do conceito de função, ficando claro que foi um longo caminho percorrido.

Segundo Maciel (2011), a palavra função foi usada em 1698, por Johann Bernoulli, para indicar a solução de um problema e dois anos após ele mesmo publica um artigo com a definição de função. Mas foi Leibniz o primeiro a utilizar a palavra função para designar quantidades geométricas que dependiam de um ponto e de uma curva. (SÁ, SOUZA e SILVA, 2003 *apud* MACIEL, 2011, p.14)e além disso introduziu os termos constante, variável e parâmetro (PONTE, 1992, *apud* MACIEL, 2011). O conceito de função passou por várias mudanças e processos de evolução, além disso, foi e é muito importante para o desenvolvimento de estudos em diferentes áreas, como a Física, Biologia, Astronomia, Economia e Geografia, além de vários ramos da Matemática.

2.2 –FUNÇÃO NO ENSINO BÁSICO

Atualmente, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN’s (BRASIL, 1998), a ideia de função é abordada desde o terceiro ciclo do Ensino Fundamental, que compreende o sexto e sétimo ano, porém só é trabalhado de forma clara no quarto ciclo desse mesmo nível de ensino e especialmente no segundo ano desse ciclo, o nono ano. Os PCN's (BRASIL, 1998) trazem a ideia de função no terceiro ciclo do Ensino Fundamental, apenas com a utilização de representações algébricas para expressar generalizações sobre propriedades aritméticas e regularidades observadas em algumas sequências numéricas, enquanto que no quarto ciclo desse nível de ensino, que compreende o oitavo e nono ano, o conteúdo função aparece de forma mais clara, tendo como um dos objetivos de aprendizagem: "observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis", fazendo relação às funções afim e quadrática. Assim afirmam os PCN's (BRASIL, 1998, p.84-85):

> Para a compreensão da proporcionalidade é preciso também explorar situações em que as relações não sejam proporcionais – os contra exemplos.
> O aluno poderá desenvolver ao analisar a natureza da interdependência de duas grandezas em situações-problema em que elas sejam diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais (função afim e quadrática). Essas situações são oportunas para que se expresse a variação por meio de uma sentença algébrica, representando-a no plano cartesiano.

No quarto ciclo do Ensino Fundamental, inicia-se o trabalho com funções específicas, em detrimento do terceiro ciclo, que tenta apenas desenvolver a ideia do assunto. Surge então pela primeira vez o gráfico de função, porém de forma ainda muito tímida.

Há Sistemas de Ensino que trazem a noção de função desde o segundo ciclo do Ensino Fundamental, quarto e quinto ano. O pensamento funcional também deve ser valorizado nesta etapa de escolaridade, em particular a noção de proporcionalidade pode ser introduzida por meio de situações ligadas ao cotidiano do estudante. (PERNAMBUCO, 2002, p. 64).

No primeiro ano do Ensino Médio, o trabalho com função é feito com maior ênfase nas funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica, destacando seus elementos, características, propriedades e observação do comportamento de seus gráficos. Tudo isso é muito ligado à compreensão da definição e conexo com fenômenos do mundo real. Dessa forma os Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2002, p.129) dizem:

> no trabalho com funções, o mais importante é que o estudante perceba, além do aspecto da modelagem de fenômenos reais,

> aspectos relacionados ao crescimento e decrescimento de cada uma das funções estudadas, o que permite que ele desenvolva o pensamento funcional.

Deve-se observar também a relação de função com outras áreas do conhecimento e outros ramos da matemática. De acordo com as Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN+ (BRASIL, 2002) o ensino de Matemática está segmentado em três áreas: Álgebra, Números e Funções; Geometria e Medidas e Análise de Dados, porém não devem ser trabalhados de forma isolada. É importante que o aluno compreenda em que tipo de situação determinado conteúdo pode ser utilizado, que uma situação problema pode ser resolvida de maneiras diferentes e ainda que cada conteúdo matemático seja iniciado com um problema ou curiosidade do ser humano, independente da sua área de atuação. Função é um dos conteúdos que melhor se entrelaça com outros ramos da Matemática. Nesse sentido, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, OCN (BRASIL, 2006, p. 72), diz que:

> é recomendável que o aluno seja apresentado a diferentes modelos, tomados em diferentes áreas do conhecimento (queda livre de um corpo, movimento uniforme e uniformemente acelerado, crescimento de uma colônia de bactérias, quantidade de medicamento na corrente sanguínea, rendimentos financeiros, consumo doméstico de energia elétrica, etc).

O trabalho com função afim deve ser muito ligado à modelagem de situações do mundo real, principalmente aqueles relacionados a grandezas diretamente proporcionais (funções lineares), como o valor a pagar em função da quantidade de um determinado produto vendido e grandezas não proporcionais, como a corrida de táxi, que relaciona o valor a pagar com a bandeirada (valor inicial) e um valor fixo por quilômetro percorrido.

De acordo com as OCN’s (BRASIL, 2006, p.76), o ensino de função quadrática também deve ser motivado por problemas do cotidiano, que envolva ponto máximo/mínimo, posição do gráfico e zeros da função, de forma que o aluno consiga estabelecer as relações entre o “aspecto” do gráfico e os coeficientes de sua expressão algébrica, evitando-se a memorização de regras.

As funções trigonométricas devem fazer relação com grandezas periódicas em situações reais, em detrimento dos excessivos cálculos e memorização de fórmulas. Nessa linha de raciocínio os Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012. p. 129) afirmam que:

> quanto às funções trigonométricas, elas apresentam importante papel como modelos matemáticos para os fenômenos periódicos, devendo ser ressaltadas as funções seno e cosseno. Alguns tópicos usualmente privilegiados no ensino de trigonometria podem ser dispensados, como, por exemplo, as outras funções trigonométricas, as fórmulas arcos soma e diferença e as identidades trigonométricas.

Ainda no Ensino Médio deve-se compreender as mudanças sofridas pelos gráficos das funções citadas anteriormente, quando se muda os coeficientes numéricos de suas expressões, consolidar a compreensão de domínio, contradomínio, imagem, lei da função, intervalos de crescimento, decrescimento, ponto máximo e/ou mínimo e utilizá-los na resolução de problemas, além saber interpretar, com uma visão crítica, seus gráficos.

O trabalho com função tem grande importância no ensino de Matemática e de outras áreas afins. De acordo com os PCN+, a diversidade de situações envolvendo funções permite que o ensino desse tema seja abrangente e perpasse por outras áreas do conhecimento, deixando uma contribuição importante. (BRASIL, 2002 p.121)

Fazendo referência as competências a serem desenvolvidas no Ensino Médio com relação ao tema função, os PCN+ (2002 p.121) dizem que: a abordagem proposta para esse tema permite ao aluno usar e interpretar modelos, perceber o sentido de transformações, buscar regularidades, conhecer o desenvolvimento histórico e tecnológico de parte de nossa cultura.

CAPITULO 3

3 NOÇÃO DE LIMITE E DERIVADA DE FUNÇÃO CONTÍNUA

Sobre o trabalho com Cálculo no Ensino Médio, Grabarski, Farias e Faria, (2009 p. 4) afirmam que:

> a ideia de derivada pode ser introduzida de maneira intuitiva com apelo à visualização geométrica sem os rigores da teoria dos limites. Com a derivada da função quadrática em mãos pode-se colher excelentes frutos no estudo do trinômio do 2º grau. Os conceitos de função crescentes e decrescentes aplicados à derivada permitem determinar a convexidade da curva, bem como os pontos de mínimo e máximo da função.

Para os PCN's (BRASIL,2000 p.6), fazendo referência ao Ensino Médio, os objetivos educacionais podem ter maior ambição formativa, tanto em termos da natureza das informações tratadas, dos procedimentos e atitudes envolvidas, como em termos das habilidades, competências e dos valores desenvolvidos. Os PCNs e a LDB, lei 9393/96, não orientam o trabalho com Limites e Derivadas nesse nível de ensino, porém não proíbem, pelo contrário, deixam abertura para que o currículo seja construído de acordo com a realidade e as necessidades de cada sistema de ensino/instituição ou região.

O ensino da noção de Cálculo no Ensino Médio é criticado por muitos, justificando ser um conteúdo muito difícil e não compreensível pela maioria dos alunos deste nível de ensino, porém Ávila (1991 *apud* DE MARIA, 2013) questiona:

> por que não ensinamos cálculo na escola de segundo grau? Será que é um assunto muito difícil? Foi sempre assim no passado, ou já houve época em que o cálculo era ensinado na escola secundária? E nos outros países, como é a situação? É ou não conveniente introduzir o cálculo no ensino? Por que? Como fazer isso?

Neste trabalho, aborda-se a noção de Limite e Derivada, com o intuito de facilitar a resolução de problemas que possam ser resolvidos usando os elementos da função quadrática, tais como: valor máximo, mínimo, intervalos de crescimento, decrescimento e vértice da parábola, porém não dar-se ênfase a demonstrações rigorosas por acreditar que nesse momento sejam de difícil compreensão, foca-se na visualização geométrica das funções, seus elementos e características.

3.1 - NOÇÃO INTUITIVA DE LIMITE

As primeiras ideias de Cálculo surgiram na Grécia Antiga por volta 500 a.C. com os gregos calculando áreas de regiões poligonais a partir de triângulos, porém de acordo com De Maria (2013, p. 22) a ideia de limite com o sentido que utiliza-se hoje é bem mais recente.

> O termo limite em nosso sentido moderno é um produto do iluminismo na Europa no final do século XVIII e início do século XIX, e nossa definição moderna tem menos de 150 anos de idade. Até este período, existiram apenas raras ocasiões nas quais a ideia de limite foi usada rigorosamente e corretamente.

A ideia de limite de função é muito ligada à tendência. Diz-se que a função tem um limite *L*, na variável independente *p*, se f(x) se aproxima de *L*, sempre que *x* se aproxima de *p*. Simbolicamente, escreve-se $\lim_{x\to p} f(x) = L$, ou seja, *f(x)* tende a *L* quando *x* tende a *p.*

Exemplo 1

Vamos calcular o limite da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por f(x) = x – 2, quando o valor de x tende a três. Colocando os valores numa tabela temos:

Tabela 1 – Limite pela esquerda

x	Y = f(x)
2,1	0,1
2,3	0,3
2,5	0,5
2,7	0,7
2,9	0,9
2,99	0,99

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 2 – Limite pela direita

x	Y = f(x)
3,9	1,9
3,7	1,7
3,5	1,5
3,3	1,3
3,1	1,1
3,01	1,01

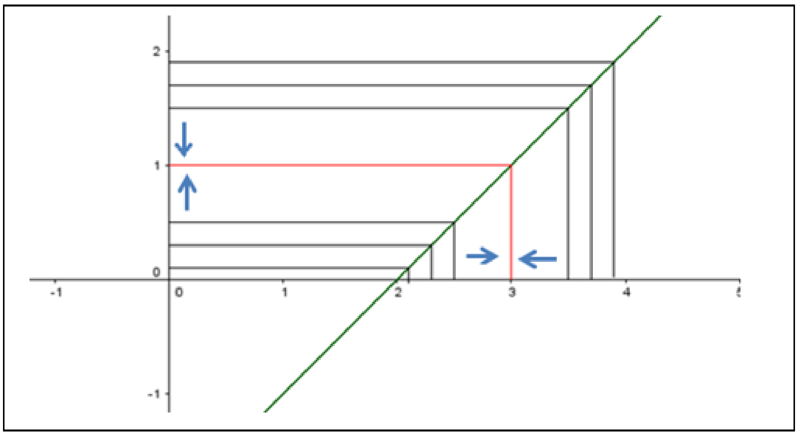
Fonte: Elaborada pelo autor.

Observamos na tabela 1 que para valores de *x* cada vez mais próximos de três, pela esquerda, ou seja, valores que crescem até próximo de três, *f(x)* se aproxima de um, enquanto na tabela 2 para valores de *x* aproximando-se cada vez mais de três pela direita, os valores de *f(x)* também se aproximam de um. Matematicamente podemos dizer que:

$\lim_{x \to 3-} (x-2) = 1$ e que $\lim_{x \to 3+} (x-2) = 1$, logo $\lim_{x \to 3} (x-2) = 1$

Utilizando o software GeoGebra é possível construir um gráfico em que mostra, de forma animada, que quando os valores de *x* se aproximam de três, tanto pela direita quanto pela esquerda, os valores de *y* tendem a um. Desse modo a compreensão se torna mais simples. Assim, pode-se observar o limite, descrito nas tabelas 1 e 2, na figura 2.

Figura 2 – Limite da função real f(x) = x – 2, quando x tende a 3.



Fonte: Elaborada pelo autor

Exemplo 2

Usando a noção intuitiva de limite, calcular $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x}\right)$

Colocando os dados em tabelas numéricas temos:

Tabela 3 – Limite de 1/x pela esquerda

x	Y = f(x)
-10	- 0,1
-1	- 1
-0,1	- 10
-0,01	- 100
-0,001	- 1000
-0,0001	- 10000
-0,00001	- 100000

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 4 – Limite de f(x) = pela direita

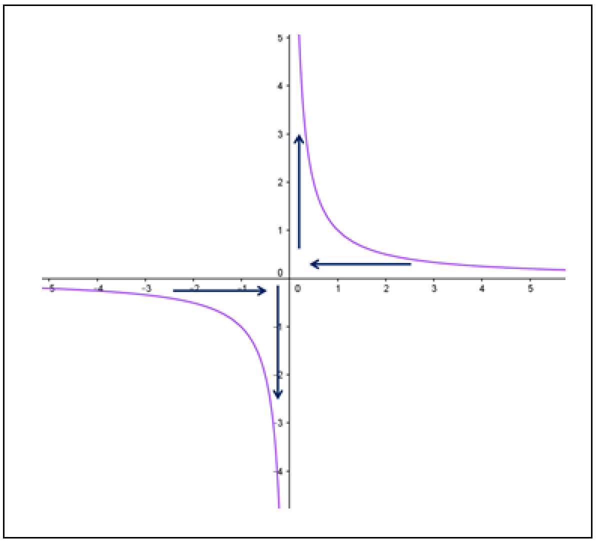
x	Y = f(x)
10	0,1
1	1
0,1	10
0,01	100
0,001	1000
0,0001	10000
0,00001	100000

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observa-se na tabela 3, que para valores de *x* cada vez mais próximos de zero pela esquerda, obtêm-se valores de *f(x)* que tendem a menos infinito, ao passo que na tabela 4 nota-se que para valores de *x* cada vez mais próximos de zero pela direita, encontra-se valores de *f(x)* que tendem a mais infinito. Assim, não há convergência dos limites da esquerda e da direita para um mesmo ponto, logo a função *f* não tem limite real definido.

A figura 3 mostra o gráfico de f : $X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por f(x) = 1/x, com $X \in \mathbb{R}^*$, com a tendência dos limites, quando x tende a zero pela direita e pela esquerda. O uso do GeoGebra torna possível a observação da tendência do limite apresentado de forma dinâmica.

Figura 3 – Tendência do limite de f(x) = 1/x



Fonte: Elaborada pelo autor.

Deve-se atentar para a diferença de tender a um número e ser esse número. No caso anterior quando *x* tende a zero pela direita, *f(x)* tende a mais infinito, quando *x* tende a zero pela esquerda, *f(x)* tende a menos infinito e quando *x* é zero, a função não está definida.

Exemplo 3

Usando a noção intuitiva de limite, calcule $\lim_{x\to 2} x^2 - 1$

Colocando os dados numa tabela tem-se:

Tabela 5 - $\lim_{x \to 2-} x^2 - 1$

x	Y = f(x)
1	0
1,2	0,44
1,5	1,25
1,8	2,24
1,9	2,61
1,99	2,9601
1,999	2,996001

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 6 - $\lim_{x \to 2+} x^2 - 1$

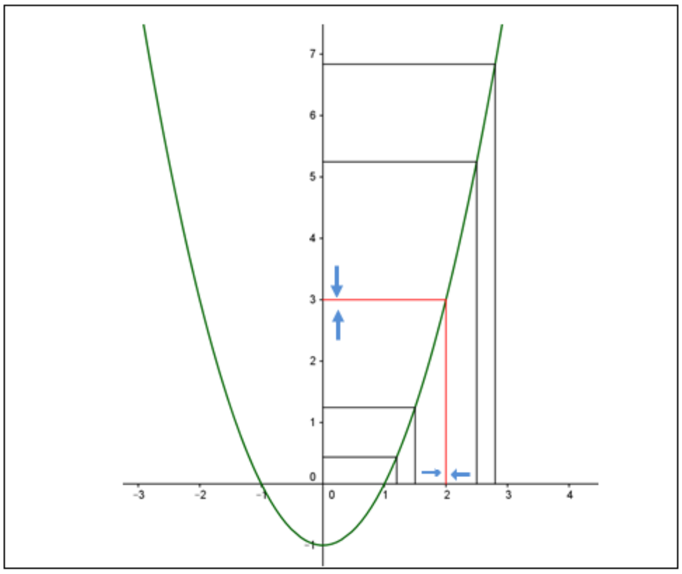
x	Y = f(x)
3	8
2,8	6,84
2,5	5,25
2,2	3,84
2,1	3,41
2,01	3,0401
2,001	3,004001

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observa-se na tabela 5 que para valores de *x* cada vez mais próximos de dois, pela esquerda, *f(x)* se aproxima de três, enquanto na tabela 6 para valores de *x* aproximando-se cada vez mais de dois pela direita, os valores de *f(x)* também se aproximam de três, logo podemos dizer que: $\lim_{x \to 2-} (x^2 - 1) = 3$ e que $\lim_{x \to 2+} (x^2 - 1) = 3$, então $\lim_{x \to 2} (x^2 - 1) = 3$.

Observe o gráfico (figura 4), quando os valores de *x* se aproximam de dois, tanto pela esquerda quanto pela direita, os valores de *f(x)* se aproximam de três. A animação do gráfico via GeoGebra torna visível geometricamente a situação descrita.

Figura 4 – Gráfico de $\lim_{x \to 2} (x^2 - 1) = 3$



Fonte: Elaborada pelo autor

O cálculo de limite de funções polinomiais f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por f(x) = $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0 x^0$, quando $x \to p$, com $p \in$ R, é possível apenas substituindo x por p na expressão $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0 x^0$. O limite da função será o valor encontrado.

$$\lim_{x \to p} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0 x^0 = ap^n + bp^{n-1} + cp^{n-2} + \ldots + \beta p^0$$

Exemplo 4

Calcular os seguintes limites:

a) $\lim_{x \to 2} (x^2 - 1)$

Fazendo $(2^2 - 1) = 3$, logo $\lim_{x \to 2} (x^2 - 1) = 3$

b) $\lim_{x \to 3} (x - 2)$

Fazendo $(3 – 2) = 1$, logo $\lim_{x \to 3} (x - 2) = 1$

3.2 – NOÇÃO INTUITIVA DE DERIVADA

A derivada de uma função f em um ponto *a,* representa a taxa de variação instantânea de *f(x)* em relação a *x* no ponto *a.* São várias a situações reais que envolvem a ideia de derivada como: a velocidade, que é a taxa de variação da função posição e a aceleração que representa a taxa de variação da função velocidade.

Exemplo 5

Uma pedra foi lançada verticalmente para cima, levando 2 segundos para retornar ao ponto inicial. O tempo e a altura correspondente estão representados na tabela 7.

Tabela 7 – Altura em função do tempo

Tempo(s)	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
Altura(m)	1	3,1875	4,75	5,6875	6	5,6875	4,75	3,1875	1

Fonte: Elaborada pelo autor.

Qual a velocidade da pedra no instante t = 0,5 s?

Como o cálculo da velocidade média é dado pela divisão da variação de posição pela variação de tempo temos:

$vm = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, com *Δs* variação da posição e *Δt* variação do tempo.

Tomando as posições: 0 segundo e 0,5 segundos temos:

$$vm = \frac{4{,}75\text{m} - 1\text{m}}{0{,}5\text{s} - 0} = \frac{3{,}75m}{0{,}5s} = 7{,}5m/s$$

Tomando um intervalo de tempo menor, entre 0,25 segundos e 0,5 segundos temos:

$$vm = \frac{4{,}75\text{m} - 3{,}1875\text{m}}{0{,}5\text{s} - 0{,}25s} = \frac{1{,}5625m}{0{,}25s} = 6{,}25m/s$$

Tomando um intervalo ainda menor entre 0,4 segundos e 0,5 segundos temos:

$$vm = \frac{4{,}75\text{m} - 4{,}2\text{m}}{0{,}5\text{s} - 0{,}4s} = \frac{0{,}55m}{0{,}1s} = 5{,}5m/s$$

Quanto menor o intervalo de tempo tomado, mais a velocidade será próxima da instantânea no tempo t = 0,5 segundos.

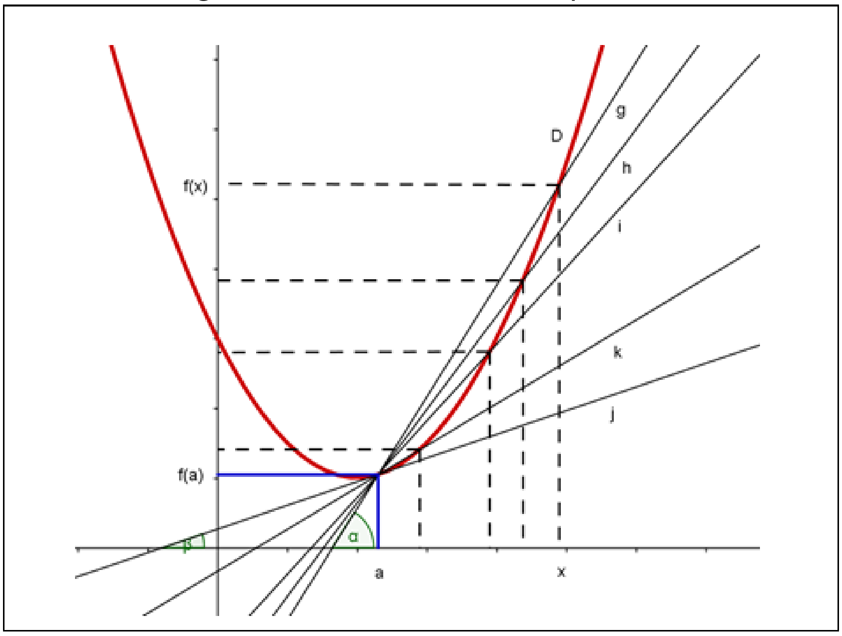
Lima (2012 p.255-256) define derivada da seguinte maneira: Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$, isto é, a é um ponto de acumulação de X pertencente a X, ou seja, $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap X - \{a\} \neq 0$, $\forall\ \epsilon > 0$. Diremos que *f* é derivável no ponto *a* quando existir o limite f'(a) = $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Em caso afirmativo o limite f'(a) chama-se a *derivada* de f no ponto a. Escrevendo h = x – a, ou x = a + h, a derivada de f no ponto $a \in X \cap X'$ torna-se o limite:

$$\mathbf{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}} \qquad (1)$$

Na figura 5, a reta *g* é secante a curva *D* e a reta *j* é tangente a essa mesma curva. Fazendo h = x – a, quando *h* tende a zero, *x* se aproxima de *a.*

Sendo a reta *g* secante a curva D, seu coeficiente angular é tgα = $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, substituindo h = x – a e x = h + a, tem-se tgα = $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, quando *h* tende a zero tem-se $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ = tgβ que é o coeficiente angular da reta *j* que é tangente a curva *D.* Assim quando (x – a) → 0,a inclinação da reta tangente é o limite das inclinações das retas secantes que passam pelos pontos (a, f(a)) e (x, f(x)). Usando o GeoGebra, a transformação da reta *g*, secante a curva, na reta *j*, tangente a curva, ocorre de maneira visível e não apenas teórica.

Figura 5 – Derivada em um ponto *a*



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2.1 – Derivada das Funções Polinomiais Elementares

- f(x) = b, com b ϵ R, tem-se f’(x) = 0;
- f(x) = ax + b, com a ϵ R* e b ϵ R, tem-se f’(x) = a;
- f(x) = ax^{n}, com n ϵ N, tem-se f’(x) = nax^{n-1}.

3.2.2 – Resumo das Propriedades Operatórias das Derivadas

- Soma: se $f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$;
- Diferença: se $f(x) = u(x) - v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) - v'(x)$;
- Produto: se $f(x) = u(x) \,.\, v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \,.\, v(x) + u(x) \,.\, v'(x)$;
- Quociente: se $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{(v(x))^2}$.

3.2.3 – Exemplos de Cálculo de Derivada de Funções Polinomiais

Exemplo 6

Calcular as derivadas das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por:

a) $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$.

Solução:

$f'(x) = 2.(-2)x^{2-1} + 1.3x^{1-1} = -4x + 3$

b) $g(x) = (x^2 + 3).(x + 1)$

Solução:

$g(x) = u(x).v(x)$, com $u(x) = (x^2 + 3)$ e $v(x) = (x + 1)$, logo $u'(x) = 2x$ e $v'(x) = 1$ como $g'(x) = u'(x) \,.\, v(x) + u(x) \,.\, v'(x)$, substituindo os valores temos;

$g'(x) = 2x \,.\, (x + 1) + (x^2 + 3) \,.\, 1$

$g'(x) = 2x^2 + 2x + x^2 + 3$

$g'(x) = 3x^2 + 2x + 3$

3.2.4 – Teorema (Teste da Derivada Primeira)

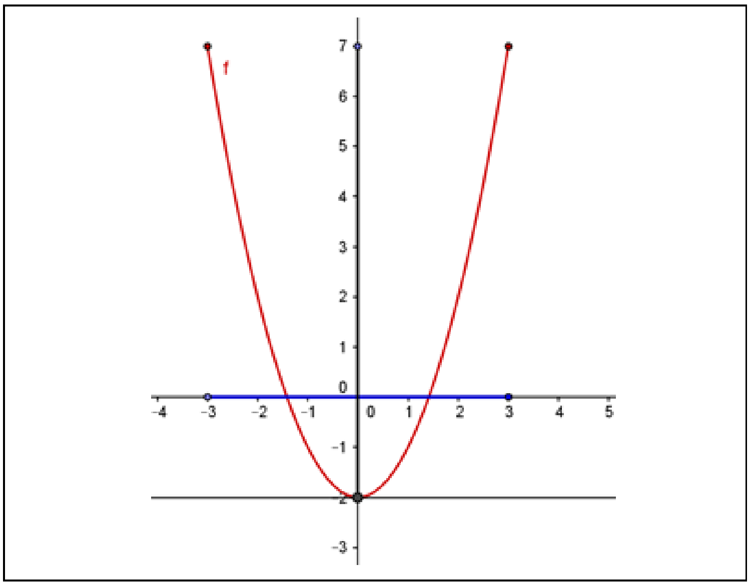
Seja uma função f, contínua num intervalo fechado [a, b], derivável em todo intervalo (a, b), com c ponto crítico de f. (ponto crítico é ponto em que a derivada da função é igual a zero ou não existe).

i) Se f' passa de positiva para negativa em c, então c é um ponto máximo relativo de f.

ii) Se f' passa de negativa para positiva em c, então c é um ponto mínimo relativo de f.

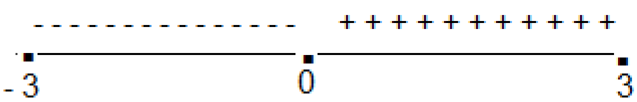
Na função quadrática, tema de nosso estudo, esse teorema é facilmente compreensível observando o gráfico, como mostra a figura 6.

Figura 6 – Teste da derivada primeira



Fonte: Elaborada pelo autor

A figura 6 mostra a função f : [-3, 3]→[-2, 7], dada por $f(x) = x^2 - 2$. A derivada de *f,* é $f'(x) = 2x$, como o ponto crítico é dado em f' igual a zero, tem-se $2x = 0$, logo $x = 0$. Analisando o sinal da função tem-se:



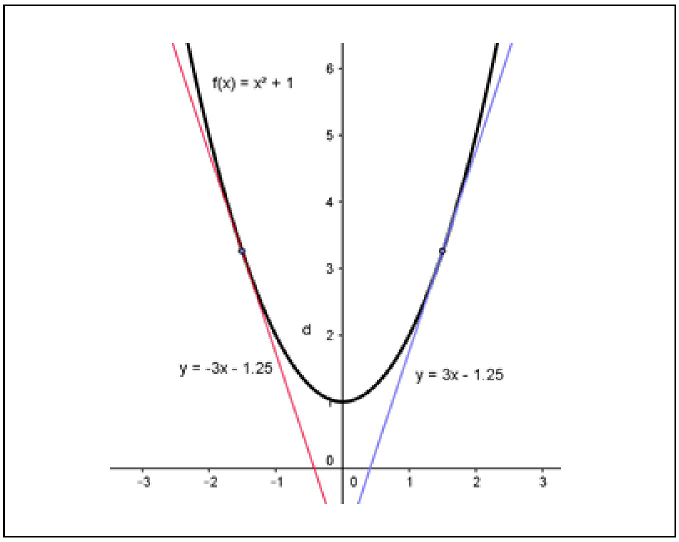
Logo para $x < 0$, $f'(x) < 0$ e para $x > 0$, $f'(x) > 0$, assim $x = 0$ é um ponto mínimo local, como é possível visualizar no gráfico da figura 6.

3.2.5 – Teorema (Teste da Derivada Segunda)

Seja c um número crítico de f e f uma função derivável em um intervalo aberto I contendo c. Se f”(c) existe então:
i) Se f”(c) < 0, então f tem valor máximo relativo em c.
ii) Se f”(c) > 0, então f tem valor mínimo relativo em c.

Sabe-se que a primeira derivada é a inclinação da reta tangente à curva no ponto dado. Na função quadrática f(x) = ax² + bx + c, com *a, b* e *c* reais e *a ≠ 0,* temos a primeira derivada f’(x) = 2ax + b e a segunda derivada f”(x) = 2a. Fazendo 2ax + b = 0 tem-se o ponto crítico em $x = \frac{-b}{2a}$; função crescente em x $> \frac{-b}{2a}$ e decrescente x $< \frac{-b}{2a}$, considerando *a* positivo a função quadrática será decrescente para os valores de *x* menores que o ponto crítico e crescente para os valores de *x* maiores que o ponto crítico. Logo se *a* é positivo a função quadrática terá concavidade voltada para cima e *c* ponto mínimo. Como a segunda derivada será sempre o número real 2a e dois é o coeficiente de f, não varia, o sinal da segunda derivada depende apenas de *a,* assim se *a* for negativo, inverte-se o sinal da segunda derivada e *f,* passa a ter valor máximo em *c.*

Figura 7 – Teste da derivada segunda



Fonte: Elaborada pelo autor

A figura 7 mostra o gráfico da função f : ℝ → ℝ, definida por f(x) = x² + 1, cuja f’(x) = 2x e f”(x) = 2. Segunda derivada positiva e *f* com ponto mínimo.

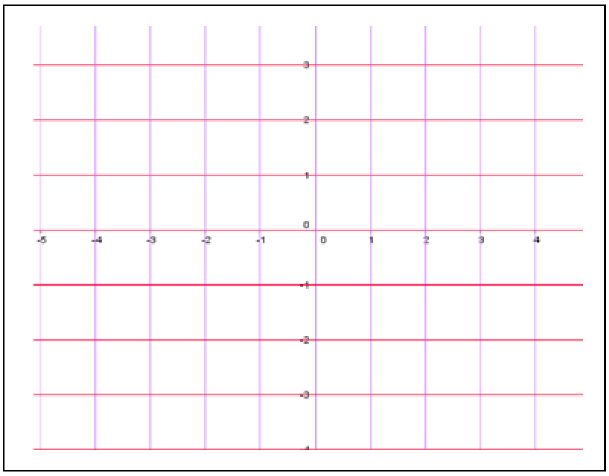
CAPÍTULO 4

4 DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES

4.1 - PRODUTO CARTESIANO

O produto cartesiano X x Y de dois conjuntos X e Y é o conjunto X x Y formado por todos os pares ordenados (x, y) cuja primeira coordenada x pertence a X e cuja segunda coordenada y pertence a Y (LIMA, at al, 2012, p. 82). Os valores de x determinam retas paralelas ao eixo Y que fica na vertical. Os valores de y determinam retas paralelas ao eixo X, que fica na horizontal, o encontro de uma reta que representa valor de x com uma que representa valor de y forma o par ordenado (x, y) que é seu ponto do plano cartesiano.

Figura 8 – Plano cartesiano, valores de X e Y



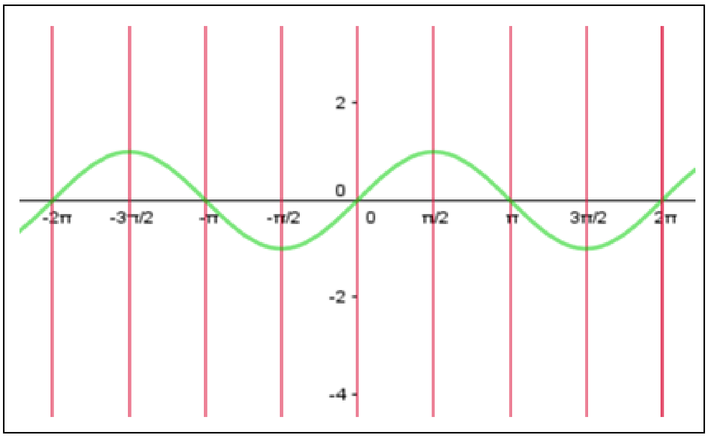
Fonte: Elaborada pelo autor

4.2 - FUNÇÃO

Lima (2012) define função da seguinte maneira: Considere dois conjuntos X e Y: o conjunto X com elementos x e o conjunto Y com elementos y, f : X →Y, diz-se que é a função f de X em Y que relaciona cada elemento x em X a um único elemento y = f (x) em Y.

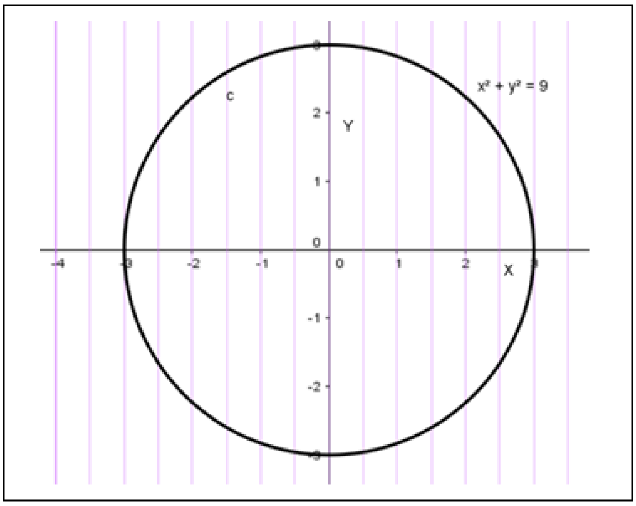
Pela definição, para que a relação entre grandezas seja uma função, as retas determinadas por x poderão tocar o gráfico uma única vez. Assim, tem-se que a figura 9 representa uma função e figura 10 não representa uma função.

Figura 9 – Gráfico da função seno



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 10 - Circunferência



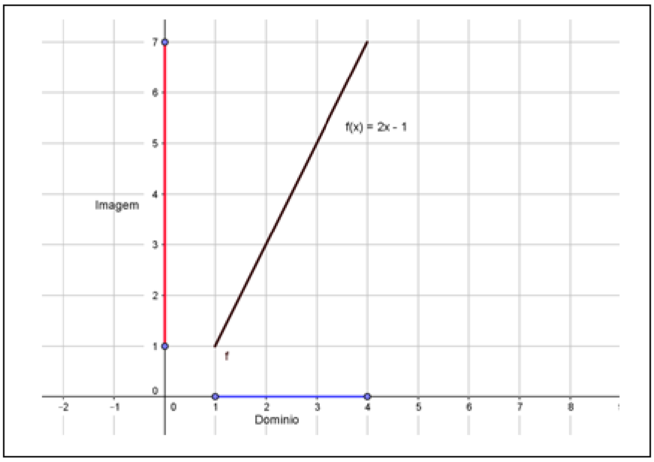
Fonte: Elaborada pelo autor.

A construção de diferentes gráficos, cada um mostrando a parte algébrica e geométrica é facilitada pelo GeoGebra, dando ao aprendiz o poder de testar hipóteses e verificar soluções dentro de pouco tempo.

4.3 - DOMÍNIO, CONTRADOMÍNIO E IMAGEM DE UMA FUNÇÃO

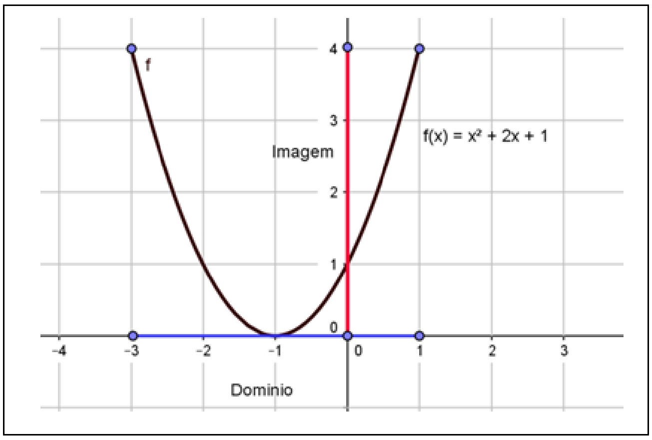
A função é composta de três elementos básicos: domínio, contradomínio e lei da função. Dados os conjuntos X e Y, uma função $f: X \rightarrow Y$, é uma regra que associa cada elemento de $x \in X$ a um elemento $y = f(x) \in Y$. O Conjunto X é chamado de domínio e Y é o contradomínio de f. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se imagem de x pela função f. (LIMA, et al, 2012 p. 45). Nas figuras 11 e 12 esta definição está representada no plano cartesiano.

Figura 11 - Domínio e imagem de uma função afim



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 12 – Domínio e imagem da função quadrática



Fonte: Elaborada pelo autor.

A visualização dos elementos da função via GeoGebra é feita de maneira simples, atribuindo cores que chame atenção para diferenciar cada uma, dessa forma o aluno tem a possibilidade de assimilar melhor as definições, pois além da forma algébrica ele terá a visualização geométrica de forma animada.

4.4 – RESTRIÇÕES NOS DOMÍNIOS REAIS DE CERTAS FUNÇÕES

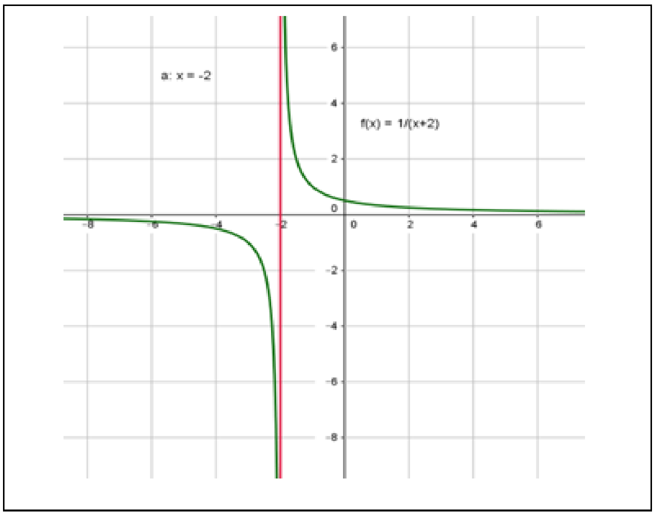
Funções de domínio real e cuja lei de formação apresenta a variável independente como denominador ou em raiz quadrada são exemplos de funções com restrição no domínio. De acordo com Lima et al. (2012 p. 47) é necessário observar a formulação do texto dessas perguntas pois perguntas, como: “qual é o domínio da função f(x) = 1/x”? Estritamente falando não tem sentido, pois não estão definidos domínio e contradomínio.

Exemplo 7: Qual é o maior subconjunto X $\subset$ ℝ tal que a fórmula f(x) = $\frac{1}{(x+2)}$ define uma função f : X → ℝ?

RESOLUÇÃO: A divisão por zero não é definida dentro dos números reais, por isso (x+2) precisa ser diferente de zero e assim x ≠ - 2. Observando o gráfico ver-se que ele não toca a reta x = - 2, chamada de assíntota (reta a qual o gráfico se aproxima à medida que a variável independente *x* se aproxima de -2).

Fazendo $f(x) = \frac{1}{(x+\alpha)}$, α ϵ ℝ, variando o valor de α e animando o gráfico no GeoGebra é fácil perceber que o gráfico não tocará a reta a = - α.

Figura 13 – Gráfico da função f(x) = 1/(x+2) e assíntota x = - 2



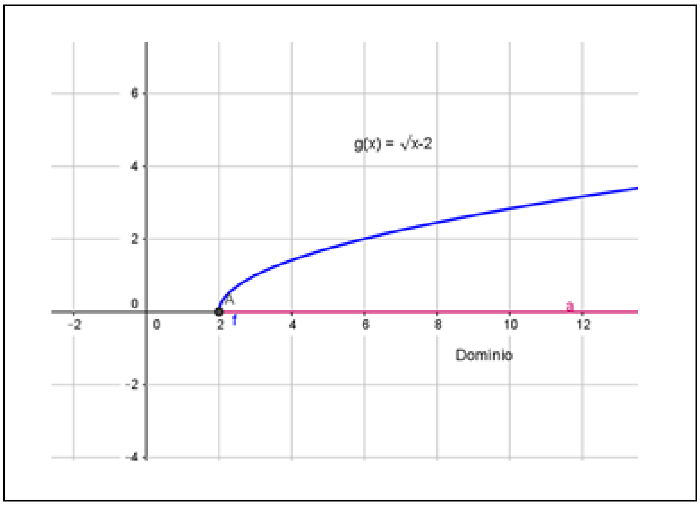
Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 8 - Qual é o maior subconjunto X $\subset$ ℝ tal que a fórmula g(x) = $\sqrt{x-2}$ defina uma função g : X → ℝ?

SOLUÇÃO: Como a variável independente *x* está em uma raiz quadrada, não existe solução em $\mathbb{R}$ quando o número (x – 2) for negativo, pois nenhum número real elevado ao quadrado será negativo. Assim, $x - 2 \geq 0$, logo $x \geq 2$.

A figura 14 mostra o gráfico da função $g : X \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \sqrt{x-2}$, que passa no ponto (2, 0).

Figura 14 – Gráfico da função $g(x) = \sqrt{x-2}$



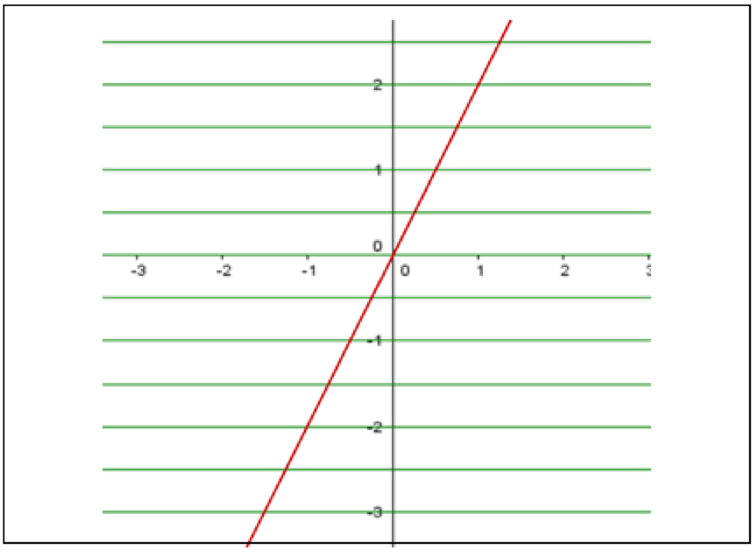
Fonte: Elaborada pelo autor.

4.5 – FUNÇÃO INJETORA

A construção dos gráficos das funções injetoras, sobrejetora e bijetoras via GeoGebra facilita a visualização das definições e torna a aprendizagem mais rápida, pois é possível enxergar aquilo que antes era apenas imaginado.

Uma função $f : X \to Y$ é injetora se, somente se, elementos diferentes de *f* pertencentes ao domínio, forem transformados por *f* em elementos diferentes em Y, pertencentes ao contradomínio. Assim, se $x \neq x'$ em X, então $f(x) \neq f(x')$. Graficamente observamos que para satisfazer a definição, numa função injetora traçando-se uma reta paralela ao eixo x, dentro do contradomínio, essa reta tocará o gráfico no máximo uma vez.

Figura 15 – Gráfico da função f : R → R definida por f(x) = 2x

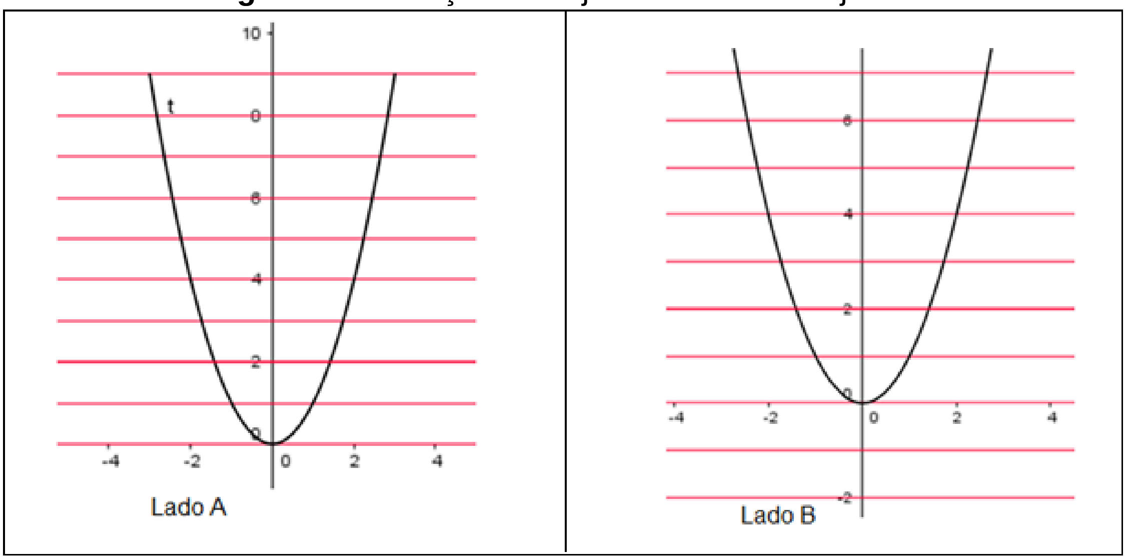


Fonte: Elaborada pelo autor.

4.6 - FUNÇÃO SOBREJETORA

Uma função é dita sobrejetora quando para todo elemento y ϵ Y pode-se encontrar ao menos um elemento x ϵ X tal que f(x) = y. É possível observar essa definição no plano cartesiano, traçando-se uma reta paralela ao eixo X, no intervalo do contradomínio, essa reta toca o gráfico da função em ao menos um ponto. Nessas funções o conjunto contradomínio e o conjunto imagem são iguais.

Figura 16 – Função sobrejetora e não sobrejetora



Fonte: Elaborada pelo autor.

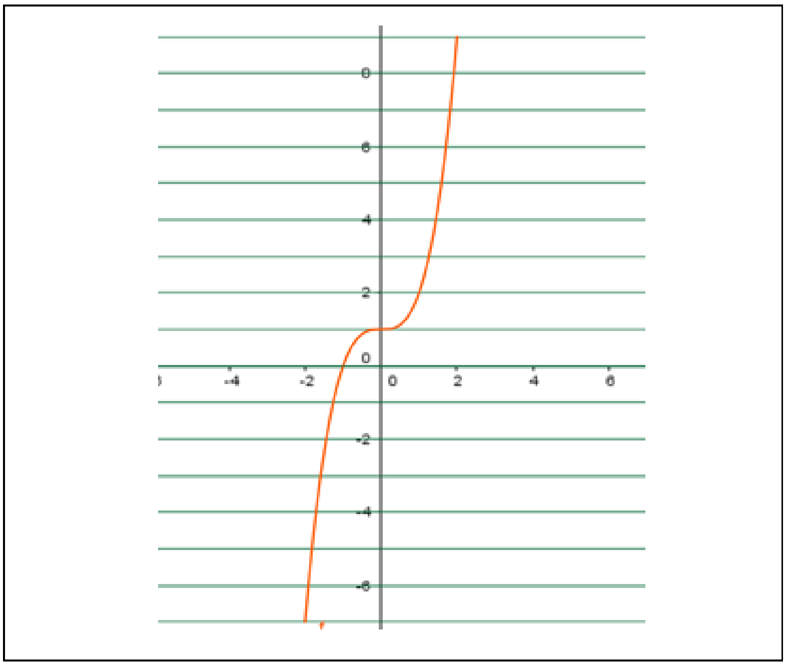
A figura 16 mostra os gráficos das funções f : [- 3, 3] → [0, 9], definida por $f(x) = x^2$, lado A e g : [- 3, 3]→R, definida por $g(x) = x^2$, lado B.

Uma função g de mesma lei de formação deixa de ser sobrejetora, mudando-se o intervalo de seu contradomínio, fato que acontece com o lado B da figura 16, que difere da função apresentada no lado A da figura 16 apenas pelo contradominio. É possível observar que existem valores de y pertencentes ao contradomínio Y que não apresentam valores correspondentes no domínio X, satisfazendo a lei de formação $g(x) = x^2$.

4.7 - FUNÇÃO BIJETORA

Uma função é chamada de bijetora quando é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo. Para que satisfaça as duas condições a função bijetora precisa ter o conjunto imagem igual ao contradomínio em f : X→Y todos os elementos diferentes em X são transformados por *f* em elementos diferentes em Y. Assim, $x \neq x'$ em X → $f(x) \neq f(x')$. Pode-se observar graficamente na figura 17.

Figura 17 – Gráfico da função f : [- 2, 2] → [-7, 9] definida por $f(x) = x^3 + 1$.



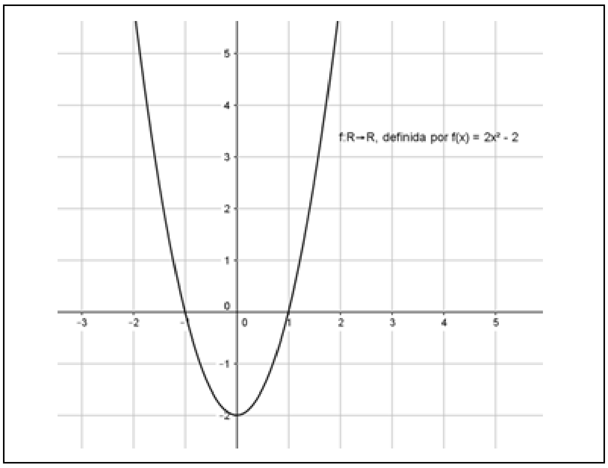
Fonte: Elaborada pelo autor.

4.8 - FUNÇÃO PAR

Uma função f: [-a, a] → ℝ é chamada de par, quando tem-se *f(x) = f(-x)* para qualquer x ϵ [-a, a].

Observando a representação gráfica da função par, na figura 18, é fácil concluir que o eixo das ordenadas é também o eixo de simetria do gráfico.

Figura 18 – Gráfico da função f : R → R, $f(x) = 2x^2 - 2$

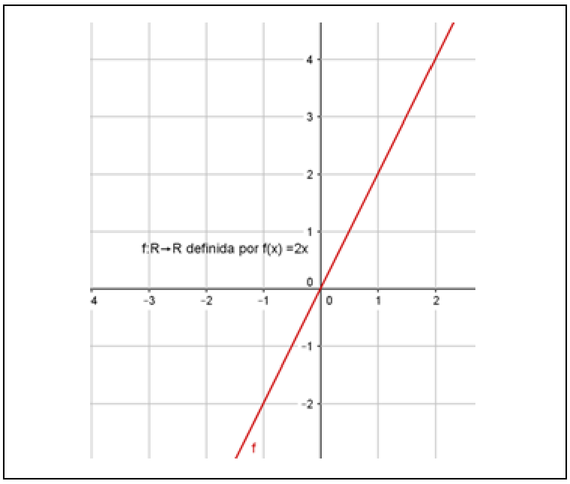


Fonte: Elaborada pelo autor..

4.9 - FUNÇÃO ÍMPAR

Uma função f: [-a, a] → ℝ é classificada como ímpar, quando tem - *f(x) = f(-x)* para qualquer *x* ϵ [-a, a].

Figura 19 – Gráfico da função f : R→ R, definida por f(x) = 2x.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os gráficos das funções ímpares passam na origem do sistema cartesiano, tendo os quadrantes ímpares ou pares simétricos em relação à origem, conforme mostra a figura 19.

4.10 – FUNÇÕES CRESCENTES, DECRESCENTES OU CONSTANTES

Uma função real (ou um intervalo de uma função) é crescente se, somente se, $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$, com x_1 e x_2 pertencentes ao domínio de f.

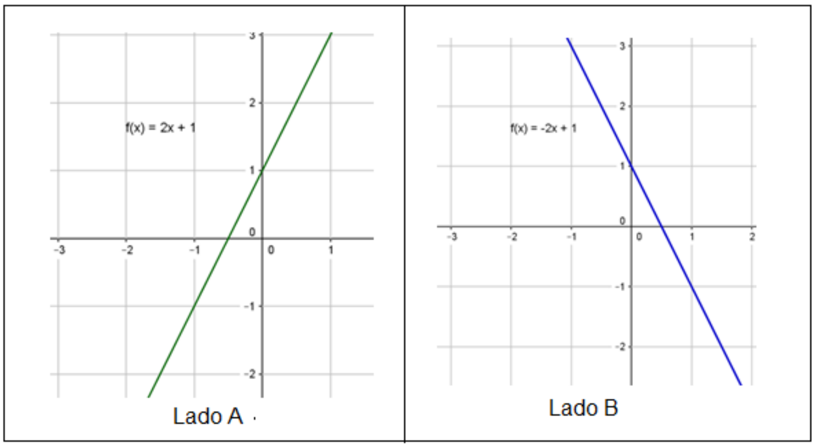
Uma função real (ou um intervalo de uma função) é constante se, somente se, $f(x_1) = f(x_2)$para qualquer x_1 e x_2 pertencente ao domínio de f.

Uma função real (ou um intervalo de uma função) é decrescente se, somente se, $x_1 < x_2$, então $f(x_1) > f(x_2)$, com x_1 e x_2 pertencentes ao domínio de f.

4.10.1 – **Função Afim**

Uma função f: R →R chama-se afim quando existem constantes *a, b* ϵ ℝ, tais que f(x) = ax + b para todo x ϵ ℝ (LIMA, et al., 2012 p. 45). O valor de *a* na função f(x) = ax + b, representa a inclinação da reta em relação ao eixo x, que é calculado tomando dois pontos na reta e encontrando o quociente da variação no eixo y pela variação no eixo x. Isso é numericamente igual a tangente do ângulo ạ, formado entre a reta *f* e o eixo x. Como a tgạ em 0 < ạ < 90 é positiva, em 90 < ạ < 180 é negativa, em ạ = 0 e ạ = 180 a tgạ é nula, a função afim é crescente se, somente se, a > 0, constante se, somente se, a = 0 e decrescente se, somente a < 0.

Figura 20 – Função afim crescente e decrescente



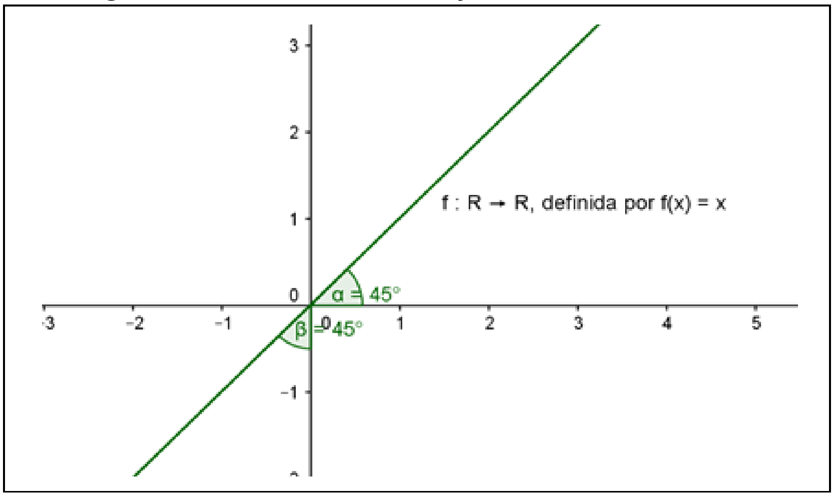
Fonte: Elaborada pelo autor.

A figura 20 mostra os gráficos das funções f : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por f(x) = 2x + 1, lado A, função crescente e f_1 : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f_1(x) = - 2x + 1$, lado B, função decrescente.

4.10.2 - **Casos Particulares de Função Afim**

Função Identidade – são funções do tipo f: X → X, definida por f(x) = x. O gráfico da função identidade é uma reta que passa na origem do sistema cartesiano, formando com os eixos das abscissas e das ordenadas ângulos de 45º, é também bissetriz dos quadrantes ímpares. A figura 21 mostra a representação gráfica da função identidade.

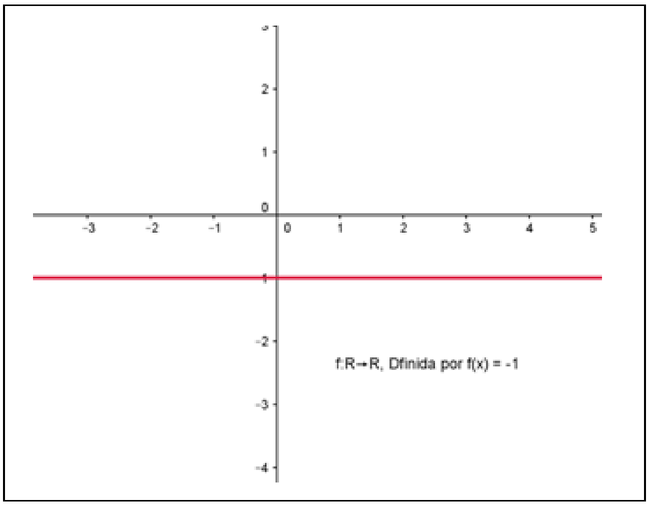
Figura 21 – Gráfico da função identidade.



Fonte: Elaborada pelo autor.

As funções do tipo f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por f(x) = b, com *b* ϵ R, são definidas como constantes, pois *f(x)* independe do valor de *x*. O gráfico da função constante é uma reta paralela ao eixo das abscissas, a qual corta o eixo das ordenadas no ponto (0, b).

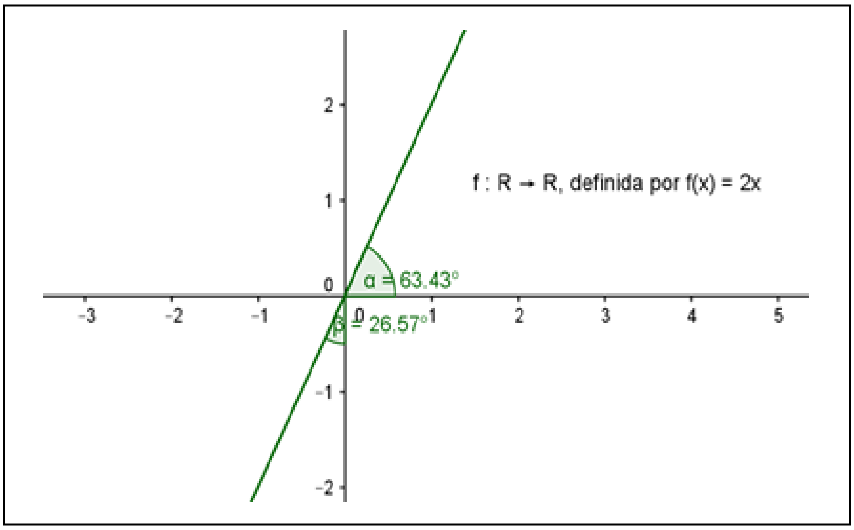
Figura 22 – Gráfico da função constante.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Definidas da forma f: X → X, f(x) = ax, as funções lineares são funções afim cujo valor do coeficiente *b* é zero. Seu gráfico difere do gráfico da função Identidade, pois os ângulos formados com os eixos das abscissas e ordenadas não necessariamente serão de 45º, porém é uma reta que passa pela origem do sistema cartesiano, conforme mostra as figuras 15 e 23.

Figura 23 – Gráfico da função linear



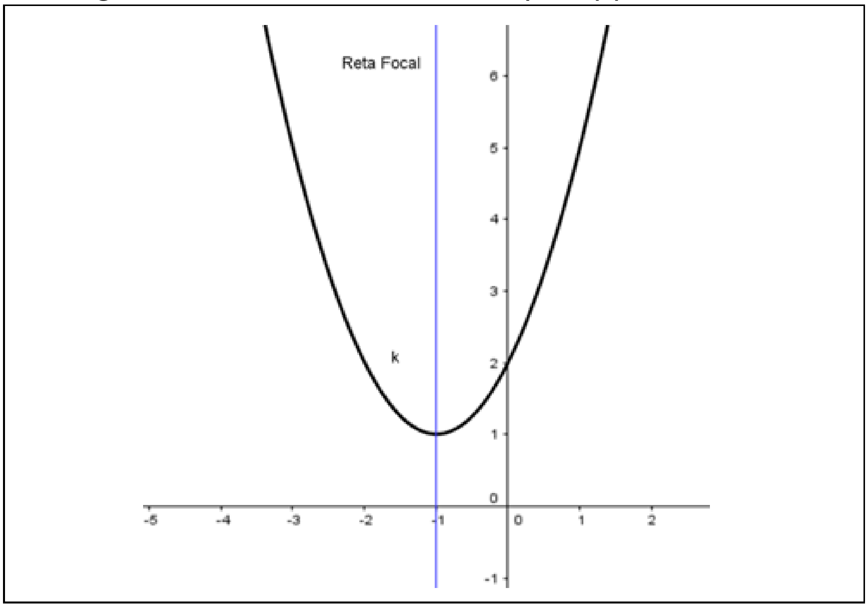
Fonte: Elaborada pelo autor.

4.11 – FUNÇÃO QUADRÁTICA

4.11.1 – Definição e Gráfico

Uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando são dados números reais *a, b, c*, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$. (LIMA, et al 2012 p. 45). A representação gráfica da função quadrática é uma parábola, com eixo focal paralelo ao eixo das ordenadas.

Figura 24 – f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 + 2x + 2$



Fonte: Elaborada pelo autor.

De acordo com as OCN's (BRASIL, 2006 p. 73), o estudo da função quadrática deve ser motivado por problemas de aplicação de maneira que o aluno consiga estabelecer relação entre a posição do gráfico, coordenadas do ponto de máximo/mínimo e zeros da função com o "aspecto" do gráfico e os coeficientes de sua expressão algébrica, evitando-se a memorização de regras.

4.11.2 – Zeros da Função

São os valores do domínio que tornam a função nula, ou seja, $y = f(x) = 0$, assim são as intersecções do gráfico com o eixo das abscissas. Os zeros da função quadrática podem ser encontrados igualando a função a zero e resolvendo a equação do segundo grau.

$f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$

Igualando a função a zero temos: $ax^2 + bx + c = 0$ assim, usando a fórmula já demonstrada em vários livros e atribuída, no Brasil, ao matemático indiano Bhaskaracharya (1114 - 1185), conhecido como Bhaskara, tem-se:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Quando $b^2 - 4ac > 0$, a função terá duas raízes reais, se $b^2 - 4ac = 0$ a função terá uma raiz real e se $b^2 - 4ac < 0$, a função não terá raízes reais.

4.11.3 – Vértice da Parábola

O vértice da parábola é o ponto (x_0, y_0) onde a função quadrática, de domínio e contradomínio reais, atinge seu valor máximo ou mínimo, de acordo com a concavidade. O vértice da parábola é também o ponto crítico da função quadrática, pois é o ponto em que a reta tangente à curva tem inclinação zero em relação ao eixo x. Usando a derivada da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = ax^2 + bx + c$, com *a* ,*b* e *c* reais e $a \neq 0$, tem-se $f'(x) = 2ax + b$ e ponto crítico em $x = \frac{-b}{2a}$, esse é o x do vértice de *f,* substituindo esse valor em *f,* tem-se $y_v = a(\frac{-b}{2a}) + b.(\frac{-b}{2a}) + c$. Fazendo alguns cálculos chegaremos em $y_v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$, como $\Delta = b^2 - 4ac$, tem-se $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$, assim o vértice $V(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ pode ser facilmente encontrado usando derivada de *f*.

4.11.4 – Ponto de Máximo ou Ponto de Mínimo

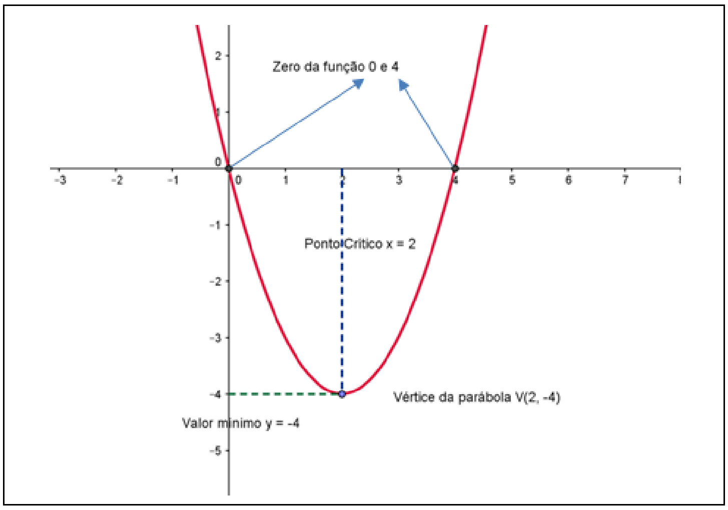
É o valor máximo ou mínimo atingido pela função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, correspondente ao y_v (y do vértice). Aparece muito em situações-problema envolvendo função quadrática, em que se procura área máxima, lucro máximo, temperatura mínima, altura máxima do corpo em queda livre e muitos outros.

É fácil encontrá-lo usando derivada, pois segundo o Teste da Derivada Primeira, o ponto crítico da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = ax^2 + bx + c$, com *a, b* e *c* reais e $a \neq 0$, é um ponto de máximo ou mínimo local. Como o gráfico da função quadrática é uma parábola e possui no máximo um ponto crítico, esse ponto será máximo ou mínimo absoluto. Logo basta fazer *f'* = 0, encontrar o ponto onde a derivada é nula e substituí-lo em *f*.

4.11.5 – Concavidade da Parábola

É a parte côncava da parábola que pode ser voltada para cima ou para baixo. É possível identificar a concavidade da parábola a partir do Teste da Segunda Derivada, que diz que se uma função *f* é derivável em um intervalo aberto *I*, se existe um ponto crítico c ϵ *I*, com f''(c) = 0, então *f* possui máximo ou mínimo local em *c*. Como na função quadrática o ponto crítico é a ordenada x do vértice da parábola e que pode ser ponto de máximo ou mínimo absoluto. Se f(c) for máximo absoluto a parábola terá concavidade para baixo. Se f(c) for mínimo absoluto, a parábola terá concavidade voltada para cima. Pode-se visualizar os elementos da função quadrática na figura 25.

Figura 25 – Elementos da função quadrática



Fonte: Elaborada pelo autor.

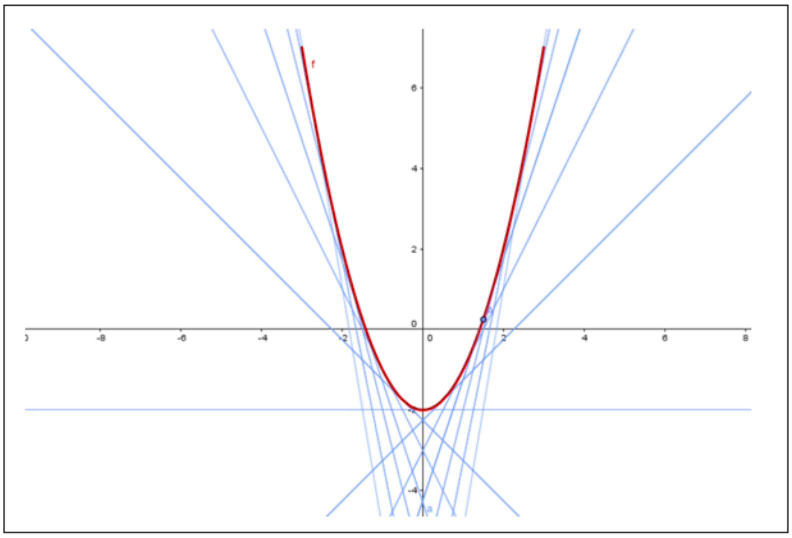
4.11.6 - Intervalos de Crescimento, Decrescimento e Ponto Crítico.

A função quadrática, com domínio real, não é estritamente crescente ou decrescente, ela apresenta intervalos do domínio em que a função se apresenta crescente, intervalo do domínio em que ela se apresenta decrescente e um ponto crítico. Segundo Sodré (2010, p. 2) ponto crítico para uma função f = f (*x*) é um ponto *x* tal que f'(*x*) = 0 ou um ponto onde a derivada não existe.

Traçando-se uma reta tangente ao gráfico da função é possível perceber que no intervalo do domínio em que a função é decrescente, a reta tangente é uma função afim decrescente, no intervalo que a função é crescente, a reta tangente é uma função afim crescente e no ponto crítico, a reta tangente é uma função constante.

A figura 26 representa a função $f : [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 2$, tangenciada por retas. Essa função é decrescente no intervalo [- 3, 0], crescente no intervalo [0, 3] e tem ponto crítico em x = 0. Construindo o gráfico da função no Geogebra é possível animá-lo colocando um parâmetro *t,* variando no domínio da função *f*, um ponto B = (t, f(t)) e uma reta tangente à curva no ponto B. Mudando o valor *t* a reta mudará o ponto de tangência. Foi visualizada, além da parte gráfica, a parte algébrica descrita, inclusive a equação da reta tangente com suas variações.

Figura 26 – Gráfico da função quadrática com retas tangentes.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na figura 26 tem-se o gráfico de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 2$, fazendo:

$$\begin{cases} x = t \\ f(x) = t^2 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(t) = t^2 - 2 \\ f'(t) = 2t \end{cases}$$

A reta tangente é determinada por um ponto $P(x_0, y_0)$ pertencente ao gráfico de f e o coeficiente angular *a.* Assim:

$$r : \begin{cases} P(x_0, y_0) \\ a = f'(x) \end{cases}$$

$y - y_0 = f'(x)\,(x - x_0) \;\Rightarrow\; y = f'(x).x - f'(x).x_0 + y_0$, logo em $y = ax + b$ tem-se:

$$\begin{cases} a = f'(x) \\ b = -\,f'(x).x_0 + y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 2t \\ b = -\,2tx_0 + y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0 = t_0; \quad y_0 = f(t_0) \\ b = -\,a(t_0).t_0 + t_0^2 - 2 \end{cases}$$

Quadro 1 – Retas tangentes a função quadrática

t	**a = 2t**	**$b = -\,a(t_0).t_0 + t_0^2 - 2$**	**y = ax + b**
- 3	- 6	$-(-6).(-3) + (-3)^2 - 2 = -11$	$y = -6x - 11$
- 2	- 4	$-(-4).(-2) + (-2)^2 - 2 = -6$	$y = -4x - 6$
- 1	- 2	$-(-2).(-1) + (-1)^2 - 2 = -3$	$y = -2x - 3$
0	0	$0 . 0 + 0^2 - 2 = -2$	$y = -2$
1	2	$-2. 1 + 1^2 - 2 = -3$	$y = 2x - 3$
2	4	$-4. 2 + 2^2 - 2 = -6$	$y = 4x - 6$
3	6	$-6. 3 + 3^2 - 2 = -11$	$y = 6x - 11$

Fonte: Elaborada pelo autor

No quadro 1, mostramos que as três retas tangentes a *f* no intervalo de [- 3, 0] são decrescentes, portanto *f* também decresce nesse intervalo. Em x = 0, a reta é uma função constante e que as três retas tangentes a *f* no intervalo [0, 3], são funções crescentes. Como observado na figura 26.

4.11.7 Exemplo de Função Quadrática e Derivada

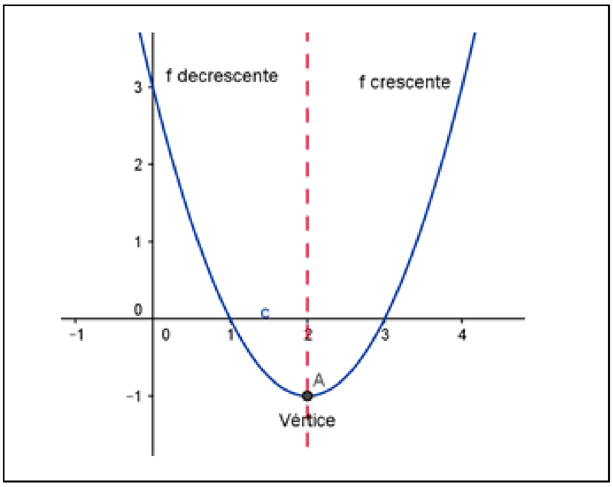
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Determine o vértice da parábola, os intervalos de crescimento e decrescimento e esboce o gráfico.

Como $f'(x) = 2x - 4$, temos o ponto crítico em $f' = 0$, logo $2x - 4 = 0$ temos $x = 2$. Substituído $x = 2$ em *f* temos: $y = 2^2 - 4 . 2 + 3 = -1$, então $V = (2, -1)$.
Analisando o sinal de *f'* temos:

Intervalo	Sinal de *f'*	*f*
x < 2	–	decrescente
x > 2	+	crescente

Portanto *f* decresce (derivada negativa) no intervalo (- ∞, 2), atinge o vértice em V = (2, -1) e cresce (derivada positiva) no intervalo (2, ∞). Assim o vértice é o ponto mínimo. O gráfico está representado na figura 27.

Figura 27 – $f(x) = x^2 - 4x + 3$



Fonte: Elaborada pelo autor.

CAPÍTULO 5

5 MUDANÇAS SOFRIDAS PELO GRÁFICO DAS FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICA QUANDO SE ALTERAM SEUS COEFICIENTES.

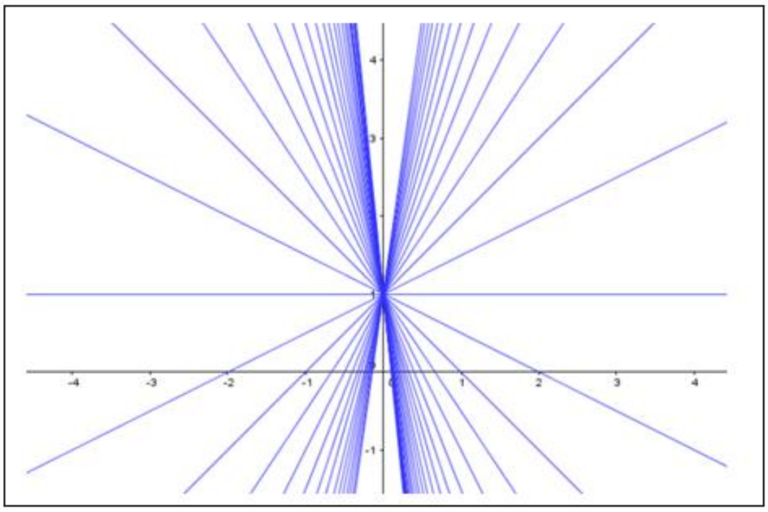
As OCN’s (BRASIL, 2006 p.72) afirmam que é importante destacar o significado da representação gráfica das funções, quando altera-se seus parâmetros, ou seja, identificar os movimentos realizados pelo gráfico de uma função quando alteramos seus coeficientes.

A utilização do GeoGebra na construção de gráficos das funções afim e quadrática com mudança dos coeficientes numéricos facilita a visualização, tanto algébrica quanto geométrica e fornece ao educando o poder de levantar hipóteses e testá-las, pois é possível repetir o processo várias vezes em pouco tempo ou criá-lo de forma animada e observar seu comportamento.

5.1 – VARIAÇÃO DO COEFICIENTE “A” NA RETA F(X) = AX +B

Dado pela taxa de variação da função, o coeficiente angular *a*, é a inclinação da reta em relação ao eixo das abcissas e é numericamente igual a tangente do ângulo formado pela reta e o eixo das abscissas. Dessa forma alterando o valor do coeficiente *a* alteraremos o ângulo entre a reta e o eixo das abscissas, mudando também seu sinal, encontrando funções crescentes, decrescentes e uma reta constante.

Figura 28 – Variação de “a” na reta y = ax + b



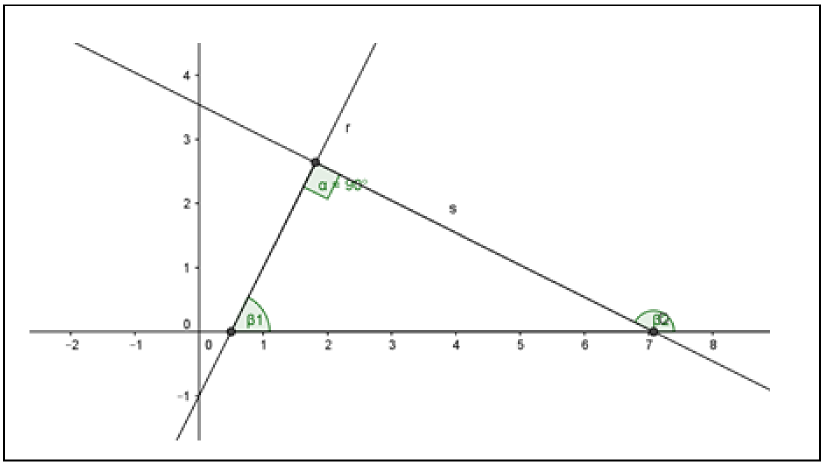
Fonte: Elaborada pelo autor.

Na figura 28 estão representadas as retas da família f : ℝ → ℝ definida por f(x) = ax + 1, com *a* variado no intervalo [-10, 10] e com incremento (variação de 0.5 unidades), assim tem-se a representação das funções:

$f(x) = -10x + 1$, $f_1(x) = -9{,}5x + 1$, . . . $f_{39}(x) = 9{,}5x + 1$ e $f_{40}(x) = 10x + 1$.

É possível encontrar retas perpendiculares a uma reta dada alterando seu coeficiente angular. Na figura 29 as retas *r* e *s* são perpendiculares e formam um triângulo com o eixo das abscissas. Pelo Teorema dos ângulos externos, temos $\beta_2 = \beta_1 + 90º$, logo $tg\ \beta_2 = tg\ (\beta_1 + 90º)$, como $tg\ (\beta_1 + 90º) = -\ cotg\ \beta_1$, e $cotg\ \beta_1 = 1/tg\ \beta_1$, temos $tg\ \beta_2 = -1/tg\ \beta_1$, como $tg\ \beta_1$ e $tg\ \beta_2$ são respectivamente as inclinações das retas *r* e *s*, pode-se afirmar que duas retas r (y = ax + b) e s ($y_1 = a_1x_1 + b_1$) são perpendiculares se, somente se, $a = -\ 1/a_1$.

Figura 29 – Retas Perpendiculares



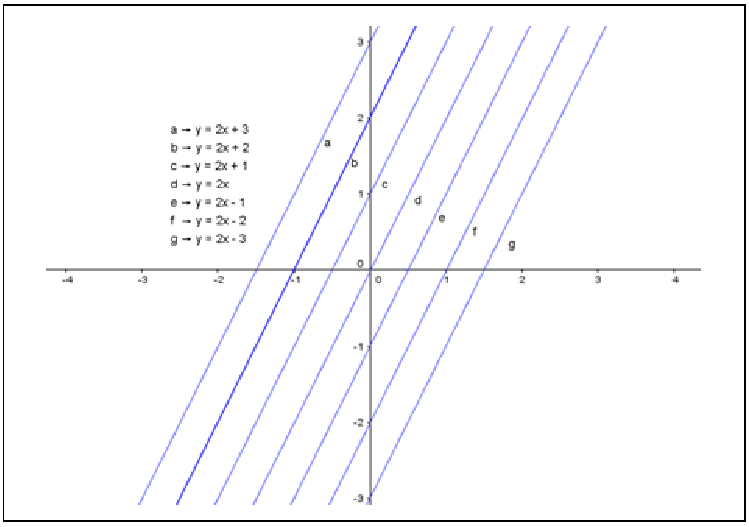
Fonte: Elaborada pelo autor.

5.2 – VARIAÇÃO DO COEFICIANTE LINEAR “B” RETA F(X) = AX +B

Na função f : ℝ→ ℝ definida por f(x) = ax + b, tomando x = 0 temos f(0) = b, formamos o par ordenado (0, b), o que mostra que a função intersecta o eixo das ordenadas em y = b. Alterando o valor de *b* e não mudando o valor de *a*, teremos retas paralelas, como é possível visualizar na figura 30. Fazendo transformações de *b* em (b + k) o gráfico sofrerá translações verticais iguais a *k*. Se *k* > 0, as translações serão verticais para cima e se *k* < 0, as translações serão verticais para baixo.

Na figura 30 estão representadas as retas da família f : ℝ → ℝ, definidas por f(x) = 2x + b, com *b* variando no intervalo [- 3, 3], com incremento (variação) de 1 unidade.

Figura 30 – Retas paralelas

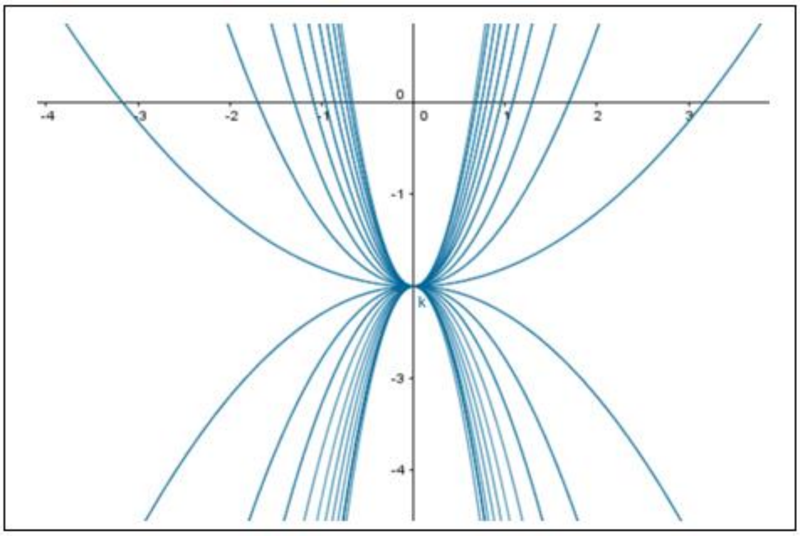


Fonte: Elaborada pelo autor.

5.3 – MUDANÇAS NO COEFICIENTE “A” DA FUNÇÃO F(X) = AX² + BX + C

Alterando os valores de “a” na função f : ℝ → ℝ definida por f(x) = ax² + bx + c, com a ≠ o, o gráfico sofrerá deformações verticais. Quando o valor de “a” sofre mudança, f(x) varia sem que x mude de valor, o que faz com que o gráfico mude também. Se o │a│ aumenta, a parábola se fecha e se o │a│ diminui a parábola abre-se.

Figura 31 – Variação no coeficiente “a” da função f(x) = ax² - 2



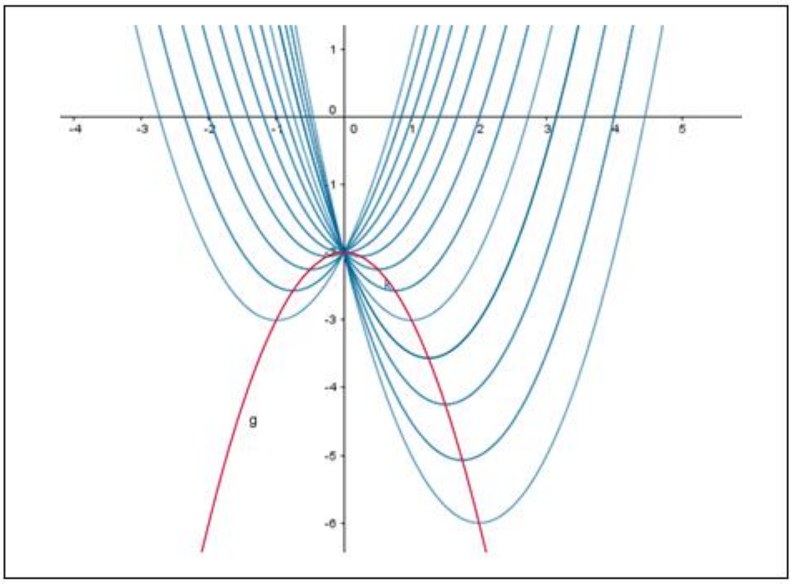
Fonte: Elaborada pelo autor.

A figura 31 mostra os gráficos da família da função f : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + 2$, com a variando no intervalo [- 4,8; 4,8] com incremento de 0,5 unidades. Quando o valor de “a” é negativo, a parábola tem concavidade voltada para baixo, quando o valor de “a” é positivo a parábola tem concavidade voltada para cima.

5.4 – MUDANÇAS NO COEFICIENTE “B” DA FUNÇÃO F(X) = AX² + BX + C

Okada (2013 p. 45) mostra que ao variarmos o coeficiente *b* o vértice do gráfico $f(x) = ax^2 + bx + c$ varia segundo a função $g(x) = - ax^2 + c$, pois tomando $x_v = \frac{-b}{2a}$ e $y_v = - \frac{b^2-4ac}{4a}$, com *a* e *c* fixos e *b* variável, encontrando $b = - 2ax_v$ e substituindo em y_v encontraremos $y_v = - a(x_v)^2 + c$. É possível observar essa variação na figura 32, que mostra os gráficos da família das funções f : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 + bx - 2$, com *b* variando no intervalo [- 4, 2] com incremento de 0.5 e a função g : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = - x^2 - 2$.

Figura 32 – Mudanças no coeficiente “b” da função quadrática



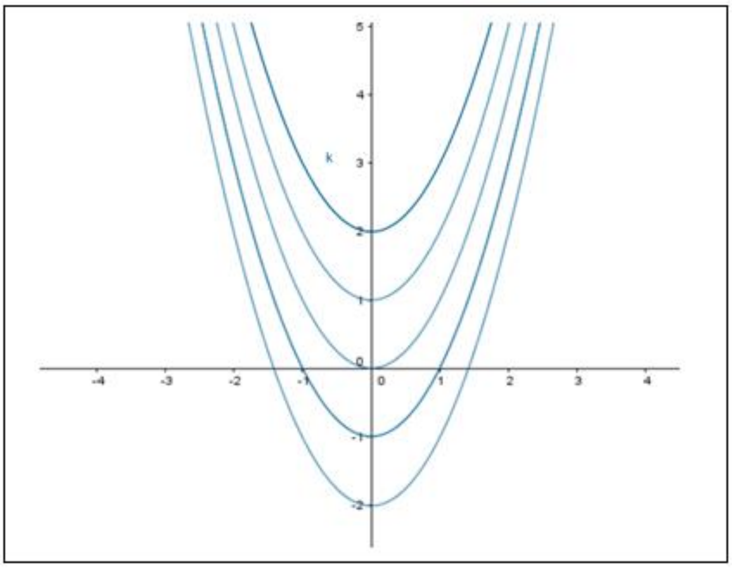
Fonte: Elaborada pelo autor.

5.5 – MUDANÇAS NO COEFICIENTE “C” DA FUNÇÃO F(X) = AX² + BX + C

A transformação de f : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(x) = ax^2 + bx + c$ em $g(x) = ax^2 + bx + (c + k)$, com $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 0$, provocará no gráfico da função *f* translações verticais iguais a *k*. Se $k < 0$, a translação será para baixo e se $k > 0$, a translação será para cima.

Esse fato é observável no figura 33, que mostra os gráficos da família da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(x) = x^2 + c$, com “c” variando no intervalo [-2, 2] e incremento de 1 unidade.

Figura 33 – Variação no coeficiente “c” da função quadrática



Fonte: Elaborada pelo autor.

CAPÍTULO 6

6 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O objetivo geral desse trabalho é mostrar que a aprendizagem das funções afim e quadrática, no Ensino Médio, é mais significativa quando utilizado o software GeoGebra e a noção intuitiva de Limite e Derivada, sem demonstrações rigorosas e com o intuito de que o aluno compreenda melhor o conteúdo apresentado, ficando os objetivos específicos assim apresentados: Discutir a importância do uso de softwares na sala de aula; conhecer o GeoGebra; mostrar as definições e propriedades das funções afim e quadrática fazendo análise de seus gráficos via GeoGebra; analisar as transformações sofridas pelos gráficos de funções quando se muda os coeficientes numéricos de suas equações; apresentar ao 2º ano do Ensino Médio a noção de Limite e Derivada de função polinomial; encontrar os elementos da função quadrática como: ponto crítico, intervalo de crescimento e decrescimento, valor máximo ou mínimo e concavidade, usando a ideia de Limite e Derivada.

A pesquisa, que é de natureza indutiva, de cunho descritivo, quantitativo e qualitativo, teve como público alvo uma turma, com trinta e sete alunos do 2º ano de Ensino Médio de uma escola da rede pública da cidade de Salgueiro – PE, porém por motivos superiores só participaram do teste de entrada trinta e três alunos. A coleta de dados foi realizada em cinco encontros de três horas/aula de 50 minutos cada uma, no período de outubro a novembro de 2015, sendo o primeiro encontro destinado à avaliação de entrada; o segundo, terceiro e quarto encontros oficinas de ensino de funções usando software e noção de Limite e Derivada e o quinto encontro para a avaliação final.

Inicialmente foram apresentados a ideia da pesquisa e os passos para sua realização à direção da escola, ao professor de Matemática da turma escolhida e aos estudantes. A escolha da turma foi feita pensando na disponibilidade das aulas e não foram selecionados alunos, todos os estudantes da sala participaram. Foram utilizados na realização das ações os seguintes instrumentos/materiais:

a) Instrumento de avaliação, testes de entrada (apêndice 1) e de saída (apêndice 2) com o objetivo de aferir e registrar os conhecimentos dos alunos em relação ao tema abordado. No primeiro encontro fizemos o teste de entrada e no último encontro o teste de saída, que foram guardados como documentos. Além desses testes foi entregue uma atividade ao final do terceiro encontro, contendo dez questões, para serem feitas pelos alunos em casa e corrigida no encontro seguinte. A avaliação de entrada era composta de dez questões, sendo seis delas de múltipla escolha e quatro discursivas. O teste de saída continha treze questões, sendo dez de múltipla escolha e três discursivas.

b) Notebook, datashow e o software GeoGebra para realização das oficinas. O conteúdo era apresentado em slides e os gráficos construídos de forma dinâmica, usando o software GeoGebra, mostrando o passo-a-passo aos alunos, em seguida eram destacados seus elementos e características.

No que diz respeito ao conteúdo trabalhado e a aferição das habilidades desenvolvidas pelos alunos, tomamos como base o Currículo de Matemática do Estado de Pernambuco, primeiro e segundo anos do Ensino Médio, além da classificação das funções em: pares, ímpares, injetoras, sobrejetoras e bijetoras.

No quadro 2 estão as expectativas de aprendizagem avaliadas por questão nos testes de entrada e de saída.

Quadro 2 - Expectativas de Aprendizagem Avaliadas

Questão	**Expectativas de Aprendizagem Avaliada**
01	Identificar domínio e imagem de uma função a partir de seu gráfico.
02	Relacionar o gráfico da função quadrática com sua lei de formação.
3.a	Identificar o valor mínimo ou máximo da função quadrática.
3.b	Encontrar os zeros da função quadrática a partir do gráfico.
3.c	Identificar intervalos de crescimento e decrescimento da função quadrática.
4.a e 4.b	Reconhecer as mudanças sofridas pelo gráfico da função afim, quando se alteram seus coeficientes numéricos.
05	Resolver problemas que envolvam valor máximo ou mínimo da função quadrática.
06	Identificar as mudanças sofridas pelo gráfico da função quadrática, quando se alteram seus coeficientes numéricos.
07	Reconhecer função injetora, sobrejetora e bijetora a partir do gráfico.

08	Identificar função par ou ímpar, dado o gráfico e a lei da função.
09	Identificar intervalos de crescimento e decrescimento da função a partir do gráfico.
10	Relacionar a função afim a sua representação gráfica.
11, 12 e 13	Resolver problemas envolvendo valor máximo ou mínimo, intervalos de crescimento e decrescimento da função quadrática.

Fonte: Elaborada pelo autor.

As questões das avaliações de entrada e saída tinham as mesmas Expectativas de Aprendizagem, diferindo apenas em seus enunciados. As questões 11, 12 e 13 foram aplicadas apenas no teste de saída, com o objetivo de avaliar a utilização da noção de Derivada na resolução das questões. O percentual de acerto de cada aluno não era relacionado à nota, por isso eles ficaram a vontade para responder e alguns casos para não responder. Após a coleta, os dados passaram por análise criteriosa, para a apreciação dos resultados.

O conteúdo era apresentado em slides, mostrando e discutindo as definições. As explicações eram feitas usando o Diagrama de Venn, representação em conjuntos de pontos (x,f(x)) e a construção de gráficos usando o software GeoGebra, na maioria dos casos de forma animada. As construções usando o Geogebra eram feitas em sala da aula mostrando os passos aos alunos, apenas nos casos em que poderia se tornar demorado, os gráficos eram trazidos já construídos os primeiros passos. Após as explicações eram usados exercícios para verificar a assimilação do conteúdo.

CAPÍTULO 7

7 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Para os PCN’s (BRASIL, 2000), o Ensino Médio é o período de aprofundamento do conhecimento dentro das disciplinas específicas com procedimentos científicos pertinentes aos seus objetos de estudo, com metas formativas particulares, de certo modo envolvendo a articulação interdisciplinar desses saberes por meio de várias circunstâncias como conteúdos tecnológicos e práticos, já presentes junto a cada disciplina, mas particularmente apropriados para serem tratados de uma perspectiva integradora.

> os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. Para a área das Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologias, isto é particularmente verdadeiro, pois a crescente valorização do conhecimento e da capacidade de inovar demanda cidadãos capazes de aprender continuamente, para o que é essencial uma formação geral e não apenas um treinamento específico. (BRASIL, 2000, p. 6)

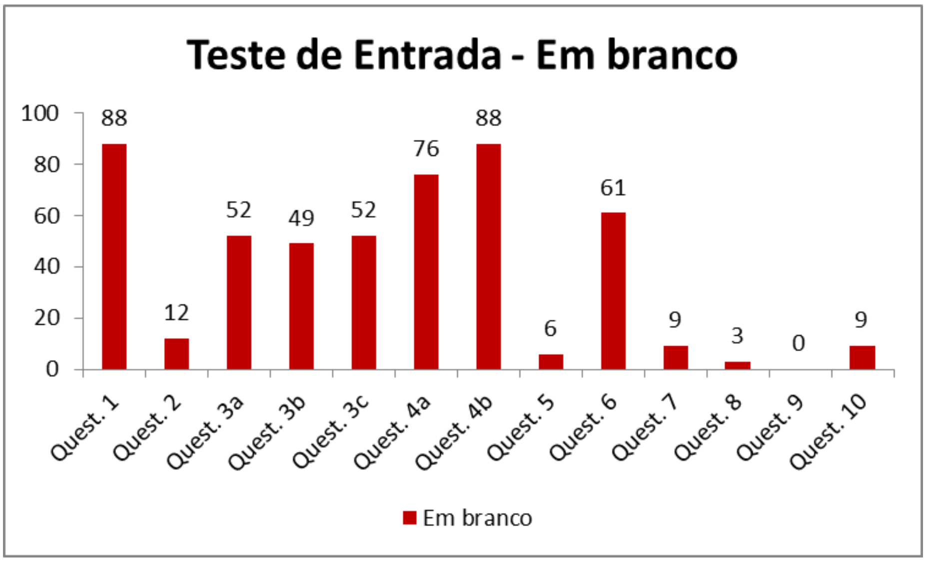
O uso de práticas de ensino que ofereça ao aluno uma visão mais ampla do que está sendo estudado e compreenda melhor o conteúdo apresentado, incluindo sua importância e utilização, faz com que se chegue mais próximo do almejado. Além do método e material deve-se ter atenção especial para o nível de compreensão e maturidade de cada estudante. Foi pensando nesses objetivos que esse trabalho foi realizado.

As avaliações de entrada e de saída foram construídas levando em consideração a faixa etária e maturidade de uma turma de segundo ano de Ensino Médio de escola pública e algumas questões retiradas da prova do SAEPE, realizadas pelos alunos do terceiro ano desse nível de ensino, porém de conteúdos abordados no primeiro e segundo anos.

O Teste de entrada consistiu em dez questões, com a questão 3 apresentando itens *a* e *b*, a questão 4 com os itens *a*, *b* e *c,* sendo as questões 1, 3, 4 e 6 dissertativas e as demais de múltipla escolha. Observa-se que apesar de envolverem conteúdos que os alunos já tinham estudado, nas questões dissertativas os acertos foram zero ou próximo de zero, com exceção da questão 3, letras *a* e *b*. Nas questões de múltipla escolha o resultado foi um pouco melhor, mas considerando que as questões, com exceção da 8, tinham cinco alternativas para escolha e apenas uma era correta, a probabilidade de se acertar o item sem ao menos ler é de vinte por cento, o percentual de acerto não ficou muito distante, além disso nas questões 7 e 8 o conteúdo não tinha sido trabalhado na escola, porém os acertos foram parecidos. Em resumo os alunos lembravam pouco ou quase nada do assunto. O índice de alunos que deixou as questões em branco foi muito alto, o que mostrou que eles não lembravam nada do assunto, pois sequer tentaram resolver.

O gráfico 1 mostra o percentual de alunos que deixaram o item em branco, separado por questão.

Gráfico 1 – Questões em branco no teste de entrada



Fonte: Elaborado pelo autor.

É perceptível que entre as questões dissertativas um percentual maior foi deixado em branco. Entre as questões de múltipla escolha, o percentual deixado em branco é menor, pois mesmo não sabendo respondê-la, basta apenas escolher uma resposta e marcar. Não foi levantado o motivo de baixo índice de acerto nesse teste.

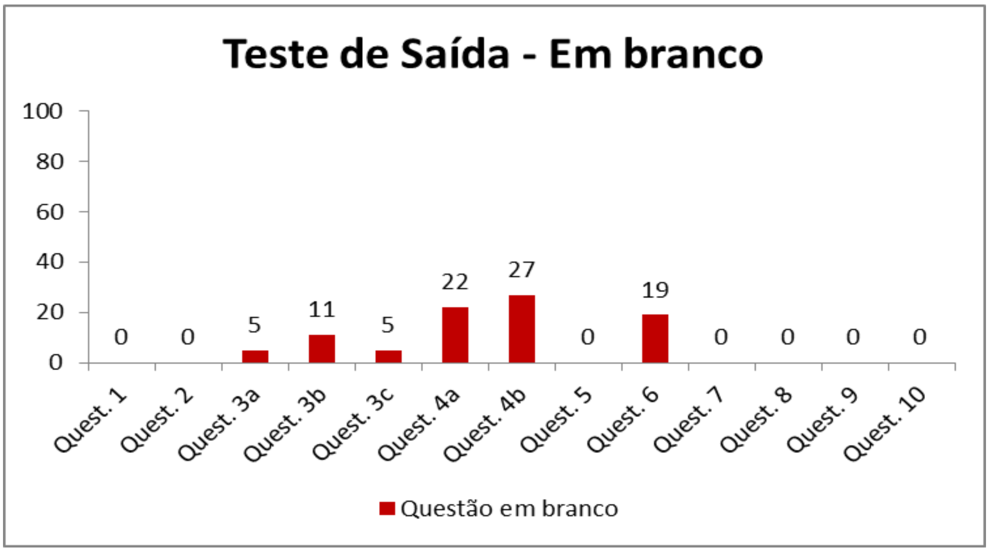
Durante as oficinas era perceptível o interesse de uma parte significativa dos alunos pelas aulas. Havia curiosidade em como baixar o software GeoGebra e como utilizá-lo. A forma dinâmica de como os gráficos eram apresentados e a quantidade de elementos em uma única tela, também chamavam a atenção.

Os dados do teste de saída mostram que todas as questões, com exceção da número 2, tiveram um aumento significativo com relação ao percentual de acertos do teste de entrada, porém nas questões 2, 3c, 4a, 4b, 6 e 7, o índice foi longe do ideal. Apesar disso o resultado é considerado bom, levando em consideração o resultado do teste de entrada e que os alunos não eram obrigados a realizar as atividades, pois não era atribuída nota relacionada ao percentual de acerto de cada um.

O índice de questões em branco diminuiu significativamente, o que mostra que apesar de não acertar a resposta, tinham noção do assunto e de alguma maneira responderam ou iniciaram a resposta, porém não concluíram.

O gráfico 2 mostra o percentual de alunos que não respondeu cada item, separado por questão.

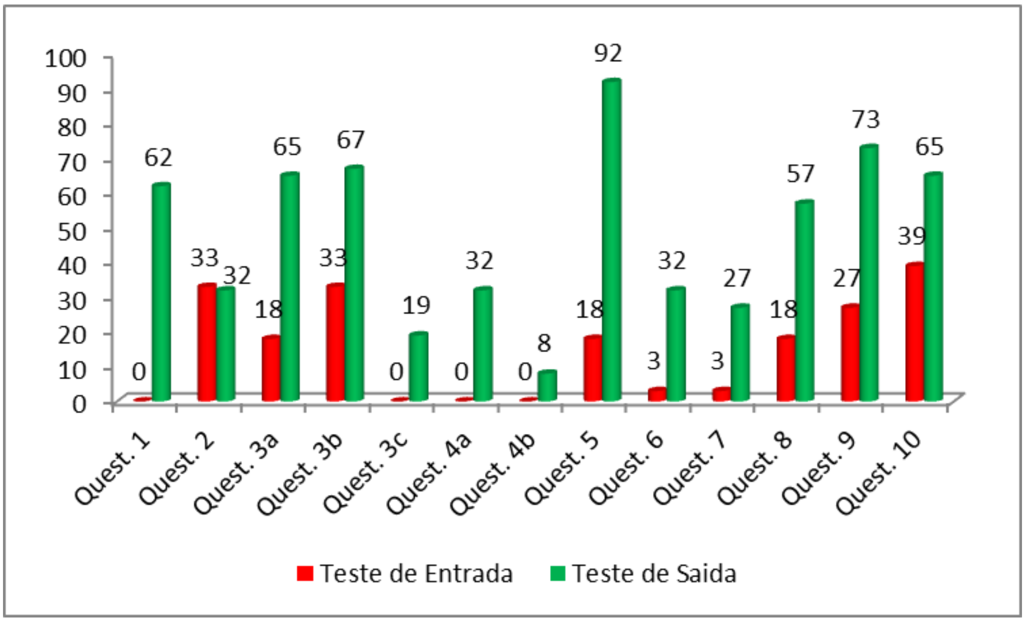
Gráfico 2 – Percentual de questões em branco no teste de saída



Fonte: Elaborado pelo autor.

O resultado da aprendizagem usando o método proposto é fácil de observar no gráfico 3, que mostra a diferença entre os percentuais de acerto de cada questão nos testes de entrada e de saída, dessa forma fica clara a evolução dos alunos após a realização das oficinas.

Gráfico 3 – Acertos nos testes de entrada e saída



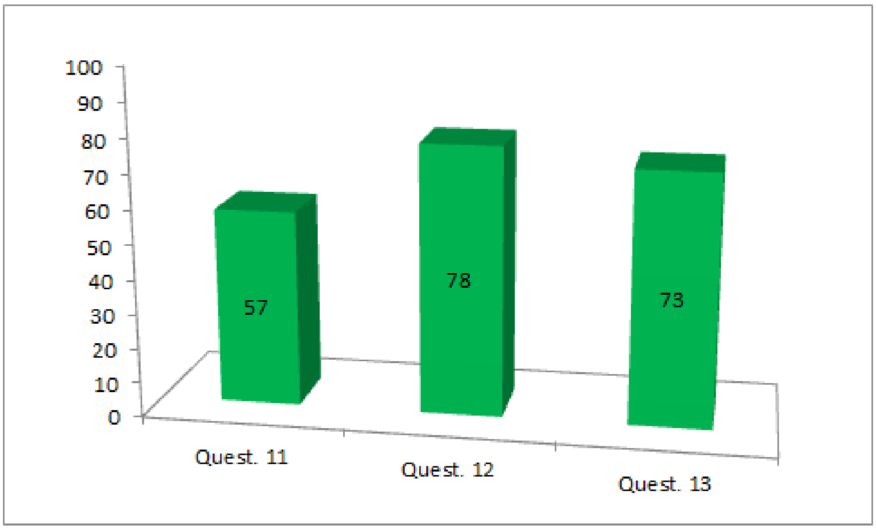
Fonte: Elaborado pelo autor.

O desempenho avaliado nas questões 11, 12 e 13 foram inclusos somente no teste de saída, pois o objetivo era avaliar a utilização da noção de Derivada na resolução de questões que envolvam ponto de máximo ou de mínimo, intervalo de crescimento e decrescimento da função quadrática. Nas três questões o percentual de acerto foi acima de 50% e o percentual médio de acerto ficou em 69,3%. Apesar de não poder fazer comparação, em virtude de os alunos desconhecerem o assunto e não fazer parte do teste de entrada, o resultado foi satisfatório, pois uma média igual a 69% é bem acima do resultado obtido pelos alunos do terceiro ano do Ensino Médio nas avaliações do Saepe realizadas por eles, envolvendo esse conteúdo.

Esse resultado deixa claro que o trabalho com Noção de Limite e Derivada, sem demonstrações rigorosas, é uma ferramenta que auxilia na compreensão e facilita a resolução de problemas envolvendo os elementos da função Quadrática. Os Pontos de máximo ou mínimo da função quadrática e seus intervalos de crescimento e decrescimento, além da concavidade são encontrados sem a necessidade de memorização de fórmulas ou grandes cálculos.

O gráfico 4, mostra o percentual de acerto obtido pelos alunos nas questões em que as soluções deveriam ser respondidas utilizando a ideia de derivada. As três questões eram de múltipla escolha, com cinco alternativas cada, porém grande parte dos alunos deixou os cálculos escritos no teste.

Gráfico 4 – Desempenho nas questões usando Derivada



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os PCN's (BRASIL, 1998) ponderam que não existe um método pronto para se ensinar, especialmente Matemática. É preciso buscar métodos e materiais que levem o aluno a ter uma visão mais ampla do que se está estudando e vivenciando, além disso, é necessário desenvolver habilidades que deem ao aluno o poder de provar resultados, testar seus efeitos e comparar diferentes caminhos para chegar a solução. Dessa forma os PCN's (BRASIL 2008, p. 42) acrescentam que:

> é consensual a ideia de que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, em particular, da Matemática. No entanto conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática.

Esse trabalho mostrou um método de ensino das funções afim e quadrática via GeoGebra e o uso de Derivada, que obteve um resultado satisfatório e que deve ser considerado como mais uma alternativa na difícil arte de ensinar Matemática e especificamente função. Com relação à utilização do computador como recurso didático, os PCN's (Brasil 2008, p. 44) afirmam que para "o bom uso se possa fazer do computador em sala de aula, depende da escolha de softwares, em função dos objetivos que se pretende atingir e da concepção de conhecimento e aprendizagem que orienta o processo".

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A diferença nos percentuais de acerto entre os testes de entrada e de saída mostrou que o uso do software GeoGebra no ensino das funções afim e quadrática traz um melhor aproveitamento do conteúdo trabalhado. O aluno tem uma visão ampla dos elementos dessas funções no que se refere à representação gráfica, isso fornece a ele um maior poder de interpretação e generalização.

O trabalho com a imagem da função, mostrando a maneira como ela se comporta, torna mais simples a compreensão. O fato de ser possível juntar vários gráficos e destacar os elementos necessários facilita o entendimento e torna o aprendizado mais significativo, porém é necessário cuidado para que o ensino de função não passe a ser apenas análise de gráficos e fique negligenciada a parte algébrica, que é de fundamental importância. Analisando os resultados foi perceptível a dificuldade de boa parte dos alunos nas questões que necessitavam de cálculo para se chegar à resposta.

O uso de softwares nas aulas de matemática, para melhorar o ensino/aprendizagem, ainda não é feito por grande parte dos profissionais, os motivos podem ser os mais variados, como: a falta do equipamento na escola; o professor não ter conhecimento para utilizá-lo; não acreditar nesse tipo de metodologia; porém foi notável a melhoria na qualidade da aprendizagem e até na atenção que foi dispensada pelos alunos ao trabalho ser realizado. Assim, o uso de novas metodologias, em consonância com as já existentes, se faz necessário para sanar as dificuldades relacionadas à aprendizagem de função.

O ensino de Matemática, e mais especificamente de função, não pode mais ser feito usando apenas papel, caneta, quadro branco e pincel, é necessária a adoção de novas metodologias, métodos e materiais que ofereçam ao aluno o direito de analisar criteriosamente os dados, verificar soluções, levantar hipóteses e testá-las, dentro do tempo cada vez mais corrido. Não é necessário que o professor use grande parte de sua aula construindo o gráfico de uma função, atribuindo pontos, e ainda não tenha uma visão ampla da situação se há a possibilidade de construir vários gráficos dentro de segundos usando o GeoGebra, porém é essencial que o discente compreenda como construí-los.

Não é o objetivo desse trabalho oferecer uma fórmula pronta para o ensino das funções afim e quadrática, até porque em algumas questões o resultado foi abaixo do esperado, mas é importante que os sistemas de ensino, as escolas ou os professores individualmente revejam suas práticas, pois a aprendizagem de nossos discentes está aquém da ideal, conforme mostra os Sistemas de Avaliação do Ensino Básico, como SAEPE, SAEB E ENEM.

A utilização da noção de Derivada na resolução de questões que envolvem pontos de máximo ou de mínimo, intervalos de crescimento e decrescimento e concavidade das funções quadráticas se mostrou uma maneira eficaz e rápida do aluno resolver esse tipo de problema sem a memorização de fórmulas ou desenvolvendo-as, uma tarefa que ainda não é fácil para os discentes do Ensino Médio.

Esse trabalho não tem como objetivo, fazer demonstrações de resultados sobre Limite e Derivada de funções, apenas apresentar ao Ensino Médio a noção desses conteúdos para que sejam utilizados na resolução de problemas envolvendo função quadrática. Porém é necessário cuidado para que os alunos não usem a noção de Derivada apenas mecanicamente, sem a devida compreensão.

Consideramos importante a realização dessa pesquisa, pois a partir dela foi possível perceber a importância do uso do software GeoGebra no ensino das funções afim e quadrática, além do uso da noção de Limite e Derivada para resolver problemas envolvendo função quadrática, porém percebemos o quão importante é o discente, além de interpretar e conhecer os elementos a partir do gráfico, saber realizar os cálculos que envolve o ensino de função. Notamos ainda que uma proposta de ensino merece ser estudada e melhorada sempre e que nunca servirá de receita para resolver os problemas da educação, mas pode se mais uma ferramenta para ajudar nessa tarefa árdua.

Vale salientar que a ideia dessa pesquisa não é dar o trabalho por encerrado, mas criar dúvidas, levantar discussões acerca do ensino das funções afim e quadrática, aos poucos chamar a atenção de todos que fazem a educação, desde a esfera governamental, que defende a utilização de novas metodologias, passando por coordenação, direção até chegar aos professores e professoras, dos quais depende diretamente a adoção desse ou daquele método ou material de ensino.

Essa pesquisa não deve se encerrar com esse trabalho, apenas dar uma pausa para conclusão dessa parte. Espera-se em trabalhos futuros analisar a formação de professores de Matemática. Se trabalhos relacionados são realizados na graduação desses profissionais, objetivando a formação de novos professores com metodologias mais eficazes do que fomos formados, além de estender o trabalho para outras funções como: função exponencial, logarítmica e funções trigonométricas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOSA, A. F. **Pesquisa sobre o uso das tecnologias de informação e comunicação nas escolas brasileiras : TIC Educação 2013 [livro eletrônico]** 1. ed. – São Paulo : Comitê Gestor da Internet no Brasil, 2014.. Disponível em <http://www.cetic.br/media/docs/publicacoes/2/tic-educacao-2013.pdf>. Acesso em 17de out. de 2015.

BATISTA, S. C. F. **Softmat: um repositório de softwares para Matemática do Ensino Médio – Um instrumento em prol de posturas mais conscientes na seleção de softwares educacionais**. 2004. 202f. Dissertação (Mestrado em Ciências da Engenharia). Universidade Estadual do Norte Fluminense – Uenf. Disponível em:< http://www.geogebra.im-uff.mat.br/biblioteca/dissertacao-batista-2004.pdf>. Acesso em: 01de nov. de 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. (3º e 4º ciclos do ensino fundamental)**. Brasília: MEC, 1998.

_______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio:** Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2000.

_______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Brasília: MEC,SEMTEC 2002.

_______. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+ Ensino Médio) - Ciências da Natureza Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, 2002.

_______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias** . volume. 2 Brasília: MEC, 2006.

DE MARIA, O. S. **Cálculo Diferencial no Ensino Médio: noções de limites, derivadas e aplicações**. 2013. 63f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal Rural do Semi-Árido Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação, Mossoró – RN. Disponível em: < http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/758/2011_00534_OTONIEL_SOARES_DE_MARIA.pdf?sequence=1>. Acesso em 03 de out. de 2015

GIRAFFA,L. M. M. **Uma Arquitetura de Tutor utilizando Estados Mentais.** 1999. 177f. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de

Informática. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/17620/000269142.pdf>. Acesso em: 25 de out. de 2015.

GRABARSKI, F.; FARIAS, J. D.; FARIA, J. C., **A derivada no ensino médio: Função quadrática e sua derivada.** 2009. 22f. Revista Tuiuti: Ciência e Cultura. Disponível em:<http://tcconline.utp.br/wp-content/uploads/2012/02/A-derivada-no-ensino-medio-funcao-quadratica-e-sua-derivada.pdf>. acesso em 03 de out. de 2015.

JUCÁ, S. C. S. A. *A* **Relevância dos Softwares Educativos na Educação Profissional***.* 2006. 7f. Artigo Científico, Centro Federal de Educação Tecnológica (CEFET – CE) Fortaleza - CE. Disponível em: <http://cienciasecognicao.org/pdf/v08/cec_vol_8_m32689.pdf>. Acesso em 03 de out de 2015

LIMA, C. E. O. **A Utilização do software Geogebra como ferramenta para o fnsino de funções.** 2013. 64f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal do Ceara – UFC, Pró-Reitoria De Pesquisa E Pós-Graduação, Centro De Ciências Mestrado Profissional em Matemática. Fortaleza - CE. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/tcc_get.php?cpf=01836711395&d=20160116163810&h=93a3f65250cda9250a93800fabf5085f0792dd84>. Acesso em 16 de jan. de 2016.

LIMA, E. L. et al, **A matemática do Ensino Médio Volume 1***,* 10. ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2012.

____. E. L. **Curso de Análise;**v.1. 14 ed. – Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2013.

MACIEL P. R. C., **A Construção do Conceito de Função Através da História da Matemática,** 2011, 107f. Dissertação de Mestrado, Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckuw da Fonseca – CEFET – RJ. Disponível em: <http://dippg.cefet-rj.br/index.php?option=com_docman&task=doc_download&gid=1143&Itemid=167>. Acessado em 13 de dez. de 15.

MACHADO,F. G. **Aplicações da Derivada de uma Função Real Sobre uma Perspectiva Histórica.** 2013. 70f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT. Teresina – PI. Disponível em : <https://sca.profmat-sbm.org.br/tcc_get.php?cpf=89552822300&d=20160116164232&h=1bddd87eaccce6440048ce2e9ce27de571bb3ca7>. Acesso em 16 de jan. de 2016.

MORAES, H. L. **Utilização do software Geogebra no estudo de pontos de máximo e pontos de mínimo de funções de uma variável.** 2013. 50f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Goiás Instituto de Matemática e Estatística Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/3243/5/disserta%C3%A7%C3%A3o

%20-%20Hugo%20Leonardo%20de%20Moraes%20-%202013.pdf>. Acesso em 03 de out. de 2015.

LOPES, J. J. **A Introdução da Informática no Ambiente Escolar.** 2004. 9f. Artigo Científico, Universidade Estadual Paulista "Campus" de Rio Claro Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Disponível em: <http://clubedoprofessor.com.br/artigos/artigojunio.pdf>. Acesso em 18 de out. de 2015

OKADA S., **Explorando Gráficos das Funções Elementares por Meio do Software Geogebra**, 2013, 82f. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Santa Cruz Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas. Ilhéus-BA. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/tcc_get.php?cpf=66631084849&d=20160116164537&h=f8780f20fe5e04c43eb7c162160c889970e89a6b>. Acesso em 16 de jan. de 2016.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio**. Recife: SE, 2012.

SODRÉ. U. **Matemática Essencial: Extremos de Funções Reais.** 2010, 15f. Artigo Cientifico. Departamento de Matemática – UEL. Londrina. PR. Disponível em: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/matzoo/minimaxi.pdf>. Acesso em 31 de dez. de 2015.

VALENTE, J. A. **Computadores e Conhecimento: Repensando a Educação**. Organizador. 2.ed. Universidade Estadual de Campinas, Núcleo de Informática Aplicada à Educação. Campinas. SP. 1998.

APÊNDICES

APÊNDICE A – TESTE DE ENTRADA

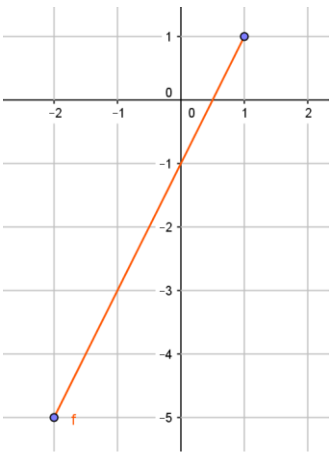
UNIVASF – Universidade Federal do Vale do São Francisco

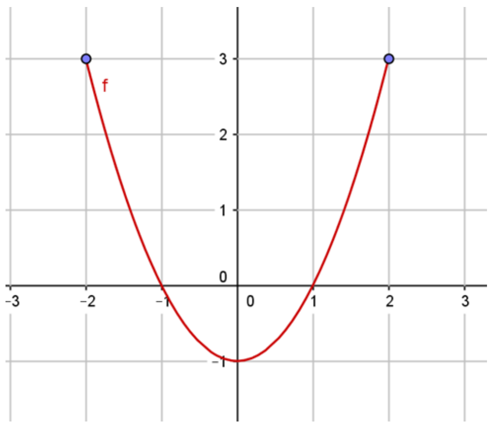
PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional

Avaliação de entrada da oficina para o Trabalho de Conclusão do Curso de Mestrado em Matemática em Rede Nacional

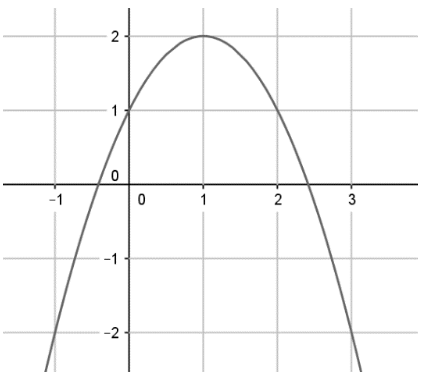
Aluno(a)____

1 – Os gráficos abaixo representam funções. Determine o conjunto domínio D e o conjunto imagem Im de cada um deles.





2 - O gráfico a seguir representa uma função quadrática f: ℝ — ℝ . Qual a lei dessa função?



a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$

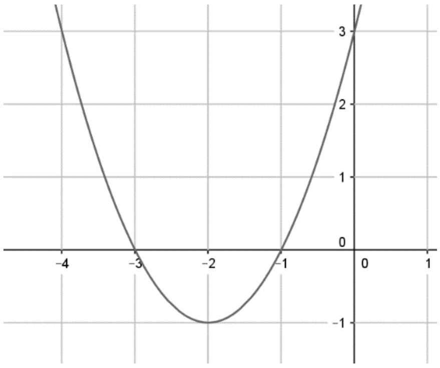
b) $f(x) = -x^2 + 2x + 1$

c) $f(x) = -x^2 + 2x -2$

d) $f(x) = x^2 - 3x -1$

e) $f(x) = x^2 + 4x + 1$

3 – No gráfico a segui está representada a função f : ℝ — ℝ, definida por $f(x) = x^2 + 4x + 3$, de acordo com os dados responda:

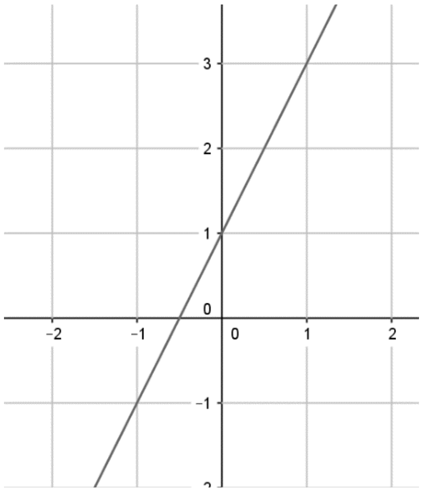


a) Essa função possui valor máximo ou mínimo? Qual esse valor?

b) Quais os zeros dessa função?

c) Em quais intervalos essa função é crescente? E decrescente?

4 – N o gráfico abaixo está representado a função g: ℝ — ℝ, definida por $g(x) = 2x +1$.

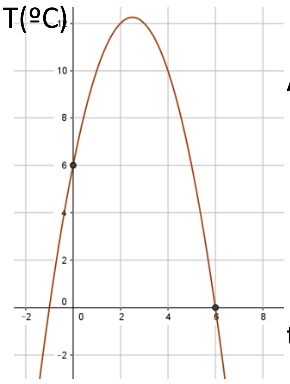


a) Dê dois exemplos (lei da função) de retas paralelas a reta dada.

b) Dê dois exemplos (lei da função) de retas perpendiculares a reta dada

5 - (Saepe 2011) Para economizar energia, um supermercado desliga uma câmara fria por algumas horas e depois a religa, de forma que entre meia noite (0 hora) e seis horas da manhã, a temperatura (T), em graus Celsius, em função do tempo (t), em horas, é controlada e varia de acordo com a expressão $T(t) = –t^2 + 5t + 6$, cujo gráfico está representado abaixo.

T(ºC)



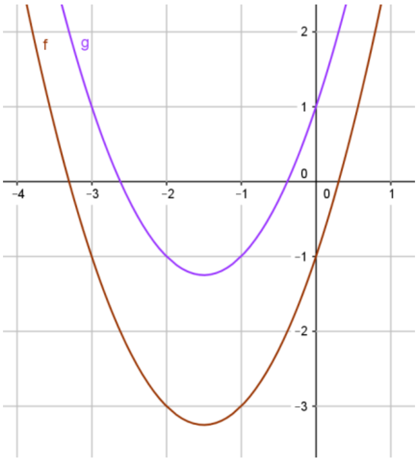
t(horas)

A temperatura (T) é máxima para o tempo (t), em horas, igual a:

A) 2,5 B) 3 C) 5

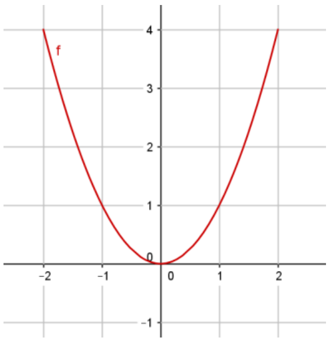
D) 12 E) 12,25

6 – As funções quadráticas f e g: ℝ — ℝ estão representadas no gráfico abaixo. Se f(x) = $x^2 + 3x - 1$, qual a lei da função g?

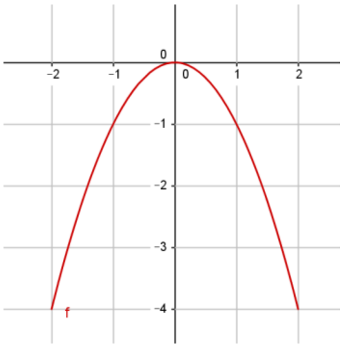


7 – Entre as funções representadas nos gráficos abaixo identifique aquela que é bijetiva:

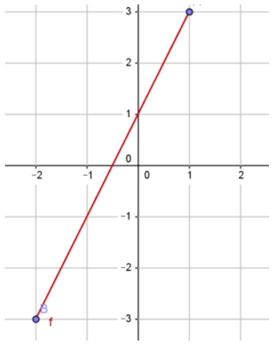
a)



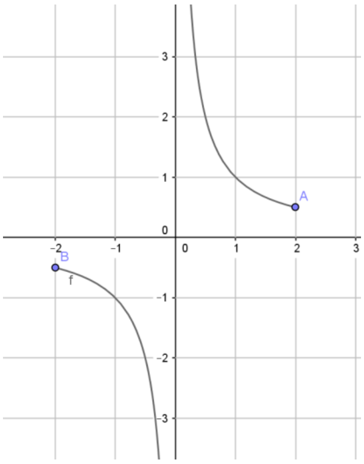
b)



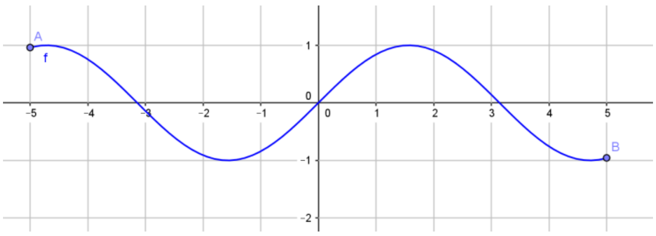
c)



d)

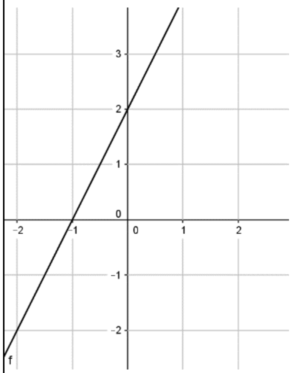
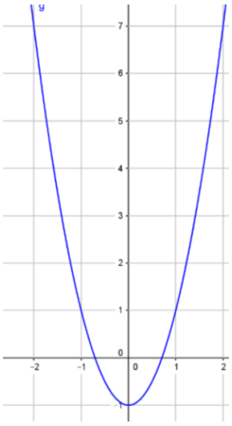
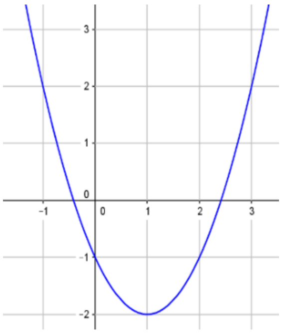
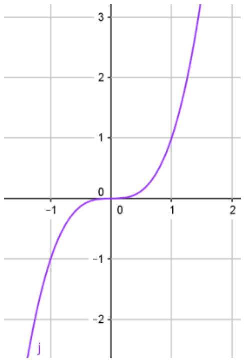


e)



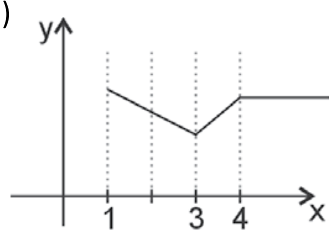
8 – Qual dos gráficos abaixo representa uma função par?

a) $f(x) = 2x+2$ b) $g(x) = 2x^2 - 1$ c) $h(x) = x^2 - 2x - 1$ d) $j(x) = x^3$

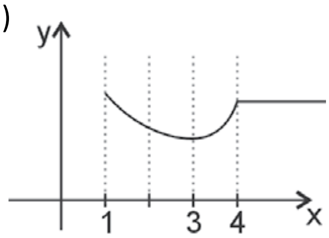





9 - (Saepe 2012) A função $y = f(x)$ é crescente para $1 \leq x < 3$, decrescente para $3 \leq x < 4$ e é constante para $x \geq 4$. O gráfico que mais adequadamente representa a função $y = f(x)$ é

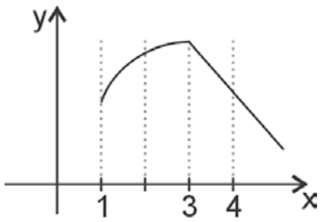
a)



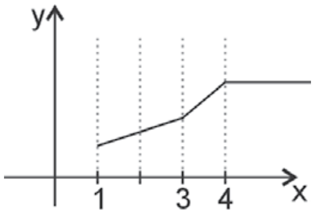
b)



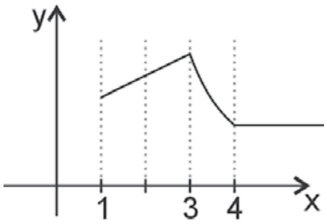
c)



d)

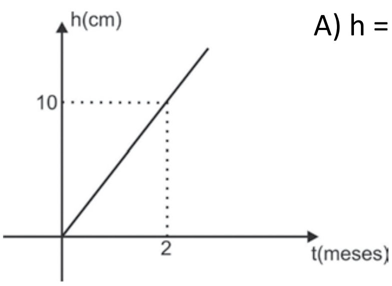


e)



10 - (Saepe 2012) O gráfico seguinte representa a altura (h) de uma planta, dada em centímetros, em função do tempo (t), expresso em meses.

A expressão algébrica que representa a função esboçada é



A) $h = 5t$ B) $h = t + 5$ C) $h = 2t + 5$
D) $h = 5t + 10$ E) $h = 10t + 2$

APÊNDICE B – TESTE DE SAÍDA

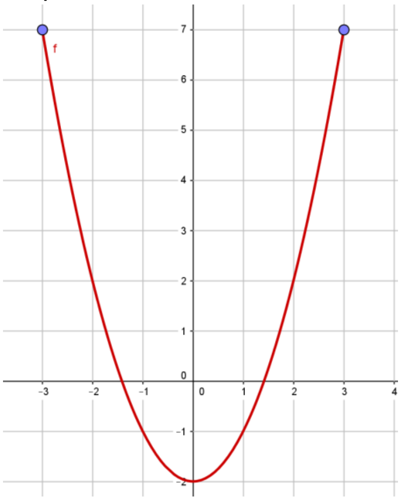
UNIVASF – Universidade Federal do Vale do São Francisco

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional

Avaliação de saída da oficina para o Trabalho de Conclusão do Curso de Mestrado em Matemática em Rede Nacional

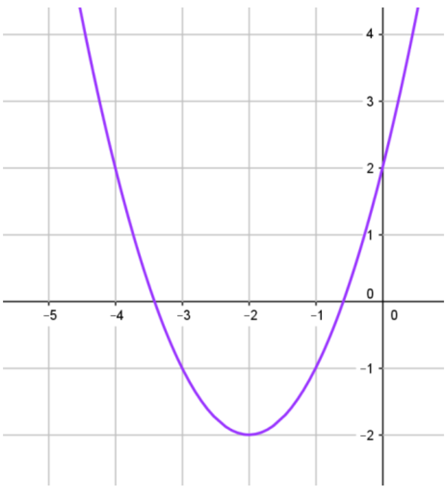
Aluno(a)____

1 – A os conjuntos domínio e imagem da função representada no gráfico abaixo são respectivamente:



a) D = {x є R/ -2 ≤ x ≤ 7} e Im = {y є R/ -2 ≤ x ≤ 7}
b) D = {x є R/ -3 ≤ x ≤ 3} e Im = {y є R/ -2 ≤ x ≤ 7}
c) D = {x є R/ -2 ≤ x ≤ 2} e Im = {y є R/ -3 ≤ x ≤ 3}
d) D = {x є R/ -3 ≤ x ≤ 0} e Im = {y є R/ 0 ≤ x ≤ 7}
e) D = {x є R/ 0 ≤ x ≤ 3} e Im = {y є R/ -2 ≤ x ≤ 0}

2 - O gráfico a seguir representa uma função quadrática $f: \mathbb{R} — \mathbb{R}$. Qual a lei dessa função?



a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$

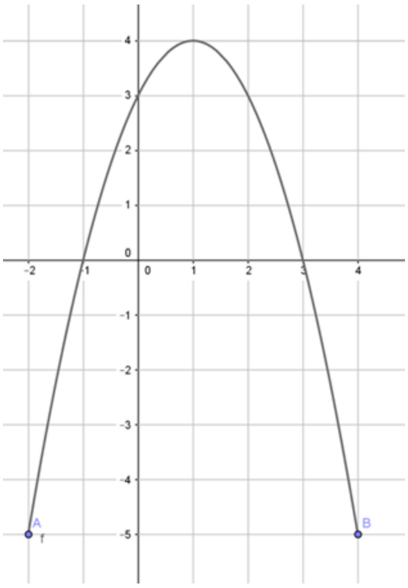
b) $f(x) = -x^2 + 2x + 1$

c) $f(x) = -x^2 + 2x -2$

d) $f(x) = x^2 - 3x -1$

e) $f(x) = x^2 + 4x + 2$

3 - No gráfico a segui está representada a função f : ℝ → ℝ, definida por f(x) = -x² + 2x + 3, de acordo com os dados responda:

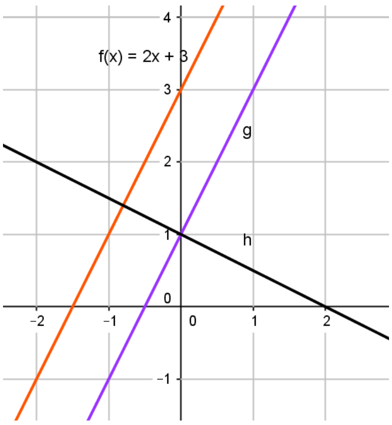


a) Essa função possui valor máximo ou mínimo? Qual esse valor?

b) Quais os zeros dessa função?

c) Em quais intervalos essa função é crescente? E decrescente?

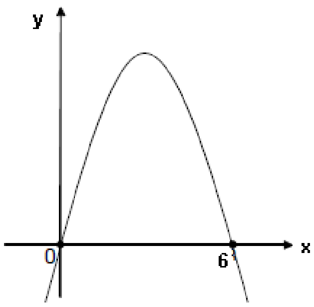
4 – No gráfico abaixo estão representadas as f , g, h: ℝ → ℝ. Se f(x) = 2x + 3 responda:



a) Qual a lei da função g?

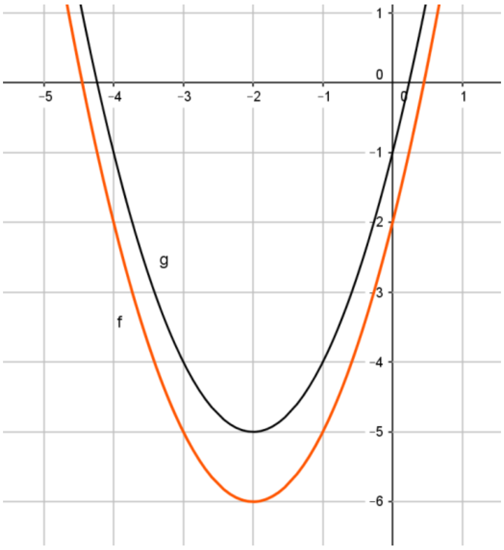
b) Qual a lei da função h, sendo h perpendicular a g?

5 - Uma bola colocada no chão é chutada para o alto, percorre uma trajetória descrita por $y = -2x^2 + 12x$, onde y é a altura e x é o alcance, em metros, está representada no gráfico abaixo.



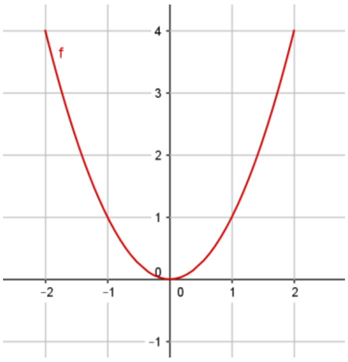
Nessas condições, a altura máxima atingida pela bola é
(A) 48 metros.
(B) 144 metros.
(C) 18 metros.
(D) 72 metros.
(E) 36 metros.

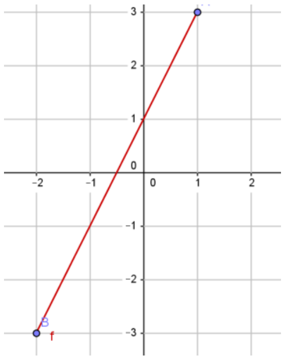
6 – As funções quadráticas f e g: $\mathbb{R}$ — $\mathbb{R}$ estão representadas no gráfico abaixo. Se $f(x) = x^2 + 4x - 2$, qual a lei da função g?

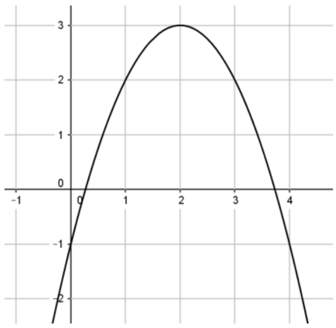


7 – Em qual dos gráficos abaixo está representado uma função sobrejetiva:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ b) $f: [-2,1] \to [-3,3]$, $f(x) = 2x + 1$ c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 4x + 1$

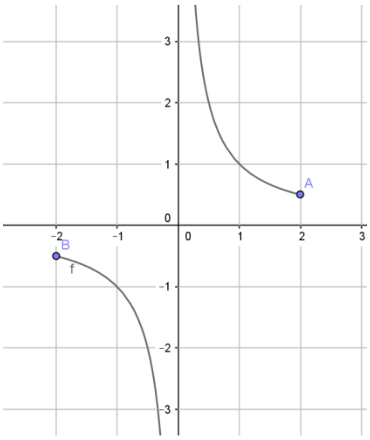


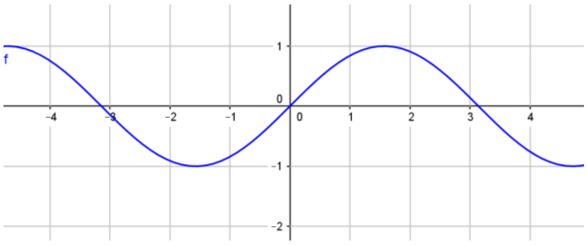




d) $f: [-2,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$

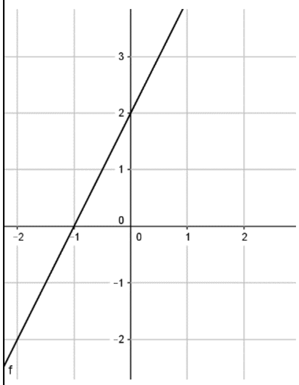
e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = sen(x)$



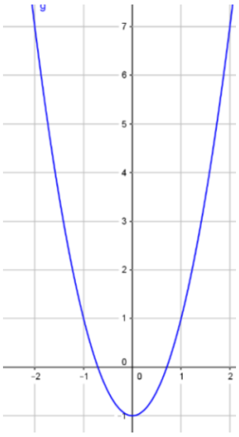


8 – Nos gráficos abaixo estão representadas funções reais, qual deles representa uma função ímpar?

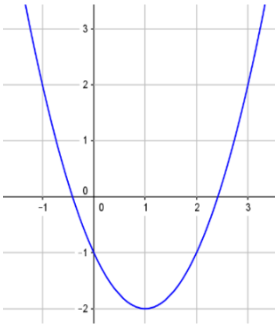
a) $f(x) = 2x+2$



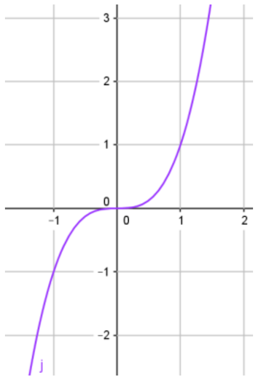
b) $g(x) = 2x^2 - 1$



c) $h(x) = x^2 - 2x - 1$

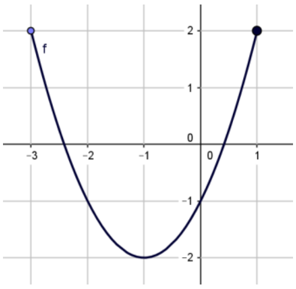


d) $j(x) = x^3$

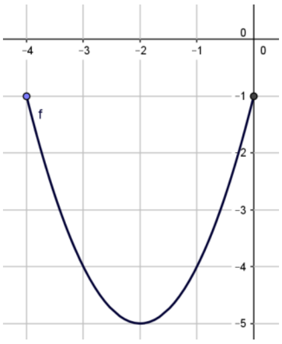


9 – A função f é decrescente em $-4 \leq x \leq -2$, crescente em $-2 \leq x \leq 0$ e ponto crítico em $x = -2$. Qual dos gráficos abaixo melhor representa a função f?

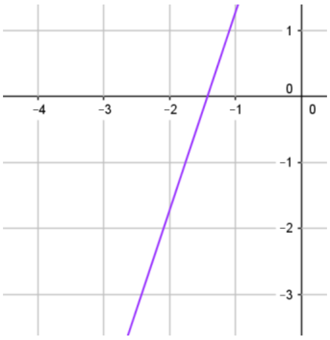
a)



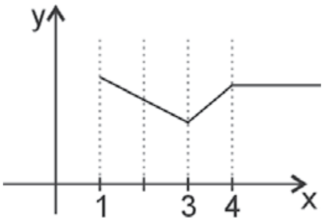
b)



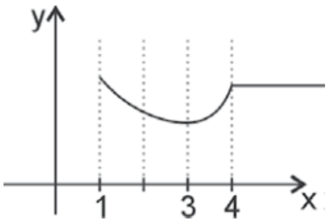
c)



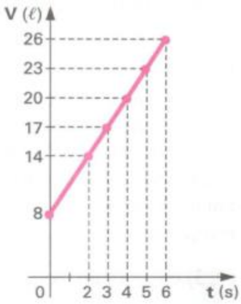
d)



e)



10 - Os mecânicos de um carro durante um abastecimento perceberam que o tanque tinha 8 litros de gasolina. A bomba injetava 3 litros por segundo. O gráfico abaixo representa esta situação.



A expressão algébrica que representa a função esboçada é:

(A) $V(t) = 3 \cdot t + 8$

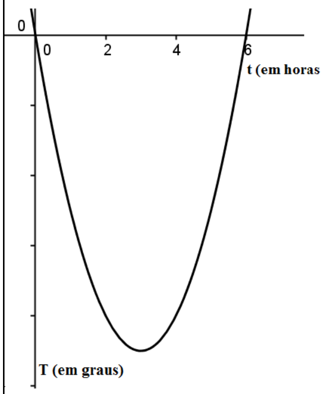
(B) $V(t) = 8 \cdot t + 3$

(C) $V(t) = 6 \cdot t + 26$

(D) $V(t) = 8 \cdot t + 26$

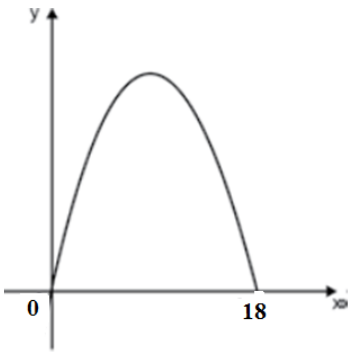
(E) $V(t) = 2 \cdot t + 6$

11 Suponha que, num dia de outono, a temperatura f (t), em graus, era uma função do tempo t, medido em horas, dada por f (t) = t^2 - 6t. Qual a temperatura mínima atingida nesse dia?



A) - 3 graus .
B) - 9 graus.
C) 12 graus.
D) - 6 graus.
E) 0 graus

12- (Saepe) Uma bala é atirada de um canhão e sua trajetória descreve uma parábola de equação y = - 5x^2 + 90x, onde x é o tempo medido em horas e y a altura medida em metros.



Nessas condições, a altura máxima atingida pela bala é
A) 30 m.
B) 40,5 m.
C) 81,5 m.
D) 405 m.
E) 810 m.

13 – No Item anterior em que intervalos de tempo a bala está subindo (função crescente) e descendo (função decrescente)?

A) Subindo -1 ≤ x ≤ 3 e descendo 3 ≤ x ≤ 10
B) Subindo 0 ≤ x ≤ 10 e descendo 12 ≤ x ≤ 18
C) Subindo 18 ≤ x ≤ 9 e descendo 9 ≤ x ≤ 0
D Subindo 0 ≤ x ≤ 18 e descendo 18 ≤ x ≤ 0
E) Subindo 0 ≤ x ≤ 9 e descendo 9 ≤ x ≤ 18