UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

EDNALDO HERMES DA SILVA

O RACIOCÍNIO INTUITIVO NA ELABORAÇÃO DE EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA: Um instrumento para o aprendizado de Indução Finita no Ensino Médio

Juazeiro - BA
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Ednaldo Hermes da Silva

O RACIOCÍNIO INTUITIVO NA ELABORAÇÃO DE EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA: Um instrumento para o aprendizado de Indução Finita no Ensino Médio

Dissertação apresentada à Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Ms. Nancy Lima Costa.

Juazeiro, BA
2015

Silva, Ednaldo Hermes da.

S586a O raciocínio intuitivo na elaboração de equações de recorrência: Um instrumento para o aprendizado de indução finita no ensino médio / Ednaldo Hermes da Silva. – Juazeiro, 2015

75 f.: il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro - BA, 2015.

Orientadora: Professora. Ms. Nancy Lima Costa.

1. Matemática – Ensino Médio*. 2.* Professores - Formação*. 3. Indução Finita.* I. Título. II. Universidade Federal do Vale do São Francisco.

CDD 515.25

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Biblioteca SIBI/UNIVASF
Bibliotecária: Ana Paula Lopes da Silva

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

Universidade Federal do Vale do São Francisco

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT/UNIVASF

PROFMAT

O RACIOCÍNIO INTUITIVO NA ELABORAÇÃO DE EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA: Um instrumento para o aprendizado de Indução Finita no Ensino Médio

Por:

EDNALDO HERMES DA SILVA

Dissertação aprovada em 14 de maio de 2015.

Nancy Lima Costa

Profa. Msc. Nancy Lima Costa
Orientadora - UPE

Felipe Wergete Cruz

Prof. Dr. Felipe Wergete Cruz
Examinador Interno - PROFMAT - UNIVASF

Aníbal L. S. Netto

Prof. Dr. Aníbal Livramento da Silva Netto
Examinador Externo – CENMEC - UNIVASF

Juazeiro
2015

“A ciência nada mais é do que o senso comum refinado e disciplinado.”

G. Myrdal

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, pelo carinho e apoio.

À Univasf e à SBM pela oportunidade concedida para a realização do curso.

À professora Nancy Lima Costa pela valiosa orientação.

Aos professores do curso PROFMAT.

Aos colegas de turma, pelas boas lembranças e coleguismo.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos uma sequência didática elaborada para um grupo de estudantes do 1º ano do ensino médio, na faixa etária de 15 a 18 anos. O trabalho apresenta uma metodologia de ensino de Indução Finita e tem como objetivo mostrar a existência de conteúdos que são prazerosos e revelam uma nova face da Matemática. O raciocínio intuitivo é a principal ferramenta empregada na abordagem desse conteúdo, o qual é desenvolvido por meio de analogias com fatos concretos, através de atividades que estimulam a formação de conjecturas utilizando o trabalho com padrões. Após o desenvolvimento das atividades, é feita uma avaliação do trabalho desenvolvido em sala de aula, onde verificamos que o índice de acertos nos problemas de aplicação do Princípio de Indução é expressivo, contando as questões com acertos integrais e levando em consideração a compreensão do Princípio e o raciocínio correto dos estudantes. Por fim, fazemos comentários sobre as impressões observadas e tecemos algumas sugestões para trabalhos futuros na área.

Palavras-chave: Padrões, conjectura, sequências.

ABSTRACT

This paper presents an instructional sequence prepared for a group of students of the 1st year of high school, aged 15-18 years. The paper presents a methodology for teaching Finite Induction and aims to show the existence of contents that are pleasurable and reveal a new face of mathematics. Intuitive Reasoning is the main tool used to address this content, which is developed through analogies with concrete facts, through activities that stimulate the formation of conjectures using the work with existing standards. After the development of activities, an assessment of the work developed in class is done, where find that the whole hit rate in application problems of the induction principle is expressive, considering questions with full arrangements and taking into account the understanding of the Principle and the correct reasoning of students. Finally, we comment on the observed impressions and make suggestions for future work in the area.

Keywords: Standards, conjecture, sequences.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE APÊNDICE

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), um dos objetivos do ensino de Matemática é desenvolver o raciocínio lógico. No entanto, o que observamos frequentemente é um ensino voltado para o aprendizado das técnicas de resolução de problemas e aplicações imediatas na ciência e tecnologia. Essa ideia pragmática está diretamente relacionada com o conceito que temos dessa disciplina, e sobre o que é a Matemática bem como o seu enfoque, Janos (2009, introdução), descreve o seguinte:

> Matemática não é sobre símbolos nem cálculos. Símbolos são ferramentas e, assim como a música não é uma sequência de notas, a Matemática não é sobre símbolos. Matemática também não é sobre cálculos. Cálculos são processos que levam a algum resultado. De fato, atualmente, quase todos os cálculos ficam para as máquinas. Genericamente podemos dizer que a Matemática é sobre ideias.

Nessa perspectiva, ensinar técnicas de resolução de problemas e aplicação de fórmulas, além de fazer do aprendizado um processo mecânico, desestimula e tolhe a imaginação do estudante, tirando o direito do mesmo de vivenciar o conhecimento e saborear o prazer da descoberta. Conforme nos assegura Janos (2009), a maneira como a Matemática é ensinada nas escolas, não desperta o interesse da maioria dos estudantes pela simples razão de que o que se ensina não são ideias. E acrescenta afirmando que o teor ensinado na escola é uma série de habilidades para resolver problemas práticos e dicas para passar nas provas de vestibulares, ou seja, um treinamento e não uma educação em Matemática.

É adotando essa metodologia, que se deixa de abordar conteúdos que são a base da Matemática, ou do que ela é, em essência. Um desses conteúdos é Indução Finita, também denominada de Indução Matemática. Segundo Hefez (2009), é com o conceito de Indução que se estabelece o primeiro contato com a noção de infinito em Matemática. Todos os conjuntos numéricos, por exemplo, contêm infinitos elementos. Como exemplo de conjuntos e infinidade, Courant (2000, p. 12) assegura que “a sequência de inteiros representa o exemplo mais simples e natural do infinito matemático, que desempenha um papel dominante na Matemática moderna”. No Ensino Médio, aparecem as Sequências e as soma de Progressões Geométricas infinitas. Muitas questões das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), abordam questões onde o estudante precisa generalizar uma lei de formação que gere números ou figuras sob determinado padrão.

Por isso, abordaremos Indução Finita no Ensino Médio, e para que seu aprendizado se torne mais natural, faremos inicialmente uma abordagem intuitiva. Isto será feito, por meio de atividades didáticas que explorem a observação de sequências numéricas e de figuras, para que os estudantes percebam os padrões encontrados em uma quantidade de casos isolados, e consequentemente, possam induzir o comportamento geral. Segundo Vale (2011), devemos evidenciar resolução de atividades baseadas na exploração de padrões através de múltiplas representações, privilegiando contextos visuais e figurativos, para que se possa emergir a generalização, que é uma das componentes mais importantes do conhecimento matemático e a base do pensamento algébrico. Afinal, segundo Sandefur & Camp, (2004) apud Vale (2011), os padrões são a essência da matemática, e esta, a linguagem que as expressa. E ainda: “o próprio objetivo da matemática é, em certa medida, descobrir a regularidade onde parece vingar o caos, extrair a estrutura e a invariância da desordem e da confusão” (DAVIS & HERSH, 1995, p. 167, apud VALE, 2011, p. 02).

Além disso, para adquirir o conhecimento matemático, Vale (2011) afirma que se deve recorrer a uma ferramenta inata que crianças e jovens adultos possuem, que é uma forte intuição visual de ideias e conceitos matemáticos. Para completar, Janos (2009, p. 40) nos assegura que “a intuição está presente em toda parte na matemática e nenhuma filosofia pode ignorá-la”, e para que isso ocorra, Lorenzato (2010, p. 20), afirma que, “assim como é preciso abrir mão do rigor para se conseguir o rigor, para se alcançar a abstração, é preciso começar pelo concreto”. Ainda sobre o caminho a ser percorrido para adquirir o aprendizado, Lorenzato (2010, p. 72) descreve: “Na escola, a experimentação é um processo que permite ao aluno se envolver com o assunto em estudo, participar das descobertas e socializar-se com os colegas”. Vale esclarecer nesse momento, que ao se falar em experimentação e em fatos concretos, não estamos nos restringindo a objetos palpáveis. Essa ideia é bem mais abrangente:

> Inicialmente, a experimentação pode ser concebida como a ação sobre objetos (manipulação) com valorização da observação, comparação, montagem, decomposição (separação), distribuição. Mas, a importância da experimentação reside no poder que ela tem de conseguir provocar raciocínio, reflexão, construção de conhecimentos. (LOZENZATO, 2010, p. 72).

O próprio Lorenzato (2010, p. 72), já citado, assevera ainda que “a experimentação facilita que o aluno levante hipóteses, procure alternativas, tome novos caminhos, tire dúvidas e constate o que é verdadeiro, válido, correto ou solução”. E acrescenta afirmando que a experimentação valoriza o processo de construção do saber em vez do resultado, pois, na formação do estudante, mais importante que conhecer a solução é saber como encontrá-la. Esse processo de aprendizagem desempenha um papel ainda mais contundente no estudo de Indução Finita, pois este conteúdo requer uma associação entre a Indução Empírica, conhecimento adquirido por experiência, e a Indução Matemática, fornecido por meio do raciocínio lógico. E para que isso aconteça de fato, é necessário que o estudante estabeleça relações entre o mundo concreto e o mundo das representações, sendo este último dado por meio de expressões algébricas e fórmulas matemáticas.

Para tornar o conceito de Indução mais familiar e facilitar o entendimento, será feito um enfoque intuitivo e detalhado, através de problemas clássicos e exemplos. Tudo para que o estudante se acostume aos poucos com o significado e a sutileza do método de Indução Finita. O objetivo principal dessa abordagem é o mais básico do ensino de Matemática: desenvolver o raciocínio lógico e estimular o desejo de criação e indagação.

Este trabalho está dividido em três partes. O primeiro capítulo é dedicado à Fundamentação Teórica, na qual apresentamos Indução Finita, mostramos sua essência e finalidade, e detalhamos seu estudo por meio de analogias com fatos reais e conhecidos. Ainda nesse capítulo, falamos sobre o Princípio de Indução Finita, fundamentando-o e fazendo uma descrição detalhada do mesmo. Em seguida, abordamos as Sequências Numéricas e as Recorrências, elementos fundamentais para o Princípio de Indução Finita. Finalizamos esse capítulo falando sobre a importância da intuição enquanto construtora de conteúdos e como base para a sistematização da Matemática, descrevendo-a ainda como elemento principal na formação de conjecturas.

O segundo capítulo é destinado ao Desenvolvimento das Atividades. Para a sua realização, empregamos uma série de atividades começando com exercícios sobre padrões, seguido por Equações de Recorrências, para culminar na apresentação de Indução Finita e suas aplicações. Por fim, finalizamos esta etapa com a avaliação, a qual contém o resumo dos resultados alcançados e comentários sobre os fatos observados durante o decorrer do trabalho.

No terceiro capítulo fazemos as Considerações Finais, na qual relatamos as experiências e compartilhamos as impressões vivenciadas durante todo o decorrer do projeto, além de escrever sugestões para trabalhos futuros na área.

1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1.1. INDUÇÃO FINITA

Muitas das pessoas conhecem a brincadeira das peças enfileiradas de dominó que vão caindo e derrubando as seguintes, formando um “movimento corrente”. As peças são colocadas em pé, dispostas a uma distância tal uma da outra, fazendo com que a queda de qualquer uma delas implique na derrubada da seguinte, imediatamente mais próxima. Pela disposição das mesmas na fileira, sabe-se que a queda de cada peça acarreta na queda da peça seguinte, reação que acontece em cadeia, até o final da fileira.

Mas, e se essa fileira de peças não tiver um fim? Esse processo vai prosseguir até quando? Daqui fazemos duas perguntas que podem surgir e que são naturais a esse processo:

1º A queda de uma peça qualquer, implica na derrubada da peça seguinte?
2º Esse processo se repete indefinidamente?

Para responder às perguntas anteriores, estabeleceremos uma correspondência biunívoca entre cada peça de dominó e um número inteiro positivo. Assumiremos ainda que, tomando as peças ordenadamente e a partir da primeira, cada uma delas corresponde a números inteiros positivos, sequencialmente, e também a partir do primeiro. Dito de outro modo, dada uma peça qualquer da fileira, é possível apontar qual é a imediatamente anterior ou posterior, e, uma vez que cada uma das peças são objetos inteiros e pela analogia feita acima, correspondem a números inteiros. Desse modo, a fileira de peças de dominó corresponde a uma sequência numérica.

Outro exemplo notável no qual se usa o conceito de sequência discreta em cadeia é a própria formação dos números naturais. Dentre todos os números que o ser humano já considerou, os números naturais foram os primeiros a serem criados, inicialmente com o intuito de contar. “Apesar de serem os mais simples, não quer dizer que eles sejam totalmente entendidos, havendo ainda muitos mistérios que os cercam a serem desvendados.” (HEFEZ, 2009, p. 10).

Vamos aproveitar a ocasião para fazer algumas observações acerca do conjunto dos números naturais. Faremos uma descrição de uma das formas de se obter cada número desse conjunto. Por isso vamos utilizar um exemplo contido em Hefez (2009) e mostrado na tabela seguinte.

Tabela 1. Formação dos números naturais.

NÚMERO NATURAL	COMO OBTER
1	1 – Por definição. Coleção com um único objeto.
2	1 + *1*
3	2 + *1*
4	3 + *1*
5	4 + *1*
...	...

Fonte: Hefez, 2009, Indução matemática.

Analisando a tabela acima, a partir da formação do segundo número natural, observamos que isto se dá sempre acrescentando uma unidade ao número imediatamente anterior. Intuitivamente sabemos que isso é sempre verdade. Então, expressamos oralmente os dados mostrados na tabela 1 da seguinte maneira:

Dois é igual a um, somado com 1; três é igual a dois somado com 1; quatro é igual a três somado com 1; e assim por diante.

A última expressão, “e assim por diante”, é dita com total certeza de compreensão. Ela denota a ideia de generalização de que todos os números naturais são obtidos sempre somando 1 ao número imediatamente anterior. Essa expressão é resumida pelo uso das reticências, as quais, de acordo com Hefez (2009), são ponto chave na determinação dessa sequência de números.

1.2. PRINCÍPIO DE INDUÇÃO FINITA

No que concerne a métodos de comprovação em Matemática, a compreensão por si só não é suficiente, sendo necessário a existência de uma prova fornecida por meio de um raciocínio lógico. Tomando como exemplo o processo de formação dos números naturais, conforme mostrado na seção anterior, Hefez (2009) afirma que devemos apresentar propriedades que o caracterizem de modo inequívoco. Denominando o conjunto dos números naturais por N, Lima et al, (2006, p. 34) comenta: "A essência da caracterização de N reside na palavra "sucessor". Intuitivamente, quando n, n' $\in$ N, dizer que n' é o sucessor de n significa que n' vem logo depois de n, não havendo outros números naturais entre n e n' ". Ainda segundo Lima et al (2006, p. 35), o uso e as propriedades da ideia de sucessão foram sintetizadas pelo matemático italiano Giuseppe Peano em 1889 da seguinte forma:

> a) Todo número natural possui um único sucessor;
> b) Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes
> c) Existe um único número natural, chamado um e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro;
> d) Seja X um conjunto de números naturais (isto é $X \subset N$). Se 1 ϵ X e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então X=N.

Sobre o conjunto N dos números naturais, há uma discussão acerca do primeiro número que o compõe. Segundo Lima et al, (2006) incluir ou não o número zero no conjunto N é uma questão de preferência pessoal ou de conveniência. Se o autor for um algebrista, que está interessado no estudo das operações, a inclusão do zero fornecerá um elemento neutro e permitirá que a diferença $x - y$ seja uma operação fechada em N, quando $x \geq y$. Então, o zero fará parte desse conjunto pois facilitará as operações e eliminará algumas exceções. Por outro lado, ainda de acordo com Lima (2006), em análise costuma-se trabalhar com sequências $x_1, x_2, x_3, \dots$ que tem por índice números naturais, e associar o conjunto N={0, 1, 2, ...} ao conjunto $x_1, x_2, x_3, \dots$, faz com que x_n não seja o *n*-ésimo, mas o *n+1*-ésimo termo. Para evitar essa discrepância, um analista adota o conjunto dos números naturais como N={1, 2, 3, ...}. Neste trabalho, precisaremos associar conjuntos de objetos com o conjunto dos números naturais. Para que o objeto a_n de uma coleção $a_1, a_2, a_3, \dots$ a qual começamos a contar a partir do primeiro esteja associado ao *n*-ésimo número natural, é preciso que definamos o conjunto dos naturais como: N={1, 2, 3, ...}.

Os Axiomas de Peano são a base de um eficiente método de demonstração de proposições referentes a números naturais: O Princípio de Indução Finita. Este Princípio, também é conhecido por Princípio de Indução Matemática, é uma técnica de prova que verifica a validade de uma proposição para *n* baseada na validade da proposição para valores menores que *n* e é usada para mostrar que uma dada afirmação é verdadeira para todos os naturais. Dito de outro modo, é usada para generalizar propriedades, notadamente válida para alguns casos particulares, estendendo para todo o conjunto de objetos ou entes em estudo.

> Neste método baseamos nosso raciocínio em casos particulares como forma de obter uma conclusão geral. A prova por indução, diferentemente da prova por dedução, não conduz a nova fórmula ou uma nova verdade matemática. Ela é uma metodologia de raciocínio, que parte de uma premissa aceita como verdadeira, e resulta em conclusões que podem ser aceitas como verdadeiras. (JANOS, 2009, p. 42).

Procede-se dessa maneira, pois seria impossível, por exemplo, verificar um por um, que o quadrado de um número ímpar é sempre ímpar. Portanto, é necessário um método eficaz, rápido, e ao mesmo tempo rigoroso para realizar esta verificação. Sob a forma de propriedades, Lima et al (2006, p. 37), enuncia o Princípio de Indução Finita como:

> Seja P(n) uma propriedade relativa aos números naturais. Suponhamos que
> i) P(1) é válida;
> ii) Para todo n ϵ N, a validez de P(n) implica a validez de P(n’), onde n’ é o sucessor de n.
> Então P(n) é válida qualquer que seja o n.

É fazendo uso desse Princípio que provamos a validade da maior parte das expressões no campo dos números inteiros. Especificamente neste trabalho, este é o método de prova que utilizaremos para demonstrar que todo conjunto de objetos matemáticos possui propriedades observadas ou desenvolvidas a partir da intuição. Ainda sobre o papel do método de Indução, Hefez (2009) diz que ao mesmo tempo em que o Princípio de Indução Finita faz estabelecer o primeiro contato com o infinito em Matemática, ele é ao mesmo tempo, sutil e delicado. Por isso mesmo, precisaremos fazer um estudo detalhado e progressivo sobre o mesmo.

Como é possível que apenas duas condições sejam suficientes para demonstrar uma sequência de infinitos termos? Sobre isso Courant (2000, p. 13) descreve: “O fato de estas duas condições serem suficientes para demonstrar a veracidade de todas as proposições P_1, P_2, P_3, ... é um princípio lógico tão fundamental à Matemática quanto as regras da lógica aristotélica.” Após formular o Princípio de Indução Finita, o próprio Courant (2000, p. 14), já citado, minudencia a formulação do Princípio:

> Não devemos hesitar em aceitar isto, do mesmo modo com o aceitamos as regras simples da lógica corrente, como um princípio básico do raciocínio matemático, uma vez que podemos provar a veracidade de qualquer das proposições P_n, partindo da asserção i. de que P_1 é verdadeiro e prosseguindo por uso repetido da asserção ii. Para demonstrar sucessivamente a veracidade de P_2, P_3, P_4, e assim por diante, até alcançarmos a proposição P_n. O princípio da indução matemática repousa, portanto, no fato de que após qualquer inteiro r existe um seguinte $r + 1$, e que qualquer inteiro n desejado pode ser alcançado por um número finito de tais etapas, a partir do inteiro 1.

Um ponto intrigante no processo de indução é que apenas supomos os passos 1 e 2. E se isso não acontecer, nossa teoria cai por terra?

Considere uma sentença matemática aberta, P(n), que por um procedimento algébrico, verificamos a validade de P(1). Se queremos que o resultado de uma implicação seja verdade, a lógica nos assegura que: de uma afirmação verdadeira, só podemos chegar a uma afirmação também verdadeira. Por outro lado, se alcançamos uma afirmação falsa, esta só poderia ter se originado de uma que também é falsa. Analisemos agora, a validade de P(n), que no exemplo das peças de dominó, refere-se à peça de posição *n*. Suponha que você tenha derrubado a primeira peça, em direção à segunda. Agora, se a peça de posição *n* não caiu, segue que a anterior (*n-1*) também não caiu, pois do contrário a teria derrubado. Continuando o procedimento, concluímos que a anterior (*n-2*) dessa última, também não caiu. Reiterando esse processo, chegaríamos à conclusão que a primeira peça também não teria caído, o que é um absurdo. Os passos 1 e 2 estão, portanto, conectados. Como é possível verificar a validade do primeiro caso, e a implicação do *n-ésimo* para seu sucessor, conclui-se a validade geral.

Pois bem, pela analogia da fileira para com os números naturais e pela sua caracterização dada pelos axiomas de Peano, se a primeira peça caiu e a queda de cada peça implica na derrubada da seguinte, então, mesmo que este conjunto tenha uma quantidade infinita de peças, todas elas cairão.

1.3. SEQUÊNCIAS E RECORRÊNCIAS

1.3.1. Sequências numéricas

Uma sequência numérica é um conjunto de números, escritos um após o outro. Os números que formam as sequências não precisam ter nenhum padrão, no entanto, frequentemente, eles são resultado da observação de um determinado fato ou fenômeno.

Abordamos nesse trabalho as sequências infinitas, as quais, segundo Ávila (2006) são funções definidas no conjunto dos números naturais. Indicando cada termo de uma sequência pela letra x, seguida de um índice n que indica a sua ordem ou posição, x_n representa um termo qualquer de uma sequência.

Exemplo: A sequência definida por $x: N \to R$ onde $x_n = n^2$, para todo $n \in N$, tem como elementos $x_1 = 1$, $x_3=9$, $x_2 = 4$, $x_3 = 9$ ... . Nota-se que o conjunto N foi definido sem o elemento zero.

1.3.2. Sequências definidas recursivamente

Um grupo de sequências notáveis, e que são abordadas trabalho, são as sequências definidas recursivamente. Segundo Gomide e Stolfi (2011) uma sequência é definida recursivamente se é resultado de um ou mais termos inicial e uma fórmula que determina os demais termos a partir dos termos precedentes, a qual é chamada de recorrência.

No exemplo mostrado na Seção 1.1., o método que utilizamos para gerar a sequência de números naturais (1, 2, 3, 4, ...) consistiu em definir 1 (um) como primeiro número natural, e, através do procedimento recursivo, gerou-se os próximos números naturais. Como podemos ver, cada termo, a partir do segundo, é igual ao termo imediatamente anterior somado com 1. Portanto, a relação de recorrência é da forma $x_{n+1} = x_n + 1$, com $x_1 = 1$.

Ainda de acordo com Pacheco (2013), as equações de recorrência são determinadas por uma fórmula que especifica como cada termo da sequência é obtido a partir de seus termos anteriores. Matematicamente expressamos uma equação de recorrência da forma:

$$x_{n+1} = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, n) \tag{1}$$

Pacheco (2013) classifica as equações de recorrência quanto a sua ordem e a linearidade.

1) *Ordem*: A ordem de uma equação de recorrência é a diferença entre o maior e o menor índice que aparece na equação.

Uma equação que oferece um termo qualquer da sequência, em função de seu termo imediatamente anterior, caracteriza uma recorrência de primeira ordem; aquela que oferece um termo, em função dos dois termos imediatamente anteriores, define uma recorrência de segunda ordem, e assim por diante. A equação $x_{n+1} = x_n + 5$ é de primeira ordem. A famosa sequência de Fibonacci é de segunda ordem e é definida por $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, com $x_1 = 1$ e por definição, $x_0 = 1$.

2) *Linearidade*: A recorrência é denominada linear quando a função f for linear nas variáreis $(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n)$.

Ou seja, se todas as variáveis tiverem expoente iguais a 1. A equação $x_{n+1} = 2x_n + 5$, por exemplo, é uma recorrência linear de primeira ordem, enquanto a recorrência $x_{n+1} = (n-1)(x_n)^2 - 3x_{n-1}$ é uma recorrência não linear de segunda ordem.

1.3.3. Resolução de uma recorrência

Considere a recorrência $x_{n+1} = x_n + 5$, com $x_1 = 5$. Se quisermos encontrar o 10º termo da solução, podemos utilizar essa fórmula e calcular sucessivamente os termos da sequência até atingirmos o termo procurado. Vejamos:

$x_2 = x_1 + 5 = 5 + 5 = 10$

$x_3 = x_2 + 5 = 10 + 5 = 15$

$x_4 = x_3 + 5 = 15 + 5 = 20$

. . .

$x_{10} = x_9 + 5 = 45 + 5 = 50$

Imagine o trabalho que seria encontrar o 200º termo da sequência, usando esse processo recursivo. Vamos verificar que a representação da solução por meio da fórmula, torna o trabalho de encontrar qualquer termo de modo rápida e prático. Com ela, é possível obter todos os termos da sequência, em função da posição n que cada termo ocupa e não dos termos prévios. No entanto, “determinar uma fórmula explícita para uma sequência definida recursivamente é um problema difícil em geral, mas há técnicas que resolvem certos casos especiais”. (GOMIDE; STOLFI, 2011, p.145).

Abordaremos os métodos de resolução de Equações de Recorrências para os casos mais simples: Aditiva Simples e Multiplicativa Simples.

1.3.3.1. Recorrência aditiva simples

Uma recorrência aditiva simples é definida da forma $x_{n+1} = x_n + f(n)$ para todo $n \in N$ e com x_1 fixo. Para obtermos a fórmula de resolução deste caso de recorrências, fazemos:

$x_2 = x_1 + f(1)$
$x_3 = x_2 + f(2)$
$x_4 = x_3 + f(3)$
. . . .
$x_n = x_{n-1} + f(n-1)$

Somando, obtemos:

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \qquad (2)$$

Exemplo: Determinar a solução para o termo geral x_n da recorrência

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_n = x_{n-1} + 2^{n-1} \ \ para\ \ todo\ n \in N. \end{cases}$$

De acordo com (2):

$x_n = 1 + (2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1})$

$$= 2^0 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}$$

Note que o membro direito da última igualdade é uma soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão 2. Então:

$$x_n = 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1}$$

$x_n = 2^n - 1$ para todo n natural

1.3.3.2. Recorrência multiplicativa simples

São as recorrências da forma $x_{n+1} = f(n) \cdot x_n$ para todo $n \geq 1$ e x_1 fixo, onde f é uma função qualquer. Para obtermos a fórmula de resolução deste caso de recorrências, fazemos:

$x_2 = x_1 \cdot f(1)$
$x_3 = x_2 \cdot f(2)$
$x_4 = x_3 \cdot f(3)$
. . . .
$x_n = x_{n-1} \cdot f(n-1)$

Multiplicando, obtemos:

$$x_n = x_1 \cdot \prod_{k=1}^{n-1} f(k) \qquad \text{para todo } n \geq 1 \tag{3}$$

De acordo com Pacheco (2013), o procedimento recursivo permite definir regras para formular casos complexos em termos de casos mais simples, como, por exemplo, a prova por indução finita. “Uma das principais ferramentas para verificar a validade de uma fórmula que representa solução de uma equação de recorrência é o Princípio da Indução Matemática.” (PACHECO, 2013. p. 16).

1.4. FUNDAMENTAÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

Antes de concentrar nosso estudo especificamente na demonstração de números inteiros, vamos fazer um questionamento mais geral e analisar como se prova uma asserção no campo da Matemática. O método a ser usado é o mesmo dentro de outras áreas do conhecimento, como a Física ou a Biologia, por exemplo?

O processo de mostrar que determinada fórmula, expressão ou asserção é verdadeira dentro do conhecimento matemático é através de demonstrações, onde Lungarzo (1992) afirma ser uma propriedade abstrata a qual não depende de nenhuma experiência particular, e o único método usado para tal fim, ainda de acordo com o autor, é a dedução, sendo um problema da lógica. Mesmo em alguns campos da Matemática, em que o método para justificar determinadas asserções é a demonstração por Indução, não é o mesmo método de Indução das Ciências Naturais, ou daquele utilizado para induzir determinado acontecimento baseado em experiências particulares.

Todos conhecemos o processo indutivo, pois fazemos indução sobre muitos fatos do cotidiano. No entanto, convém destacar, que ao contrário da Indução Empírica a qual faz inferência sobre uma lei ou teorema a partir de uma quantidade de observações isoladas, a Indução Matemática não induz a veracidade de uma lei ou teorema a partir de uma quantidade de dados isolados, mas através de uma regra que depende da veracidade de uma asserção de ordem qualquer, acarretando a verdade da seguinte, sabendo da validade da primeira afirmativa. "De um modo bastante diferente, a indução matemática é utilizada para demonstrar a veracidade de um teorema matemático em uma sequência infinita de casos, o primeiro, o segundo, o terceiro, e assim por diante sem exceção." (COURANT, 2000, p. 12).

No entanto, ao falar sobre os métodos de provar hipóteses em Matemática, Janos (2009, p. 40) ressalta a importância da intuição enquanto construtora de conjecturas, e nos alerta: “Temos, contudo, que tomar cuidado para não deixar que o formalismo acabe inibindo a intuição”. Até porque, sem tais conjecturas, não existiria o que se demonstrar. E ainda sobre a forma como surgem as proposições e os teoremas, é importante destacar que realizações matemáticas tem origem em situações reais. Como exemplo, podemos citar o teorema de Pitágoras, onde Poincaré (2000) afirma a não possibilidade do mesmo ser conhecido a priori, sem referência do mundo real. E ainda sobre isso, temos: “Sem dúvida alguma, todo o conhecimento matemático tem suas raízes psicológicas em exigências mais ou menos práticas.” (COURANT, 2000, introdução).

Portanto, mesmo a Matemática, denominada de ciência abstrata pelo seu estilo capaz de transcender as utilidades imediatas, da ligação com o objeto de estudo, tem ferramentas que exterioriza à nossa percepção intelectual ou sensível as questões a serem validadas como conhecimento científico. Essa forma de externar, de trazer à tona a realidade, ou como diz Poincaré, a forma de conhecer a realidade, provém do mundo real, dos fatos que permeiam a natureza: “Não, as leis científicas não são criações artificiais; não temos nenhuma razão para vê-las como contingentes, embora nos seja impossível demonstrar que não são.” (POINCARÉ, 2000, p. 9).

Também sobre o papel dos fatos na elaboração dos trabalhos concernentes ao conhecimento matemático, Poincaré, (2000), afirma que, apesar das limitações da intuição enquanto construtora dos mesmos, é na Matemática, o instrumento mais comum da invenção. “Se é útil ao estudante ela o é mais ainda ao cientista criador.” (POINCARÉ, 2000, p. 20).

Com base nessas afirmações, fizemos um esforço significativo em desenvolver concretamente exemplos no intuito de generalizar observações por meio de expressões matemáticas; nos apoiamos nos resultados mostrados pelos finitos termos das Sequencias Numéricas para entendermos a validade geral; fizemos mecânica e manualmente os passos recorrentes das Equações de Recorrência para acreditar no Princípio de Indução Finita. Pois, apesar de Recorrência não ser uma técnica de prova, mas um método de definição de como se obter números em sequência, Lovász (2013) nos assegura que ela é semelhante em espírito à Indução Matemática.

E é esse espírito de semelhança que nos possibilita definir as Recorrências e acreditar na prova por Indução, uma vez que, para provarmos a veracidade de determinada asserção para qualquer quantidade n, usamos as recorrências para, no mínimo, verificar a passagem da validade de um n-ésino caso para o próximo $(n+1)$-ésino caso.

2. DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES

2.1. ABORDAGEM TEÓRICA

Planejamos sequências didáticas destinadas a duas turmas de estudantes do 1º ano do Ensino médio com idades entre 15 e 18 anos em um colégio de Ensino técnico integrado ao Ensino médio de Juazeiro. A primeira turma, composta por 22 alunos, denominamos Turma A, e a segunda turma, com 16 alunos, por Turma B.

Nosso objetivo foi confrontar dois métodos de abordagem do conteúdo de Indução Finita. Na primeira turma – a Turma A, desenvolvemos um trabalho com padrões e um estudo das Relações de Recorrência com a finalidade de que tais tarefas pudessem contribuir na construção da ideia de generalização de propriedades. Com a segunda turma, partimos diretamente para estudos das Sequências e de Indução, sem o apoio dessas tarefas adicionais.

Fizemos aulas expositivas e dialogadas com o uso do quadro e Datashow. Em sequência, aplicamos exercícios semelhantes aos mostradas durante a aula expositiva, bem como oficinas envolvendo o tema em estudo. As tabelas 2 e 3 mostram o número de encontros presenciais com cada turma, bem como a sequência de conteúdo desenvolvida.

Tabela 2: Cronograma de sequência didática da Turma A.

ATIVIDADE	DATA
Descobrindo padrões	29/11/2014
Sequências aritméticas	02/12/2014
Relações de recorrências	06/12/2014
Introdução à Indução Finita	06/12/2014
Princípio de Indução Finita	13/12/2014
Aplicações de Indução Finita	13/12/2014
Avaliação	15/12/2014

Tabela 3: Cronograma de sequência didática da Turma B.

ATIVIDADE	DATA
Sequências aritméticas	29/11/2014
Introdução à Indução Finita	06/12/2014
Princípio de Indução Finita	13/12/2014
Aplicações de Indução Finita	13/12/2014
Avaliação	18/12/2014

Para contornar questões relativas à sistematização de um trabalho teórico e experimental, nos baseamos no método Engenharia Didática. Carneiro (2005) descreve que esse método está relacionado com o movimento de valorização do saber prático do professor, justificado pela insuficiente teoria desenvolvida fora da sala de aula para captar a complexidade do sistema.

> A Engenharia Didática foi criada para atender a duas questões: a) das relações entre pesquisa e ação no sistema de ensino; b) do lugar reservado para as realizações didáticas entre as metodologias de pesquisa. É uma expressão com duplo sentido. Designa produções para o ensino, derivadas de resultados de pesquisa, e também designa uma específica metodologia de pesquisa baseada em experiências de sala de aula. (CARNEIRO, 2005, p. 3).

Segundo Artigue (1996) apud Carneiro (2005), uma Engenharia Didática inclui quatro fases:

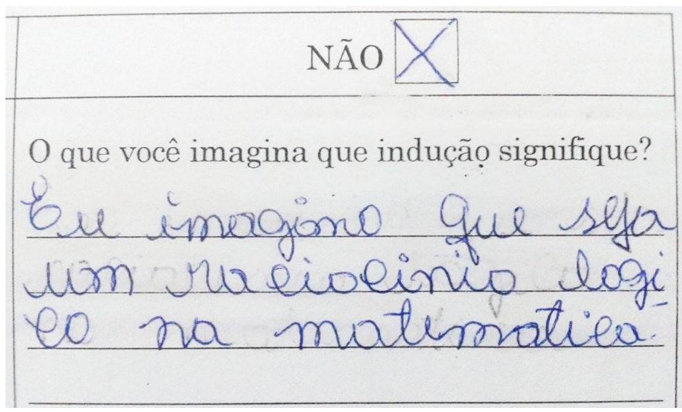
1) análises prévias;
2) concepção e análise *a priori* de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas na sala de aula de matemática;
3) implementação da experiência;
4) análise *a posteriori* e validação da experiência.

A seguir apresentaremos as fases das atividades desenvolvidas.

2.2. ANÁLISES PRÉVIAS

Antes de desenvolver os trabalhos em sala de aula, fizemos um questionário de inspeção para verificar o conhecimento prévio dos estudantes acerca de Indução Matemática. O questionário encontra-se no apêndice.

Verificamos que 15,8% dos estudantes imaginaram que Indução tinha alguma relação com Matemática, mas não sabiam sobre o que o assunto abordava.

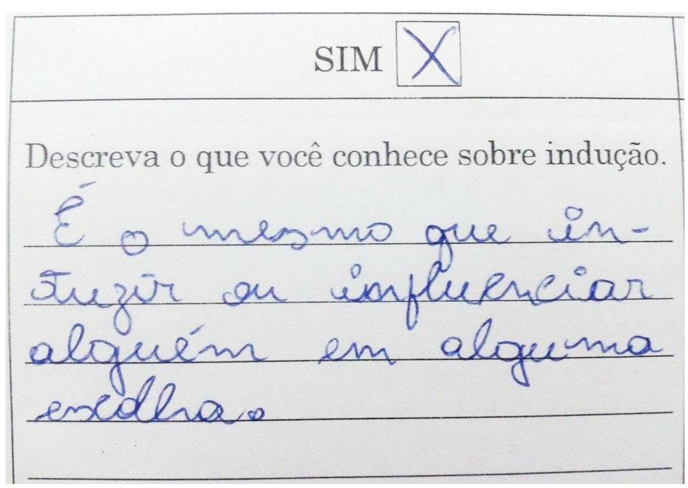

NÃO X

O que você imagina que indução signifique?

Eu imagino que seja um raciocinio logico na matematica

Figura 1 – Resposta do estudante TB09 para o questionário de inspeção

Por outro lado, 18,4% deles já tinham ouvido falar sobre a palavra Indução, mas não com significado matemático.


SIM X

Descreva o que você conhece sobre indução.

É o mesmo que in- tuzir ou influenciar alguém em alguma escolha.

Figura 2 – Resposta do estudante TA10 para o questionário de inspeção

2.3. DESCOBRINDO PADRÕES

Esse encontro foi desenvolvido com a Turma A, teve duração de 2 horas/aulas e foi dedicada à observação de padrões encontrados em sequências de números e de figuras.

Apresentamos exemplos de sequências de números e de figuras que seguem um estilo determinado de repetição. Conforme comentado anteriormente, acreditamos que essas atividades sejam importante ponto de apoio para o estudante entender o significado de validade geral de uma propriedade.

- **Atividade 01:** ***Soma dos primeiros números ímpares***

Análise *a priori*

Essa primeira atividade foi desenvolvida pelo professor de maneira expositiva e dialogada, com o apoio do Datashow. O recurso serviu para mostrar as quantidades por meio de figuras e dinamizar os agrupamentos que permitissem a visualização da formação de quadrados perfeitos no resultado da soma dos números ímpares.

A atividade teve como objetivo induzir instintivamente a validade geral dos padrões observados nos primeiros casos para todo o conjunto de números ou figuras da sequência em questão. Esperava-se que os estudantes compreendessem que os números que formam a sequências seguem um estilo fixo de formação e que eles possam determinar os próximos números da sequência. Como consequência, espera-se ainda que eles consigam conjecturar o processo genérico de formação dos mesmos através de uma expressão matemática.

Desenvolvimento da atividade

Seja a sequência de números ímpares positivos, a partir do primeiro:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...$$

Considere diferentes agrupamentos desses números a partir do primeiro. Por questões didáticas, considere o primeiro grupo com um número, o segundo grupo com dois números, o terceiro com três, e assim sucessivamente. Para cada agrupamento formado, existe uma relação entre a quantidade de números e sua soma expressa na forma de potência de expoente 2. A tabela 4 mostra essa relação:

Tabela 4: Soma dos 10 primeiros números ímpares.

QUANTIDADE	INDICANDO SUA SOMA	RESULTADO
1	1	1^2
2	1 + 3	2^2
3	1 + 3 + 5	3^2
4	1 + 3 + 5 + 7	4^2
5	1 + 3 + 5 + 7 + 9	5^2

Fonte: Lovász, 2013, Matemática Discreta.

Depois de mostrar os três primeiros casos da relação entre a quantidade de números somados e seu resultado na forma de potência, começamos a incentivar a participação dos estudantes. Para instigar a percepção do padrão de formação da soma dos ímpares, fizemos os seguintes questionamentos:

PROFESSOR: Quanto será a soma dos 4 primeiros números ímpares?

ESTUDANTES: 4^2.

As respostas apareceram isoladas e hesitantes. Depois da exposição dos primeiros três casos, e confirmar o padrão de repetição também do quarto caso, foi levantado o seguinte questionamento:

PROFESSOR: Apenas observando os casos anteriores, sem fazer cálculos, quanto será a soma dos cinco primeiros números ímpares?

ESTUDANTES: É igual a 5^2.

Ao dizer que os estudantes estavam certos, mostrando esse último caso, pretendeu-se reforçar a segurança dos mesmos em sua intuição, e incentivá-los em induzir instintiva na determinação dos próximos números da sequência.

PROFESSOR: Qual a soma dos cem primeiros números ímpares?

ESTUDANTES: 100^2

Esta última resposta foi dada por todos os estudantes. A figura 3 mostra a atividade desenvolvida durante a aula e mostrada com o uso do Datashow.

QUANTIDADE DE NÚMEROS	SOMANDO OS NÚMEROS ÍMPARES	REPRESENTANDO	AGRUPANDO	RESULTADO
1	1			1^2
2	1 + 3			2^2
3	1 + 3 + 5			3^2
4	1 + 3 + 5 + 7			4^2
5	1 + 3 + 5 + 7 + 9			5^2

Figura 3 – Soma dos primeiros 5 números ímpares

Após a percepção do estilo de formação e o entendimento de como determinar os próximos números da sequência, era hora de ir além, questionamento como expressar o resultado para uma quantidade qualquer de números ímpares. Achamos conveniente nesse momento, explicar a diferença entre número genérico e número específico, onde a soma de uma quantidade qualquer de números ímpares, seria “soma dos *n* primeiros números ímpares”. A seguir, perguntamos:

PROFESSOR: Como expressar o resultado para uma quantidade *n* qualquer de números ímpares?

ESTUDANTES: n^2.

Análise *a posteriori*

Apesar das respostas ainda aparecerem de forma tímida no início dos questionamentos, a participação em massa e de forma incisiva dos estudantes nos questionamentos subsequentes, mostrou que eles tinham entendido o que se propunha a atividade. Ao observar que os resultados de todos os agrupamentos seguiam o mesmo padrão, e que as suas respostas estavam corretas, os estudantes que ainda hesitavam em falar passaram a responder os questionamentos, e os que já faziam, passaram a responder com mais segurança. Assim, julgamos essa primeira atividade como proveitosa, o que nos deu ânimo para continuar com o trabalho planejado.

- **Atividade 2: *Soma dos primeiros números pares*.**

Análise *a priori*

Essa atividade foi proposta aos estudantes e tem um raciocínio de resolução análogo à primeira. Teve como objetivo instigar a percepção do padrão de formação da sequência de números em questão. Espera-se que eles consigam encontrá-lo, preenchendo os quadros com os números que formam as sequências e que consigam conjecturar o processo genérico de formação dos mesmos por meio de uma fórmula.

Desenvolvimento da atividade

Considere a sequência de números pares positivos, a partir do primeiro:

2, 4, 6, 8, 10, ...

É possível determinar qual é a soma dos primeiros *n* números pares? O que devemos saber, é se existe uma relação entre a quantidade de números somados e o seu resultado. Para melhor enxergar o problema, devemos abordá-lo por partes:

Com um único número par, qual o resultado para a soma? E com os dois primeiros? Da mesma maneira observamos o que acontece com as quantidades subsequentes. Para melhorar a visualização do resultado e o padrão existente, devemos seguir a quantidade de números em ordem crescente e sem pular quantidades, ou seja, depois de fazer o procedimento para uma quantidade *n* qualquer, deve-se necessariamente, passar para a quantidade seguinte, $n+1$.

O processo desenvolvido por um grupo de estudantes é mostrado na figura 4:

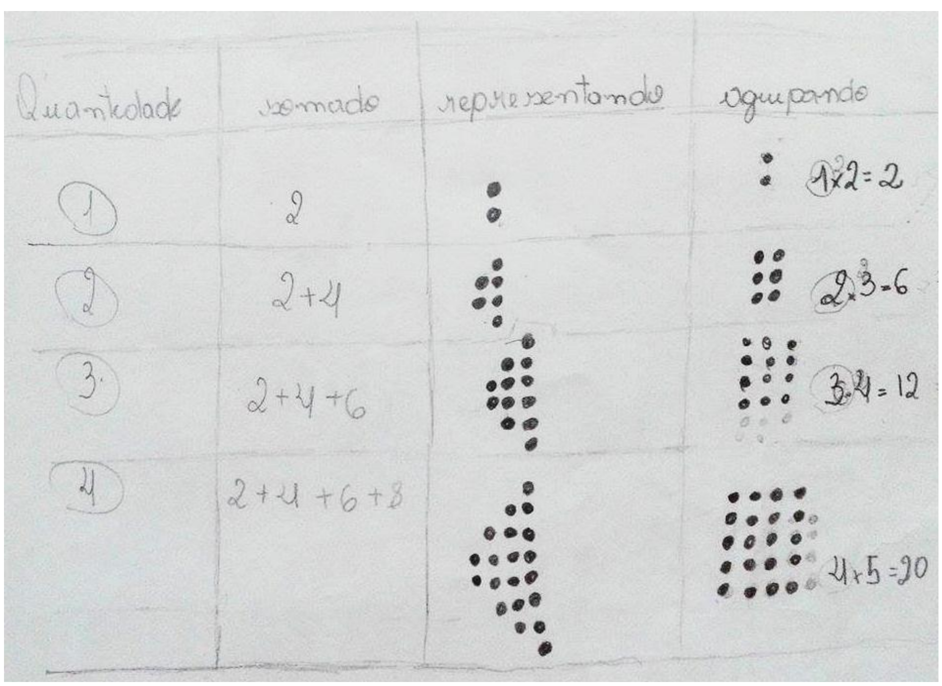


Figura 4 – Resolução da soma dos números pares.

Análise *a posteriori*

Um total de 68,2% dos estudantes conseguiu representar as quantidades por meio de retângulos, mas sentiram dificuldade em apresentar no resultado, uma forma única que servisse para a soma de 1, 2, 3 ou 4 números. Depois de demandar algum tempo, 45,5% dos estudantes conseguiram encontrar o padrão de formação através de retângulos de ordem n por $n+1$, mas ainda não se sentiram seguros se realmente isso aconteceria nos casos seguintes, mostrando que ainda não tinha formado uma conjectura. Julguei esse momento como delicado, pois apenas 27,3% deles responderam correta e integralmente essa primeira etapa.

Fazendo novamente um incentivo às respostas e observações dos estudantes, eles se sentiram confiantes na resposta da soma dos 100 primeiros números pares, mostrando que haviam formado uma conjectura para essa sequência. A generalização do resultado seguiu-se facilmente.

- **Atividade 3:** ***O problema do aperto de mãos*.**

Análise *a priori*

Essa foi a terceira atividade do primeiro encontro. Ela teve como objetivo induzir instintivamente a validade dos padrões observados nos primeiros casos para todo o conjunto em questão. Espera-se que os estudantes compreendam que os resultados mostrados nas sequências seguem um estilo de formação e que eles consigam determinar os próximos números da sequência. Por fim, esperar-se que eles consigam conjecturar o processo genérico de formação dos mesmos.

Desenvolvimento da atividade

Considere um grupo com n pessoas. Quantos apertos de mãos são necessários e suficientes para que cada uma das pessoas cumprimente todas as outras? Para melhorar a compreensão do problema, vamos abordá-lo por partes: Primeiro resolvendo o problema para um grupo com duas pessoas e observando o resultado. Depois para um grupo com três pessoas, em seguida com quatro, e assim sucessivamente. Essa brincadeira foi desenvolvida em equipe e queríamos que os estudantes percebessem o padrão de formação existente na determinação da quantidade de apertos de mão para uma quantidade qualquer de pessoas. Um desses procedimentos desenvolvidos por uma das equipes, é mostrado na figura 5.

1. Fazendo o experimento entre seus colegas, preencha o quadro abaixo, da primeira para a última coluna:

QUANTIDADE DE PESSOAS	QUANTIDADE DE APERTO DE MÃOS	ORGANIZANDO A ESCRITA
1	—	—
2	1	2x1=2÷2=1
3	3	3x2=6÷2=3
4	6	4x3=12÷2=6

Figura 5 – Quantidade de apertos de mãoes para quatro pessoas

Para verificar se eles realmente conseguiram encontrar um padrão e estavam aptos a determinar o resultado para uma quantidade qualquer, entregamos uma segunda tabela em que eles deveriam preencher sem mais fazer experimentos.

1. Agora sem fazer o experimento, preencha a 5ª e a 6ª sequência:

QUANTIDADE DE PESSOAS	QUANTIDADE DE APERTO DE MÃOS	ORGANIZANDO A ESCRITA
1	—	—
2	1	2x1=2÷2=1
3	3	3x2=6÷2=3
4	6	4x3=12÷2=6
5	10	5x4=20÷2=10
6	15	6x5=30÷2=15

2. Quantos serão os apertos de mãos, com 100 pessoas?

QUANTIDADE DE PESSOAS	QUANTIDADE DE APERTO DE MÃOS	ORGANIZANDO A ESCRITA
1		
2		
3		
4		
...		
100		100x99=9.900÷2=4.950

Figura 6 – Quantidade de apertos de mãos para 100 pessoas

Análise *a posteriori*

Essa atividade foi produtiva, pois 81,8% dos estudantes conseguiram fazer os agrupamos corretos, mas novamente foi necessária uma intervenção no sentido de encontrar uma fórmula. Por ter sido um número de acertos maior do que a tarefa anterior, acreditamos estar conseguindo avanço.

- **Atividade 4: *Subdividindo triângulos a partir dos pontos médios de seus lados.***

Análise *a priori*

Essa foi a quarta e última atividade desse primeiro encontro. Como as três primeiras atividades iniciais, teve como objetivo induzir instintivamente a validade dos padrões observados nos primeiros casos para todo o conjunto em questão, bem como verificar sua capacidade de visualização do estilo de formação. Espera-se também que eles consigam conjecturar o processo genérico de formação dos mesmos.

Desenvolvimento da atividade

Dado um triângulo equilátero, ao marcarmos os pontos médios de cada um de seus lados e unindo-os, quantos novos triângulos teremos?

Para melhor determinar quantidade de triângulos, vamos abordar o problema por partes: Primeiro, de posse de um único triângulo, fazemos a primeira marcação dos pontos médios, os unimos com uma linha reta, e anotamos a quantidade de triângulos menores formados. Depois, a partir de cada ponto médio dos novos triângulos, repetimos o procedimento e anotamos novamente a quantidade de novos triângulos formados. Repetindo sucessivamente o mesmo procedimento, quantos triângulos menores são formados na *n-ésima* marcação?

Um desses procedimentos desenvolvidos por um grupo de estudantes é mostrado na figura 7.

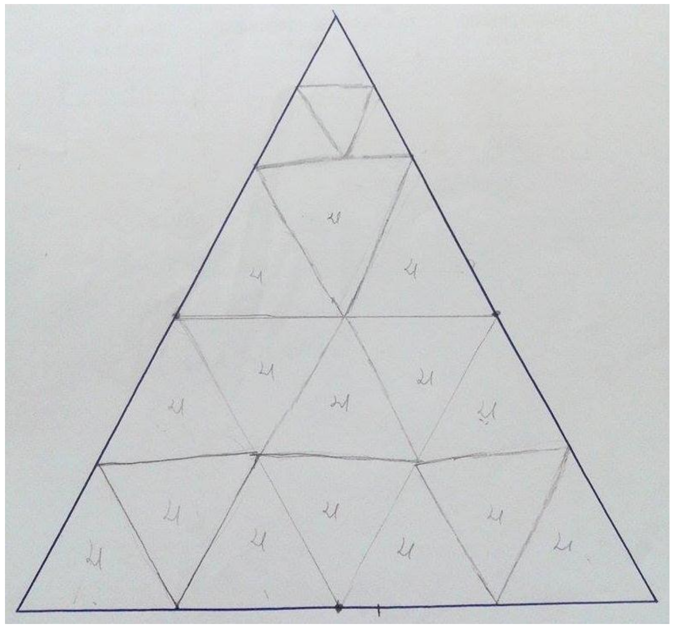
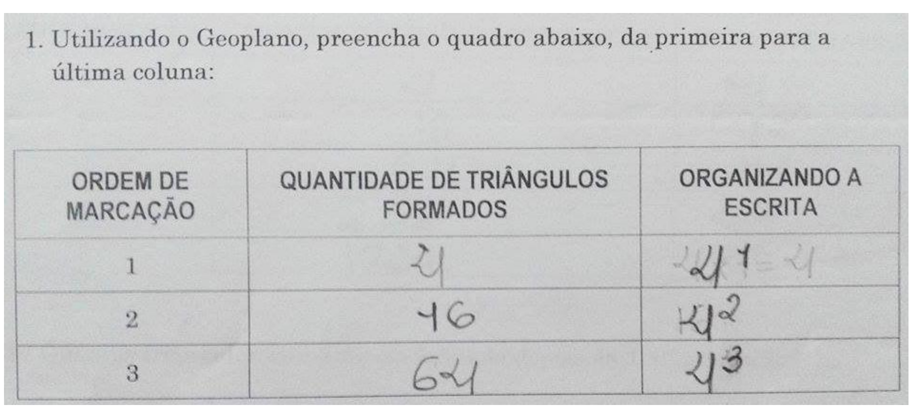


Figura 7 – Formando novos triângulos a partir dos pontos médios.

Depois de fazer o desenho observar as quantidades de triângulos equiláteros formados em cada etapa, foi dado uma tabela para que fosse preenchida. Essa atividade teve como objetivo averiguar se os estudantes entenderam o problema e perceberam o padrão de formação da sequência de figuras.

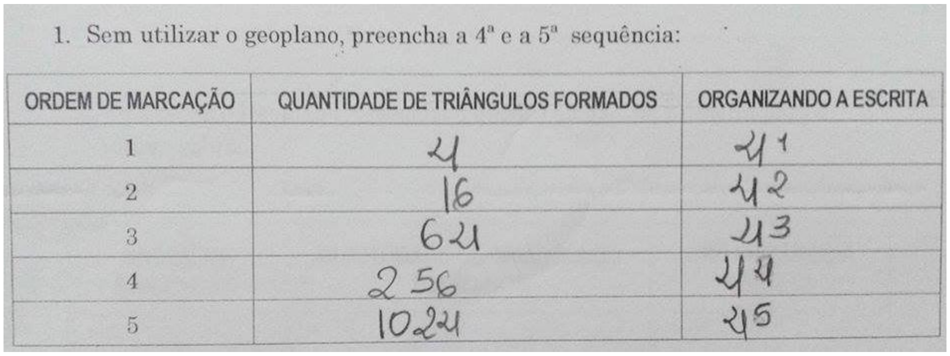


1. Utilizando o Geoplano, preencha o quadro abaixo, da primeira para a última coluna:

ORDEM DE MARCAÇÃO	QUANTIDADE DE TRIÂNGULOS FORMADOS	ORGANIZANDO A ESCRITA
1	4	$4^1 = 4$
2	16	4^2
3	64	4^3

Figura 8 – Resposta do estudante TA09 para a quantidade de triângulos

Na próxima etapa dessa tabela, os estudantes deveriam preencher sem o desenvolvimento experimental, para verificar se eles conseguiram conjeturar uma fórmula que produzisse o resultado proposto pelo problema.



1. Sem utilizar o geoplano, preencha a 4ª e a 5ª sequência:

ORDEM DE MARCAÇÃO	QUANTIDADE DE TRIÂNGULOS FORMADOS	ORGANIZANDO A ESCRITA
1	4	4^1
2	16	4^2
3	64	4^3
4	256	4^4
5	1024	4^5

Figura 9 – Determinando o número de triângulos formados.

Análise *a posteriori*

Essa atividade foi produtiva, pois todos os estudantes conseguiram fazer os agrupamos corretos, sem mais a necessidade de intervenção no sentido de encontrar uma fórmula.

Um fato que despertou a nossa atenção no desenvolvimento dessa atividade foi a agilidade com que 45,5% dos estudantes mostraram em encontrar a fórmula de formação dos novos triângulos. Outro fato interessante foi a rapidez com que 22,7% deles demonstraram em descobrir o padrão de formação das figuras, pois ao iniciar a segunda marcação já tinham determinado a quantidade de triângulos que teriam na próxima marcação.

Como todos os estudantes conseguiram realizar a tarefa de forma correta julgamos que o trabalho que o trabalho com padrões tinham surtido o efeito desejado.

2.4. SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Análise *a priori*

Como as sequências numéricas têm uma característica mais teórica, acreditamos que seu estudo tenha sido o primeiro contato dos estudantes da Turma A com a formalização de padrões encontrados em casos que apresentam um estilo de repetição. Esse conteúdo foi desenvolvido em ambas as turmas e teve como objetivo fazer uma apresentação de sequências infinitas e fórmulas.

Desenvolvimento da atividade

As sequências numéricas em geral, podem ser formadas por números sem qualquer padrão e construídas aleatoriamente. No entanto, frequentemente elas são resultados da observação de um determinado fato ou fenômeno.

Imagine, por exemplo, uma pessoa que tenha anotado as temperaturas máximas da cidade de Juazeiro em um período do mês de novembro de 2014. O resultado está na tabela seguinte:

Tabela 05 – Temperaturas hipotéticas do mês de novembro em Juazeiro.

DIA	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
TEMPERATURA	29	30	30	31	32	33	34	35	35	36

Fonte: Dados hipotéticos elaborados pelo autor.

Nessa sequência, o primeiro termo é 29, o segundo é 30, o sexto 33. Indicando cada termo de uma sequência pela letra *a*, seguida de um índice que indica a sua ordem, temos:

$$a_1 = 29; a_2 = 30; a_3 = 30; a_8 = 35$$

Como a ideia de generalização está sempre presente na matemática, e em especial em conjuntos infinitos, quando desejamos falar sobre um termo qualquer de uma sequência escrevemos a_n. Assim, no exemplo apresentado, a_n representa a temperatura máxima registrada no dia n.

- **Progressões aritméticas**

Ressaltando mais uma vez que os padrões são de especial interesse da Matemática, as sequências de maior interesse não poderiam fugir a essa regra. Dentre elas, temos as Progressões Aritméticas.

Morgado e Carvalho (2013) definem uma progressão aritmética como uma sequência de números na qual a diferença entre cada termo, a partir do segundo, e o termo anterior é constante. À esta diferença, os autores dão o nome de razão. Assim, a Progressão Aritmética (4, 8, 12, 16, 20, 24) possui razão 4, enquanto a Progressão Aritmética (9, 7, 5, 3, 1, -1, -3) possui razão –2.

Generalizar é encontrar uma lei matemática que nos permita determinar qualquer termo de uma sequência aritmética o qual chamamos de termo geral.

$a_2 = a_1 + R$

$a_3 = a_1 + 2R$

$a_4 = a_1 + 3R$

...

$a_{10} = a_1 + 9R$

E sem fazer demonstração neste momento, apenas apelando para a intuição, julgamos ser verdade para todos os números inteiros, que:

$$a_n = a_1 + (n - 1)R \qquad (4)$$

- **Soma dos termos de uma Progressão Aritmética**

Deduziremos a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética usando a mesma ideia que um menino de 10 anos teve no ano de 1787. Esse menino, que se tornou um dos maiores matemáticos de todos os tempos, chamava- se Carl Friedrich Gauss. De acordo com a narração de Eves (2004), Gauss nasceu em 1777 na cidade de Brunswick, Alemanha. Aos 10 anos, ele frequentava uma escola pública local. Certo dia, para manter a classe ocupada, o professor mandou que os alunos somassem todos os números de 1 a 100. Mas, para sua enorme surpresa, o pequeno Gauss anunciou a resposta quase imediatamente.

Vejamos como ele calculou a soma: $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100$.

Primeiro vamos representar a soma por S, e escrevê-la de duas maneiras, (i) e (ii). Em seguida, pondo cada termo da equação (i) abaixo de cada termo da equação (ii), obtemos a equação (iii) como soma:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
\mathbf{S} & = & \mathbf{1} & + & \mathbf{2} & + & \mathbf{3} & + & \cdots & + & \mathbf{98} & + & \mathbf{99} & + & \mathbf{100} & \quad \mathbf{(i)} \\
\mathbf{S} & = & \mathbf{100} & + & \mathbf{99} & + & \mathbf{98} & + & \cdots & + & \mathbf{3} & + & \mathbf{2} & + & \mathbf{1} & \quad \mathbf{(ii)} \\
\hline
\mathbf{2S} & = & \mathbf{101} & + & \mathbf{101} & + & \mathbf{101} & + & \cdots & + & \mathbf{101} & + & \mathbf{101} & + & \mathbf{101} & \quad \mathbf{(iii)}
\end{array}
$$

Como todas as parcelas são todas iguais, escrevemos **2S = 100·101**, donde obtemos **S = 5050.** De maneira geral, ainda sem demonstração, temos que: **2S = n·(n+1),** ou:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}} \qquad (5)$$

<u>Análise *a posteriori*</u>

Percebemos um olhar diferenciado dos estudantes por um conteúdo que já faz parte do currículo do Ensino médio. Acreditamos que a maneira detalhada, cheia de exemplos e a abordagem histórica fizeram com que o velho conteúdo se abrisse de uma nova e interessante forma.

A generalização dos resultados aconteceu com mais facilidade com os estudantes os quais já fora desenvolvido o trabalhado com padrões. De maneira geral, julgamos a atividade produtiva, pelo interesse e participação de todos os estudantes na aula e na resolução de atividades propostas. A importância desse conteúdo também se deve, pela apresentação intuitiva das fórmulas que serão posteriormente provadas pelo Princípio de Indução Finta.

2.5. RECORRÊNCIAS

2.5.1. Relações de recorrência

Análise *a priori*

Esse conteúdo foi desenvolvido somente com a Turma A. Nosso objetivo foi, além de fortalecer o trabalho com padrões, abordar sistematicamente a ideia de transferir uma propriedade de um número para seu consecutivo, que é o conceito básico do estudo de Indução Finita.

Desenvolvimento da atividade

Começamos a aula definindo Relação de Recorrência como técnica que permite definir sequências, conjuntos, operações, etc., partindo de problemas particulares para problemas genéricos. Ou seja, por intermédio de uma regra pode-se calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediato(s).

Dada a sequência

$$10, 15, 20, 25, 30, 35, \ldots$$

Observa-se que cada termo a partir do segundo é definido a partir do anterior, somado com 5. Denominando cada termo dessa sequência por x_n, para encontrarmos um termo genérico, fazemos:

$x_2 = x_1 + 5 = 10+5 = \mathbf{15}$

$x_3 = x_2 + 5 = 15+5 = \mathbf{20}$

$x_4 = x_3 + 5 = 20+5 = \mathbf{25}$

$x_5 = x_4 + 5 = 25+5 = \mathbf{30}$

Mais uma vez nos apoiado na nossa intuição para definir o termo genérico como:

$$x_n = x_{n-1} + 5 \qquad (6)$$

Outro exemplo, que aplicamos o conceito de relações de recorrência é o caso do Plano (Pizza) de Steiner de um objeto que é divido em um número cada vez maior de pedaços.

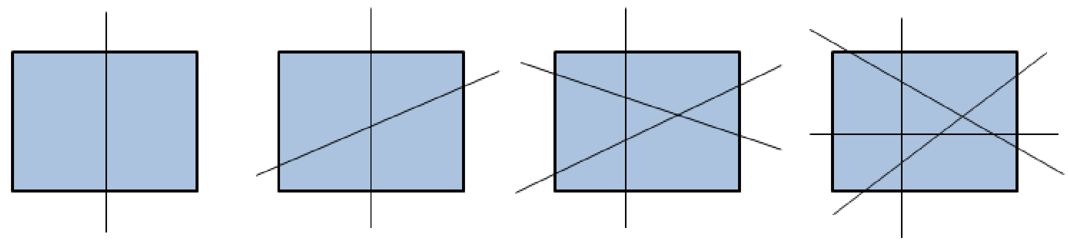


Figura 10 – Quantidade máxima de pedaços que se divide um objeto no n-ésimo corte

Denominando por x_n o número de pedaços no *n-ésimo* corte, e observando os seguintes padrões:

Número de pedaços no 2ºcorte: $x_2 = x_1 + 2 = 2 + 2 = 4$

Número de pedaços no 3ºcorte: $x_3 = x_2 + 3 = 4 + 3 = 7$

Número de pedaços no 4ºcorte: $x_4 = x_3 + 4 = 7 + 4 = 11$

Como até agora, fizemos a generalização de maneira instintiva:

Número de pedaços no n-ésimo corte

$$x_n = x_{n-1} + n \tag{7}$$

<u>Análise *a posteriori*</u>

Essa atividade contou com a participação efetiva de todos os estudantes. Isso mostrou que eles tinham se familiarizado com as atividades envolvendo padrões e tinham compreendido o significado das relações de recorrência.

2.5.2. Encontrando uma fórmula fechada

Análise *a priori*

Faremos nesta seção, uma introdução ao método de determinar uma fórmula fechada de uma equação recursiva. Esperamos que os estudantes compreendam sua finalidade e o consigam determinar a fórmula fechada para sequências mais simples. Para isso, ainda valemo-nos do apoio intuitivo para alcançar tal finalidade, seguindo a ideia central desse trabalho.

Desenvolvimento da atividade

Para determinar a fórmula fechada de sequências definidas recursivamente, vamos analisar a seguinte sequência: 4, 7, 10, 13, 16, ... Faremos a abordagem da mesma sob diferentes métodos de formação:

Caso 1:

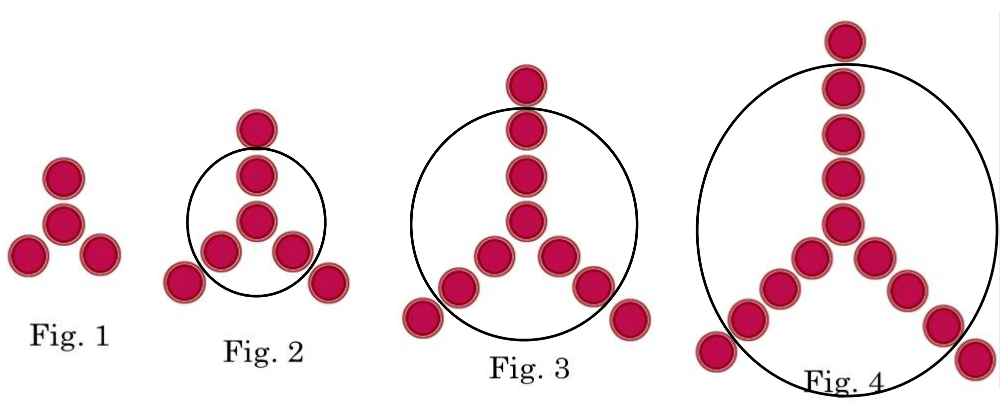


Figura 11 – Sequência de figuras formadas pela adição de bolinhas

$x_2 = x_1 + 3$

$x_3 = x_2 + 3$

$x_4 = x_3 + 3$

$x_5 = x_4 + 3$

Isso nos faz induzir que um termo qualquer dessa sequência pode ser dado por:

$$x_n = x_{n-1} + 3 \tag{8}$$

Essa fórmula nos permite determinar qualquer termo da sequência de maneia correta, mas demandaria um tempo considerável para encontrar, por exemplo, o 100º termo, pois necessitaríamos conhecer o termo anterior. No entanto, para determinar este último, precisaríamos conhecer o 98º, que por sua vez, seria necessário o conhecimento do 97º e assim por diante.

Então, abordaremos o mesmo problema, agora sob um novo ponto de vista:

Caso 2:

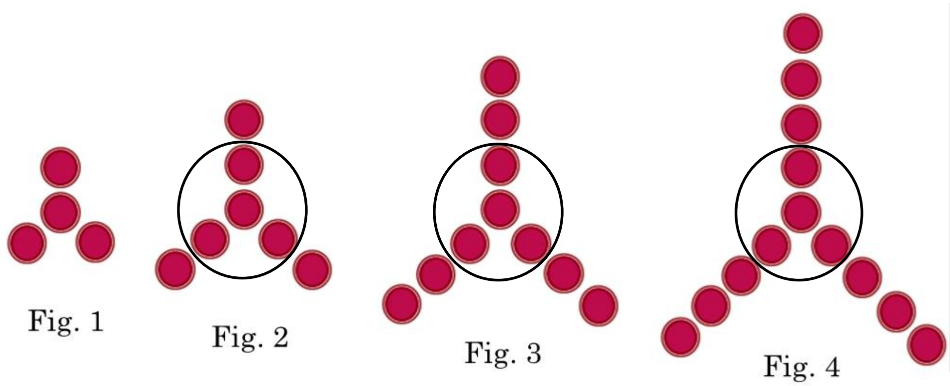


Figura 12 – Quantidade de bolinhas que formam a n-ésima figura

$x_2 = x_1 + 3$

$x_3 = x_1 + 2 \cdot 3$

$x_4 = x_1 + 3 \cdot 3$

$x_5 = x_1 + 4 \cdot 3$

E, de forma geral:

$$x_n = x_1 + (n-1) \cdot 3 \tag{9}$$

Isso é o que denominamos de uma fórmula fechada. Observe agora, que para determinar um termo qualquer dessa sequência, basta termos a condição inicial, o valor de x_1. Uma atividade como esta foi proposta aos estudantes, conforme figura 11:

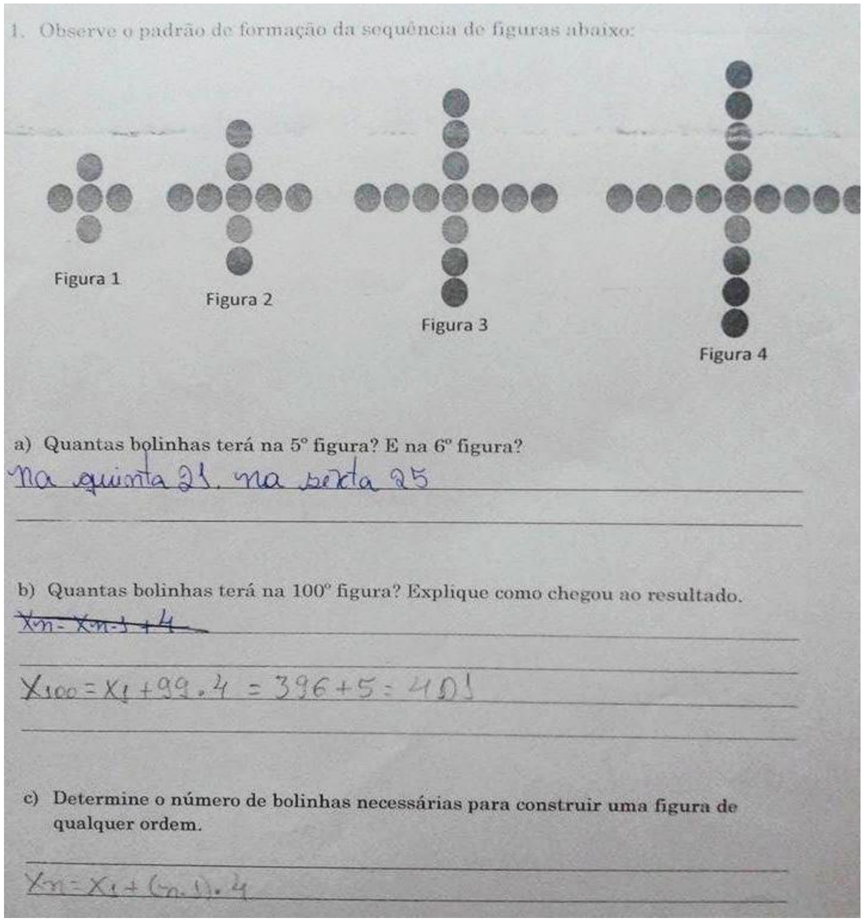

1. Observe o padrão de formação da sequência de figuras abaixo:

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

a) Quantas bolinhas terá na 5º figura? E na 6º figura?

na quinta 21. na sexta 25

b) Quantas bolinhas terá na 100º figura? Explique como chegou ao resultado.

~~$x_n = x_{n-1} + 4$~~

$x_{100} = x_1 + 99.4 = 396 + 5 = 401$

c) Determine o número de bolinhas necessárias para construir uma figura de qualquer ordem.

$x_n = x_1 + (n-1).4$

Figura 13 – Resposta do estudante TA05 para a equação de recorrência

<u>Análise *a posteriori*</u>

Tivemos um índice de 45,5% de acertos integrais com esse exercício. Conversando com os outros estudantes, percebemos que 36,4% deles haviam compreendido como a fórmula fechada deveria ser, mas não conseguiram escrevê-la corretamente por meio de uma expressão matemática. Os demais não responderam ou não estavam presente nesse dia.

Por ser um estudo inicial com métodos de resolução de Equações de Recorrência, e considerando também que nosso objetivo é a representação matemática de sequências através das mesmas, acreditamos que o trabalho foi satisfatório.

2.6. INTRODUÇÃO À INDUÇÃO FINITA

Análise *a priori*

Este trabalho foi desenvolvido com as duas turmas e foi o início dos trabalhos com Indução Finita. Em relação à Turma A, depois de fazermos todo um trabalho de incentivo à percepção de padrões, de transferência de propriedades entre números consecutivos através das Relações de Recorrência, achamos que era a hora de abordarmos o tema central sob o qual se propunha o trabalho: Indução Finita. Esperamos que os estudantes de ambas as turmas entendam o que é Indução Finita e qual sua finalidade.

Desenvolvimento das atividades

Para motivar a necessidade de um método de prova sobre as asserções observadas e confiadas como verdadeiras, vamos analisar dois casos.

1. Considere o polinômio $P(n) = n^2 – n + 41$, e os primeiros 10 números obtidos através dele:

Quadro 1: Valores numéricos do polinômio $P(n) = n^2 – n + 41$

N	**P(n)**
1	41
2	43
3	47
4	53
5	61
6	71
7	83
8	97
9	113
10	131

Todos os valores fornecidos pelo polinômio são números primos. Ao serem questionados se todos os números fornecidos pelo polinômio em questão seriam primos, todos os estudantes disserem que seria verdade. Qual não foi sua surpresa, ao mostrar que $P(41) = 1681 = 41 \cdot 41$, que pela possibilidade de ser colocado como produto de dois fatores maiores que 1, não é primo.

2. Para fortalecer a necessidade de demonstração de uma afirmação, mostramos um segundo exemplo:

> Havia uma galinha nova no quintal de uma velha senhora. Diariamente, ao entardecer, a boa senhora levava milho às galinhas. No primeiro dia, a galinha, desconfiada, esperou que a senhora se retirasse para se alimentar. No segundo dia, a galinha, prudentemente, foi se alimentando enquanto a senhora se retirava. No nonagésimo dia, a galinha, cheia de intimidade, já não fazia caso da velha senhora. No centésimo dia, ao se aproximar a senhora, a galinha, por indução foi ao encontro dela para reclamar o seu milho. Qual não foi a sua surpresa quando a senhora pegou-a pelo pescoço com a intenção de pô-la na panela. (HEFEZ, 2009, p. 10).

De posse desses dois exemplos, passamos a nos questionar se uma simples conjectura seria suficiente para determinar a validade geral de uma afirmação. Percebemos, então, a necessidade de provar a validade das asserções por um método eficaz.

Inicialmente, fizemos uma apresentação geral do Princípio de Indução Finita, descrevendo-o como uma ferramenta capaz de provar que uma quantidade infinita de observações são verdadeiras, simplesmente verificando que uma quantidade finita dessas afirmações são verdadeiras. Utilizamos como ferramenta para isso, a analogia com a brincadeira das peças de dominó e um vídeo sobre a brincadeira. Antes de tudo, temos que observar a característica da fileira: Cada uma das peças está uma distância em relação às mais próximas, menor que o tamanho delas. Sem essa característica elas não formarão uma corrente de queda que une todas as peças. Esta característica é equivalente a propriedade concernente aos números inteiros: Cada número inteiro tem um sucessor que também é um números inteiro.

Extrapolando o raciocínio e imaginando uma fileira com infinitas peças, completamos a associação entre o conjunto das peças de dominó e o conjunto dos números naturais. De modo semelhante ao feito por Nóbrega (2013), fizemos a brincadeira da fileira com as peças de dominó, com a característica citada, levantamos alguns questionamentos:

i. *O que ocorre se derrubarmos o primeiro dominó?*

ii. *E se o sétimo (7°) for derrubado?*

iii. *Imaginando uma fileira com infinitas peças, podemos tirar a mesma conclusão?*

Para fortalecer a visualização e o entendimento do Princípio de Indução Finita, fizemos alguns questionamentos, ou pegadinhas, concernentes às perguntas i, ii, e iii.

PROFESSOR: Se eu derrubar a primeira peça, todas as outras cairão?

ESTUDANTES: Sim!

No entanto, derrubamos o primeiro dominó para trás ao invés de derrubá-lo em direção ao segundo. Isso mostrou que além do fato de P(1) ser verdadeira é necessário que a validade da sentença P(n) implique na validade da próxima sentença, P(n+1).

PROFESSOR: E então? Eu derrubei a primeira peça, e as outras não caíram por quê?

ESTUDANTES: Porque o senhor derrubou a peça para trás.

PROFESSOR: Isso quer dizer que se eu derrubar a primeira peça em direção à segunda, todas elas caem?

ESTUDANTES: Sim!

Para responder o item ii, nosso questionamento consistiu em deixar uma falha entre dois dominós (entre o 29º e o 30º). Isso fez quebrar a corrente na 29ª peça. E questionamos:

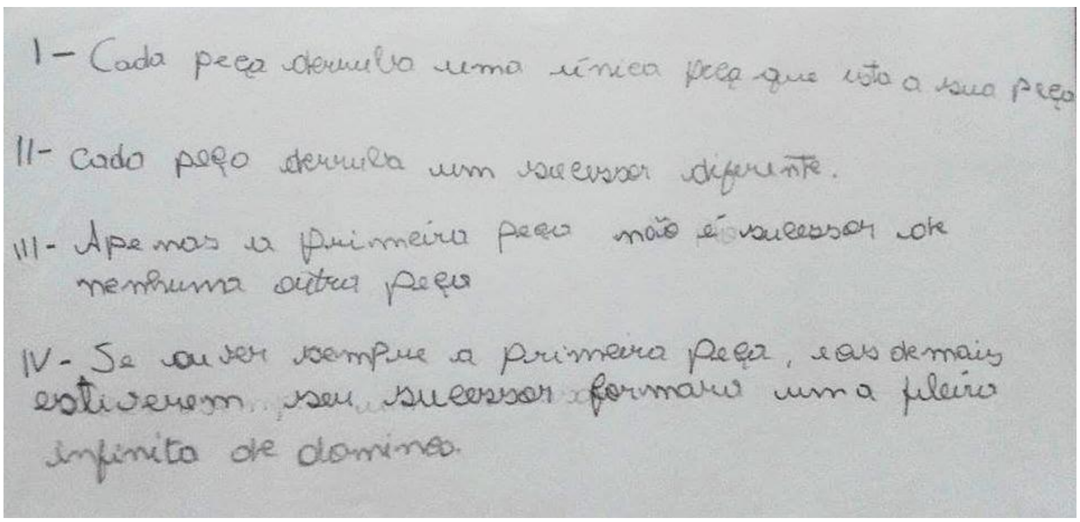
PROFESSOR: Fiz o que vocês disseram que seria necessário para que todas as peças caíssem e isso não aconteceu. Alguém me diria o que aconteceu?

ESTUDANTES: Tem uma falha na fileira!

Isso nos levou a refletir sobre duas coisas: Reconhecer a característica da fileira, que representam os números naturais, e reconhecer o passo indutivo, o fato de que a validade de P(n) implica P(n+1). Finalmente, o item iii segue dos itens i e ii: Se a primeira peça cai em direção à segunda, então esta também cai. Agora pelo uso repetido de ii, acontece a queda de todas as peças.

Segundo Nóbrega (2013), uma atividade interessante para fortalecer o entendimento do conceito dos números naturais e de suas propriedades, é transcorrer com as próprias palavras os axiomas de Peano, fazendo a analogia com a brincadeira das as peças de dominó.

Vejamos a transcrição dos Axiomas de Peano para a analogia das peças de dominó feita por um grupo de estudantes:



I – Cada peça derruba uma única peça que esta a sua peça

II – Cada peça derruba um sucessor diferente.

III – Apenas a primeira peça não é sucessor de nenhuma outra peça

IV – Se ouver sempre a primeira peça, e as demais estiverem seu sucessor formarão uma fileira infinita de dominos.

Figura 14 – Analogia de brincadeira da fileira de peças de dominó com os Axiomas de Peano

<u>Análise a posteriori</u>

A participação em massa e de forma efetiva por parte dos estudantes nos fez acreditar que a aula de introdução à Indução Finita fora produtiva. A resposta aos questionamentos e a resolução das atividades propostas, nos fizeram confiar nisso.

Acreditamos que o entendimento inicial do assunto é um passo importante para a compreensão das demonstrações de proposições e fórmulas vistas anteriormente e para as atividades com a aplicação do Princípio de Indução Finita.

2.7. PRINCÍPIO DE INDUÇÃO FINITA NA DEMONSTAÇÃO DE PROPOSIÇÕES

Esse encontro também foi realizado com ambas as turmas. Esse conteúdo aborda questões que demandam atividades teóricas e utilizam para isso, as técnicas do Princípio de Indução Finita, o qual consiste na admissão de dois passos:

1. **Base de Indução – P(1)**

   estabelecemos a veracidade da propriedade para $n = 1$.

2. **Passo de Indução – P(k) acarreta em P(k+1)**

   supomos que a propriedade é válida para algum inteiro $k,\ k > 1$. Provamos que a propriedade é válida para o inteiro seguinte $k + 1$, ou seja, que é válido que $\mathrm{P(k)} \rightarrow P(k + 1)$.

Análise *a priori*

Faremos agora, a demonstração de algumas conjecturas feitas nos primeiros encontros, utilizando o Princípio de Indução Finita. Esperamos que os estudantes compreendam a utilidade do Princípio e o processo algébrico de demonstração das proposições. Esperamos ainda que essas exposições sirvam de base para que os mesmos também possam desenvolver o procedimento corretamente na resolução de outras questões.

Desenvolvimento das atividades

Proposição 2.7.1. Para todo n ∈ N, a soma dos n primeiros números ímpares é igual a n^2.

Primeiro devemos verificar o passo base, P(1), que é a validade para n = 1, Desenvolvendo, temos: $1 = 1^2$.

A demonstração dessa proposição também é feita por Nóbrega (2013), e na verificação do primeiro passo, ele reforça a crença de que isto é valido não apenas para o primeiro, mas para os primeiros casos, fazendo mais algumas verificações, conforme:

- $P(2): \quad 1 + 3 = 4 = 2^2$
- $P(3): \quad 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$
- $P(4): \quad 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$
- $P(5): \quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$

Ressaltamos que mesmo fazendo os seis, sete, ou até os cem primeiros casos, nunca vamos ter uma prova real de que a conjectura seja válida para todos os números naturais, pois eles são infinitos. Para que nossa suposição deixe de ser apenas uma conjectura e passe a ser uma proposição demonstrada, precisamos mostrar que a validade de um caso de ordem qualquer, acarreta na validade do seguinte.

Este é o segundo passo, ao qual chamamos de passo indutivo. É fácil verificar que em uma quantidade n qualquer de números ímpares, o n-ésimo número ímpar é igual a $2n - 1$. Então, consideremos a sentença:

Suponha que P(n) seja verdadeira para algum n, ou seja:

Suponha que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$ seja verdadeira para algum número natural.

O segundo passo define se a conjectura é verdadeira ou não. É a verificação de que $P(k) \rightarrow P(k+1)$. Se alcançarmos uma afirmação verdadeira, e queremos alcançamos em encadeamento verdadeiro, pela lógica, só podemos ter partido de uma afirmação que também é verdadeira. Mas de uma afirmação falsa, só podemos tirar uma conclusão que também é falsa. Portanto, se chegarmos a uma afirmação verdadeira, ela só pode ter sido originado por uma afirmação verdadeira.

Então, partindo da suposição que P(n) é verdadeira para algum n natural, $n > 1$, queremos concluir que P(n+1) também é verdadeira. Dito de outro modo, queremos dizer que a igualdade

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) + (2n+1) = (n+1)^2$ também é verdadeira.

Desenvolvendo: *{1 + 3 + 5 + (2n−1)} + (2n + 1)* = n^2 + *(2n+1)* = $(n+1)^2$

Isto define o segundo passo da demonstração. Como ambos foram verificados, podemos concluir que nossa conjectura agora pode ser tomada como verdadeira para todo número natural.

Portanto $P(n) : 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ é verdadeira para todo *n* natural.

Ainda fazendo uma analogia com a fileira de peças de dominó, a verificação do passo 1 é o mesmo que derrubar a primeira peça. O passo 2 é assegurar que se a queda hipotética de uma peça qualquer implica na queda da seguinte, então todas as peças caem. Observe ainda, que para que acreditemos nisso de verdade, devemos conhecemos a caraterística da fileira, que a distancia entre todas as peças sucessivas é menor que o tamanho entre elas.

Proposição 2.7.2. A soma dos n primeiros números naturais, é igual a $\frac{(1+\mathrm{n})\cdot\mathrm{n}}{2}$

Primeiro, devemos verificar o passo base, a validade para n = 1: $\frac{(1+1)\cdot 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$. Como a fórmula é correta para o primeiro caso ou passo base está verificado.

Agora, vejamos o passo indutivo. Considere a sentença:

Suponha que P(n) seja verdadeira para algum n, ou seja: Suponha que $S(n) = \frac{(1+n)\cdot n}{2}$ ou $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(1+n)\cdot n}{2}$ seja verdadeira para algum número natural.

Para finalizar a demonstração, devemos verificar se P(k) $\rightarrow P(k+1)$. Ou seja, se $S(n) = \frac{(\mathbf{1}+\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{n}}{\mathbf{2}}$ for verdade para algum *n*, então implica que $S(n+1) = \frac{[\mathbf{1}+(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})]\cdot(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})}{\mathbf{2}}$ também é verdade.

De fato:

$$S(n+1) = S(n) + (n+1)$$

$$= 1 + 2 + \cdots + n + (n+1)$$

Por hipótese de indução, sabemos que a soma de 1 até n é igual a $\frac{(1+n)\cdot n}{2}$. Então, essa última igualdade pode ser escrita como:

$$\frac{(n+1)\cdot n}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{(n+1)\cdot n}{2} + \frac{2(n+1)\cdot n}{2}$$

$$= \frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2}$$

$$= \frac{[1+(n+1)]\cdot(n+1)}{2}$$

A verificação também do segundo passo, nos permite concluir a validade da fórmula para todos os números naturais. De forma mais categórica, afirmamos que pelo Princípio de Indução Finita, a soma dos n primeiros números naturais, é igual a $\frac{(1+\mathrm{n})\cdot\mathrm{n}}{2}$.

Análise a posteriori

Pudemos observar que os estudantes compreenderam o conceito da demonstração e a necessidade dos dois passos da demonstração de Indução, mas percebemos a dificuldade na compreensão algébrica. Apesar de ser um fato preocupante, no sentido da resolução prática essas questões não dizem respeito diretamente ao Princípio de Indução Finita e podemos afirma que houve compreensão do Princípio e de suas regras.

2.8. APLICAÇÕES DE INDUÇÃO FINITA

2.8.1. Torres de Hanói

As Torres de Hanói é um jogo antigo que consiste em uma base de madeira na qual estão firmadas três hastes verticais, e certa quantia de discos de diâmetros diferentes com um furo no meio, conforme a figura abaixo:

Figura 15 – Torres de Hanói.

De acordo com Hefez (2013), o jogo foi idealizado e publicado pelo matemático francês Edouard Lucas, em 1882, o qual inventou uma lenda sobre o jogo a fim de dar mais sabor a sua invenção:

Na origem do tempo, num templo oriental, Deus colocou 64 discos perfurados de ouro ao redor de uma das três colunas de diamante e ordenou a um grupo de sacerdotes que movessem os discos de uma coluna para outra, respeitando duas regras: A primeira determina que um único disco seja movida por vez; a segunda preceitua que um disco maior nunca pode ser colocado em cima de um disco menor. Quando todos os 64 discos fossem transferidos para uma outra coluna, o mundo acabaria.

Sobre essa profecia apocalíptica, ainda de acordo com Hefez (2013), não precisamos ficar preocupados com sua iminência, pois, se a cada segundo um sacerdote movesse um disco, o tempo mínimo para que ocorresse a fatalidade seria de $2^{64} - 1$ segundos, o que corresponde a aproximadamente, um bilhão de séculos.

Vamos trabalhar uma série de problemas concernentes ao jogo Torres de Hanói, e lançaremos mão do Princípio de Indução Finita para resolvermos. Julgamos um trabalho interessante, pois é um trabalho de associação entre um problema real e sua abordagem teórica.

2.8.2. O conceito de indução a partir de recorrências

A solução do jogo Torres de Hanói depende da quantidade de discos, e esta fica à escolha do jogador. A solução do jogo para uma quantidade n de peças pode ser encontrada a partir da quantidade anterior $n - 1$ de peças, sendo por isso, definida por recorrências lineares. Para saber se sempre existe solução para qualquer quantidade de peças, utilizamos o conceito de indução.

Análise *a priori*

Esperamos que seja uma atividade prazerosa para os estudantes e que o jogo seja uma inspiração para que consigam resolver questões mais técnicas que lhes serão atribuídas. Almeja-se que eles percebam de fato que o jogo tem solução para qualquer quantidade de discos, e que ela pode ser encontrada baseada na solução para uma quantidade anterior de discos.

Desenvolvimento das atividades

Inicialmente, apresentamos o jogo e suas regras. A fim de que o Princípio fosse usado corretamente, resolvemos o jogo por partes. Primeiro, resolvemos com um único disco; depois com dois discos, e em seguida com três discos. Desse modo, a solução em cada etapa é encontrada em relação resultado anterior, e estaremos usando o raciocínio recursivo.

Para melhor usar o raciocínio recursivo, bem como motivar seu uso na resolução do jogo, propomos duas etapas na resolução: Primeiro, resolver o jogo com 4 discos e anotar tempo gasto na resolução. Depois resolvê-lo em um número crescente de discos até o terceiro, e depois, tendo o raciocínio recursivo em mente, resolvê-lo com quatro discos.

Figura 16 – Estudante TB12 resolvendo o jogo Torres de Hanói

Após resolver manualmente o jogo para diferentes quantidades de discos, abordamos o resultado formalmente, através do Princípio de Indução Finita. Reiteramos aos estudantes que a resolução teórica do jogo nada mais é do que a representação matemática da resolução feita na prática.

Por questões didáticas, vamos nomear os discos por números naturais. Vamos associar a ele, os números naturais de 1 para o menor no topo, até o n-ésimo número natural ao maior deles, na base. Ainda por motivos didáticos, denominaremos as torres por representações. Utilizaremos uma das letras X, Y, e Z para cada uma delas.

Proposição 2.8.1. A Torre de Hanói com *n* discos tem solução para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vamos provar nossa tese utilizando o Princípio da Indução Matemática.

1. Passo base: Para $n = 1$, o quebra-cabeça tem solução, pois, para fazê-lo, basta transportar o único disco de uma torre para outra.

2. Passo indutivo: Suponha que sabemos resolver o jogo com uma quantidade n discos.

Vamos mostrar que a torre também pode ser solucionada com $n + 1$ discos. Para isso, vamos seguir o seguinte raciocínio: Digamos que os $n + 1$ discos estejam, inicialmente, dispostos na torre X. Admitindo que sabemos resolver o jogo com *n* discos, então sabemos como passa-los para a torre Y. Isso é a hipótese de indução. Agora, com um único movimento, podemos agora mover o maior dos discos da torre X para a torre Z. Utilizando novamente a hipótese de indução, podemos mover os *n* discos que estavam na torre Y para a torre Z.

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, o jogo tem solução para qualquer quantidade de discos, ou seja para todo $n \in N$.

Proposição 2.8.2. O número mínimo de movimentos (M_n) para resolver a Torre de Hanói com *n* discos é dada por $M_n = 2 \cdot M_{n-1} + 1$.

Demonstração:

1. Passo Base: Para n = 1, temos: $M_1 = 2 \cdot M_{1-1} + 1 = 2 \cdot M_0 + 1 = 1$. É fácil ver que 1 certamente é o número mínimo de movimentos que resolve a torre com um disco.

2. Passo indutivo: Considere a Torre de Hanói com n discos. Para movimentar o maior dos discos, é necessário remover todos os outros $n-1$ discos menores de cima dele. Para isso, é necessário, no mínimo, M_{n-1} movimentos, pela hipótese de indução. Feito isso, um único movimento é suficiente para mover o maior dos discos. Com mais M_{n-1} movimentos podemos mover os $n-1$ discos menores de volta para cima do disco maior.

Portanto, a quantidade mínima de movimentos para resolver o jogo com *n* discos é $M_{n-1} + 1 + M_{n-1} = 2 \cdot M_{n-1} + 1$.

<u>Análise a posteriori</u>

Apesar da imposição de uma forma de resolução do jogo, essa atividade não deixou de ser descontraída, contando com a participação efetiva de todos os estudantes. Eles puderam observar que fica fácil resolver o jogo com *n* discos, se souberem como fazer para *n-1* discos.

De modo geral, a comparação entre o raciocínio recursivo usado no procedimento prático e teórico foi compreendida, bem como o sentido ao qual se propunha o uso Princípio de Indução Finita nos problemas.

2.8.3. Conjecturando uma fórmula para o número mínimo de movimentos

Já sabemos que a quantidade mínima de movimentos para solucionar a torre, é $M_n = 2 \cdot M_{n-1} + 1$. Esta fórmula é uma equação de recorrência, uma vez que para calcular M_n usamos o valor anterior M_{n-1}, ou seja, para determinar M_2 usamos M_1; M_3 é determinado por M_2 e assim, sucessivamente.

Isso pode se tornar complicado, pois, só saberemos determinar a quantidade de movimentos necessários para resolver a o jogo com 100 discos, por exemplo, se soubermos resolvê-lo com 99 discos que também é uma quantidade consideravelmente grande. Assim é interessante obter uma identidade que forneça diretamente o valor de M_n independentemente dos anteriores.

Análise *a priori*

Esta é a última atividade de aplicação de Indução Finita e consiste em encontrar uma fórmula fechada para a quantidade mínima de movimentos. Almejamos que os estudantes encontrem a quantidade mínima de movimentos, expressem-na por meio de uma fórmula e finalmente entendam a demonstração algébrica dessas conjecturas.

Desenvolvimentos das atividades

A brincadeira de resolver o jogo com uma quantidade de discos em função da quantidade anterior, auxiliou os estudantes a perceberem a quantidade mínima de movimentos. Fizemos a projeção da tabela 6 no quadro negro, e pedimos para que os estudantes determinassem as quantidades que deveriam preencher a tabela. A conclusão dos resultados não foi difícil de ser obtida. Com alguma ajuda, até mesmo a organização da escrita em forma de potência foi determinada por eles.

Tabela 06 – Expressão para a quantidade mínima de movimentos

Quantidade de discos	**Quantidade mínima de movimentos**	$\mathbf{2^n}$	$\mathbf{2^n - 1}$
1	1	2	1
2	3	4	3
3	7	8	7
4	15	16	15
5	31	32	31
6	63	64	63

Fonte: Nóbrega, 2013, Princípio de Indução Matemática no Ensino Médio.

Proposição 2.8.3. A solução da Hanói com *n* discos é feita com o mínimo de $2^n - 1$ movimentos.

Demonstração: Vamos provar nossa tese utilizando o Princípio da Indução Matemática.

1. Passo base: Para n = 1, temos: $2^1 - 1 = 1$ e, de fato, precisamos somente de um movimento para resolver a torre com um disco.

2. Passo indutivo: Suponha que, para algum $n \in N$, a torre com n discos é solucionada com, no mínimo, $2^n - 1$ movimentos. Vamos mostrar que se a torre tiver solução com n+1 discos, então precisaremos de, no mínimo $2^{n+1} - 1$ movimentos.

Tomemos agora a torre com $n+1$ discos. Precisamos mover os *n* discos menores para uma outra torre, o que pela hipótese de indução é feito com, no mínimo, $2^n - 1$ movimentos. Precisamos, agora, mover o maior, o que é feito, com um único movimento. Utilizando novamente a hipótese de indução, com, no mínimo, mais $2^n - 1$ movimentos, movemos os outros *n* discos menores para cima do disco maior, resolvendo assim a torre com $n + 1$ discos. Dessa forma, o número mínimo de movimentos é: $2^n - 1 + 1 + 2^n - 1 = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$.

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, a torre com *n* discos é resolvida com, no mínimo, $2^n - 1$ movimentos.

Análise *a posteriori*

Com esta última demonstração, percebemos que os estudantes estavam mais familiarizados com a ideia de usar o raciocínio recursivo para encontrar a solução seguinte.

Durante a resolução teórica, percebemos a dificuldade na compreensão algébrica. Mas de modo geral, a comparação entre o raciocínio recursivo usado no procedimento prático e teórico foi compreendida, bem como o sentido ao qual se propunha o uso Princípio de Indução Finita na solução dos problemas.

2.9. AVALIAÇÃO

O último encontro foi destinado à avaliação. Fizemos perguntas relacionadas à teoria, ou seja, a necessidade de determinação do significado de indução, além de questões de ordem prática, aquelas nas quais se fazem necessário aplicar o Princípio de Indução Finita para respondê-las. A fim de comparar os dois métodos de ensino de Indução Finita, aplicamos a mesma prova para as duas turmas.

Analisaremos inicialmente, os acertos relativos à questão teórica. Para esta, o índice de acerto nas duas turmas foram equivalentes. Na tabela seguinte, encontram-se os registros do número de acertos em relação à primeira questão.

1. Explique o que é indução matemática.	
TURMA	NÚMERO DE ACERTOS
Turma A	18,2%
Turma B	18,7%

A figura abaixo, mostra a resposta de um dos estudantes.

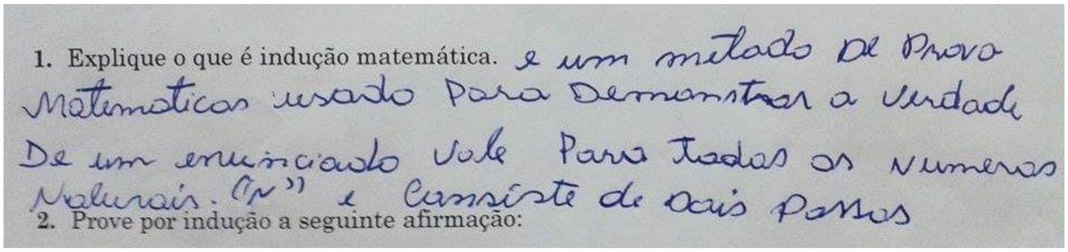

1. Explique o que é indução matemática. é um metodo De Prova Matematicas usado Para Demonstrar a Verdade De um enunciado Vale Para todos os Numeros Naturais. "n" e Consiste de dois Passos
2. Prove por indução a seguinte afirmação:

Figura 17 – Resposta do estudante TB14 sobre o que é indução.

Nas questões de ordem prática, no entanto, o número de acertos foi maior na turma em que aplicamos a metodologia do uso dos padrões e recorrências. Por questões didáticas, faremos a análise dos resultados entre as duas turmas de duas maneiras: Inicialmente, faremos a análise do número de acertos integrais. Depois analisaremos os acertos parciais e detalharemos cada um deles.

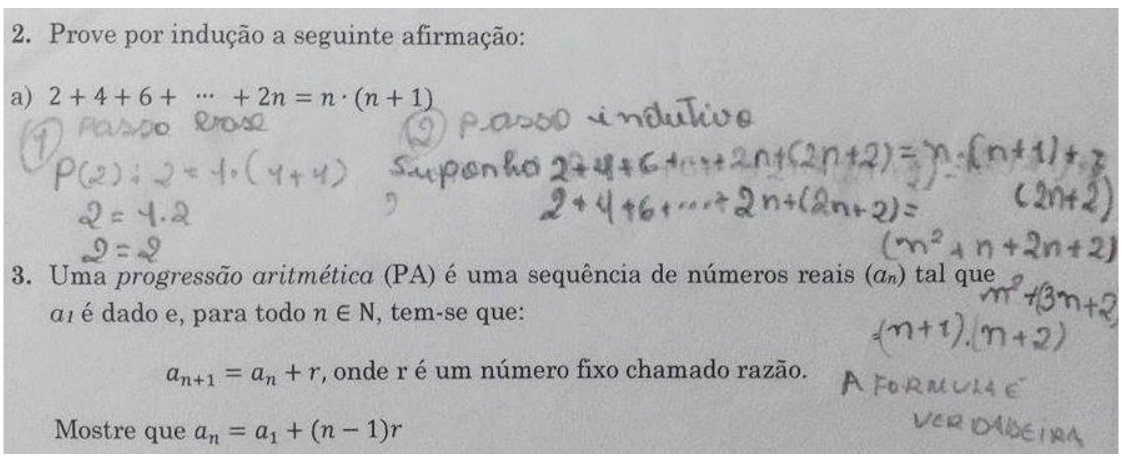
- **Acertos integrais.**

Nesta subseção relatamos apenas as questões com acertos integrais. Consideramos como acertos integrais, aquelas respostas onde o estudante expôs corretamente o raciocínio por meio de uma expressão matemática, aplicou os dois passos da demonstração, o passo base e o passo indutivo, desenvolveu e fatorou corretamente as expressões algébricas e a concluiu o raciocínio, afirmando a validade da fórmula para todos os números naturais. Abaixo mostramos o índice de acertos das turmas:

<table>
<tr><td colspan="2">2. Prove por indução a seguinte afirmação:
a) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n \cdot (n + 1)$</td></tr>
<tr><td>TURMA</td><td>NÚMERO DE ACERTOS</td></tr>
<tr><td>A</td><td>9,1%</td></tr>
<tr><td>B</td><td>0%</td></tr>
</table>

3. Uma *progressão aritmética* (PA) é uma sequência de números reais (a_n) tal que a_1 é dado e, para todo $n \in$ N, tem-se que: $a_{n+1} = a_n + r,$ onde r é um número fixo chamado razão. Mostre que $a_n = a_1 + (n-1)r$	
TURMA	NÚMERO DE ACERTOS
A	4,5%
B	6,2%

A figura abaixo mostra a resposta de um dos alunos.



2. Prove por indução a seguinte afirmação:

a) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n \cdot (n+1)$

① Passo base

P(2): 2 = 1·(1+1)

2 = 1.2

2 = 2

② Passo indutivo

Suponho 2+4+6+...+2n+(2n+2) = n·(n+1)+(2n+2)

2+4+6+...+2n+(2n+2) =

(n²+n+2n+2)

n²+3n+2

(n+1).(n+2)

A FORMULA É VERDADEIRA

3. Uma *progressão aritmética* (PA) é uma sequência de números reais (a_n) tal que a_1 é dado e, para todo $n \in$ N, tem-se que:

$a_{n+1} = a_n + r$, onde r é um número fixo chamado razão.

Mostre que $a_n = a_1 + (n-1)r$

Figura 18 - Resposta do estudante TA09 para a soma dos pares.

- **Acertos parciais**

Achamos conveniente colocar esse tópico, pois houve questões em que estudantes desenvolveram o raciocínio corretamente, mas não concluíram a questão por falta de conhecimento relativo de conteúdos precedentes, como fatoração ou desenvolvimento de produtos notáveis. Vale ressaltar, que esses casos aconteceram com um único estudante da Turma B e os demais casos aconteceram com a Turma A, a qual aplicamos o estudo com padrões e com relações de recorrência.

Em relação à primeira questão da avaliação, 18,2% dos estudantes da Turma A, e 6,2% dos estudantes da Turma B, acertaram o primeiro passo da demonstração.

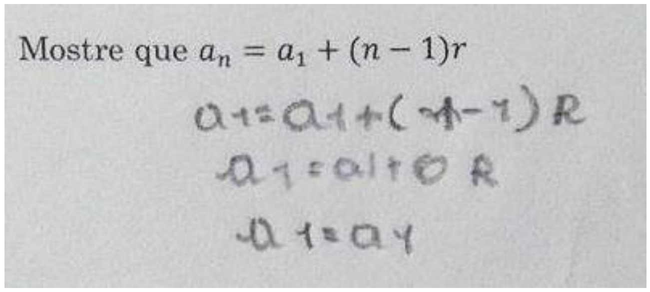


Figura 19 – Resposta do estudante TA09 para o termo geral de uma PA

Em relação à segunda questão, 18,2% dos estudantes da Turma A, não concluíram o segundo passo da demonstração.

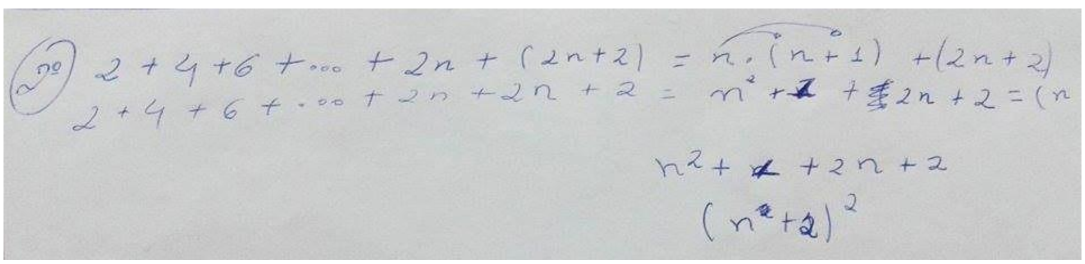


Figura 20 - Resposta do estudante TA20 para a soma dos pares

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao realizar esse trabalho, desenvolvemos uma proposta didática para estudantes do primeiro ano do Ensino Médio, abordando o Princípio de Indução Finita e aplicações desse princípio. O envolvimento e comprometimento crescente dos estudantes foram importantes para o desenvolvimento do trabalho e mostraram que existem conteúdos matemáticos que são prazerosos e mostram a Matemática sob um novo aspecto. A cada encontro, a turma ganhava mais confiança e se empenhava em resolver todas as atividades propostas.

Mesmo ao estudar conteúdos que já fazem parte da base curricular do Ensino Médio, como Sequências Numéricas e Progressões Aritméticas, percebemos que ainda é possível modificar o enfoque que hoje é dado ao assunto, tornando-os mais dinâmicos e ampliando os conceitos apresentados pelos livros didáticos. Conteúdos mais abstratos como Relações de Recorrência e Indução Finita, também podem ser abordados no Ensino Médio, com a necessidade de um problema motivador, ou até um enfoque que auxilie a compreensão dos conceitos abordados. Por isso, a fim de que pudéssemos desenvolver esse conteúdo, optamos por ensiná-lo por meio de analogias com fatos concretos e através da formação de conjecturas dado pelo trabalho com padrões. Na última parte do trabalho, a avaliação, verificamos que apesar de haver um pequeno índice de estudantes que acertaram as questões de aplicação do Princípio de Indução, questões mais internas foram observadas: Estudantes que começaram a resolver corretamente as questões propostas, mas tiveram dificuldade em resolver expressões matemáticas como fatorar produtos notáveis. Um indício de que eles compreenderam o método, mas careciam de uma base mais sólida sobre tópicos básicos da matemática. De maneira geral, o Princípio de Indução Finita é um conteúdo abstrato, e carece de maior tempo para que o estudante se familiarize.

A observação do entendimento dos estudantes acerca de demonstrações, nos deve servir de alerta sobre as muitas vezes que subestimamos nossos estudantes, achando que uma prova só iria complicar o entendimento deles. Por isso, acreditamos que o aprendizado de Matemática deve ser aprofundado no sentido da explicação de toda sua fundamentação, e defendemos um ensino que estimule o senso crítico, pois acreditamos que o quanto antes os estudantes forem instigados a questionarem a veracidade de fórmulas impostas como verdadeiras, mais efetivo será o processo de ensino e aprendizagem. Cremos que a busca de método de ensino e aprendizagem não se exaure durante uma única abordagem, e a busca pelo aprimoramento deste mecanismo deve ser contínua. Contudo, esperamos ter contribuído de alguma forma na maturação das ideias inerentes ao ensino deste tópico, e que tenhamos permitido aos interessados uma breve experiência que possibilite nortear trabalhos mais aprofundados sobre o tema. Lembramos que o estudo de Recorrências é uma boa oportunidade para inserir a linguagem de programação, e que as sequências didáticas também poderão ser adaptadas para o Ensino Fundamental, respeitando os estágios de desenvolvimento da criança.

Para professores ou pesquisadores interessados em ensinar Indução Finita no Ensino Médio com essa mesma abordagem, sugerimos que façam aulas de reforço com expressões algébricas e demandem mais tempo fazendo um número maior de atividades com padrões e Recorrências, para que exista um amadurecimento maior com a noção de Indução e do processo indutivo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ÁVILA. G. S. S. Análise matemática para licenciatura. São Paulo: Blucher, 2006.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais, 5ª a 8ª séries. Brasília, 1998.

CARNEIRO, V. C. G. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática. Zetetike, Campinas UNICAMP. Disponível em: http://www.mat.ufrgs.br/~vclotilde/publicacoes/ENGENHARIA%20ZETEIKE2005.pdf. Acesso em 20 out. 2014.

COURANT, R.; ROBINS, H. O que é matemática. 4ª edição. São Paulo: Ciência Moderna Ltda., 2000.

COUTINHO, S. C. Números Inteiros e Criptografia RSA. 2ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2001.

DANTE, L. R. Matemática, volume único. 1ª edição. São Paulo: Ática, 2005.

EVES, H. Introdução à história da matemática. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

HEFEZ, A. Aritmética. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

______ . Elementos de aritmética. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

______. Indução matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2009. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/Apostila4-Inducao>.pdf. Acesso em: 23 abr. 2014.

GOMIDE, A.; STOLFI, J. Elementos de matemática discreta para computação. http://www.ic.unicamp.br/~stolfi/cursos/MC358-2012-1-A/docs/apostila.pdf . Acesso em: 20 Out. 2014.

JANOS, M.. Matemática e natureza. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

LIMA, ET AL. A matemática do ensino médio. Vol 1: Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, E. l. . Meu professor e outras histórias. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LORENZATO, S. Para aprender matemática. 3ª edição. Campinas: Autores associados, 2010.

LOVÁSZ, L.; PELIKÁN, J.; VESZTERGOMBI, K. Matemática discreta. 2ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LUNGARZO, C. O que é ciência. 4ª edição. São Paulo: Brasiliense, 1992.

LUNGARZO, C. O que é matemática. 4ª ed. São Paulo: Brasiliense, 1992.

MARQUES, M. Incrível derrubamento de dominós. Vídeo. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=ycolw7209us. Acesso em: 11 nov. 2014.

MORGADO; CARVALHO. Matemática Discreta. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

POINCARÉ, H. O valor da ciência. 3ª edição. Rio de Janeiro: Contraponto, 2000.

NÓBREGA, L. X. G. Princípio da Indução Matemática no Ensino Médio. UFRN. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Natal, 2013. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/418>. Acesso em: 21 mar. 2014.

PACHECO, A. M. Modelagem matemática no ensino de equações de recorrências. Universidade Federal de Mao Grosso. Departamento de matemática. Cuiabá – MT. 2013. Disponível em: <http:/bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/553>. Acesso em: 20 mar. 2014.

VALE, I. Resolução de Tarefas com Padrões em Contextos Figurativos: exemplos de sala de aula. Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo, Portugal. 2013. Disponível em: <http://www2.rc.unesp.br/gterp/sites/default/files/artigos/ivale-palestratexto.pdf>. Acesso em Out. 2014.

APÊNDICE A – Planos de aula

ATIVIDADE 1 – DESCOBRINDO PADRÕES

Duração:	– 2 horas/aula.
Objetivos:	– Descobrir os padrões de formação de sequência de números ou figuras; – Conjecturar a lei ou o procedimento que gera os números ou as figuras de determinadas sequências; – Determinar as expressões matemáticas que represente a formação dessas sequências.
Material:	– Papel, lápis, borracha, régua, compasso e calculadora.
Metodologia:	– Aula expositiva e dialogada com uma série de atividades com sequência de números ou figuras que seguem um padrão de formação; – Exercícios individuais e em grupo; – Oficinas.

ATIVIDADE 2 – SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Duração:	– 1 hora/aula
Objetivos:	– Conhecer e escrever a linguagem dos termos de uma sequência numérica; – Resolver problemas relacionados à sequências numéricas.
Material:	– Lápis, borracha, caderno, calculadora.
Metodologia:	– Aula expositiva e dialogada; – Exercícios individuais e em grupo;

ATIVIDADE 3 – RELAÇÕES DE RECORRÊNCIAS

Duração:	– 2 hora/aula
Objetivos:	– Descobrir a relação entre os termos sucessivos de uma sequência numérica; – Determinar algebricamente a relação entre termos consecutivos de uma sequência. – Perceber a importância de uma fórmula fechada que determinem os termos de uma sequência.
Material:	– Lápis, borracha, caderno, calculadora.
Metodologia:	– Aula expositiva e dialogada; – Exercícios individuais e em grupo; – Oficinas.

ATIVIDADE 3 – APRESENTAÇÃO DE INDUÇÃO FINITA

Duração:	– 1 hora/aula
Objetivos:	– Compreender e descrever a importância do Princípio de Indução Finita; – Definir os dois passos do Princípio de Indução Finita: A verificação do passo base e o passo indutivo.
Material:	– Jogo de dominó, lápis, papel.
Metodologia:	– Vídeo com a brincadeira da fileira de peças de dominó; – Atividade lúdica: Desenvolvimento da brincadeira com a fileira de dominós, associando a brincadeira com os passos do Princípio de Indução Finita. – Exercícios individuais e em grupo;

ATIVIDADE 4 – PRINCÍPIO DE INDUÇÃO FINITA

Duração:	– 1 hora/aula
Objetivos:	– Compreender a importância de um método que prove asserções que afirmem o que julgamos como verdade. – Aplicar o Princípio de Indução Finita na demonstração de asserções simples
Material:	– Lápis, borracha, caderno, calculadora.
Metodologia:	– Aula expositiva e dialogada; – Exercícios individuais e em grupo; – Oficinas.

ATIVIDADE 5 – APLICAÇÕES DE INDUÇÃO FINITA

Duração:	– 2 hora/aula
Objetivos:	– Entender a importância do método de indução finita como forma de descobrir fórmulas, resultados ou soluções mesmo sem precisar executá-las; – Provar que sempre existe solução para o jogo Torres de Hanói para qualquer quantidade de discos, mesmo sem experimentar; – Encontrar a relação ou a passagem da solução de $n-1$ para n. (entre quantidades sucessivas de peças); – Demonstrar que a fórmula de recorrência que envolve a solução para $n+1$ peças em função de n peças é verdadeira; – Encontrar uma fórmula para o número mínimo de movimentos para solucionar o jogo Torres de Hanói; – Demonstrar que a fórmula que determina o número mínimo de movimentos para solucionar o jogo Torres de Hanói é verdadeira.
Material:	– Jogo das Torres de Hanói Lápis, borracha, caderno, calculadora.
Metodologia:	– Atividade lúdica: Jogo Torres de Hanói; – Exercícios individuais e em grupo.

APÊNDICE B – Questionário de inspeção

QUESTIONÁRIO DE INSPEÇÃO

1. Você conhece ou já ouviu falar na palavra INDUÇÃO?

SIM ☐	NÃO ☐
Descreva o que você conhece sobre indução. ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________	O que você imagina que indução signifique? ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________

APÊNDICE C – Avaliação

AVALIAÇÃO – INDUÇÃO FINITA

1. Explique o que é indução matemática.

2. Prove por indução a seguinte afirmação:

a) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n \cdot (n + 1)$

3. Uma *progressão aritmética* (PA) é uma sequência de números reais (a_n) tal que a_1 é dado e, para todo $n \in \mathrm{N}$, tem-se que:

$$a_{n+1} = a_n + r, \text{ onde r é um número fixo chamado razão.}$$

Mostre que $a_n = a_1 + (n-1)r$