UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

CARLOS CLEY EVANGELISTA LADISLAU

NOÇÕES DE CÁLCULO DIFERENCIAL NO ENSINO MÉDIO

Juazeiro-BA
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

CARLOS CLEY EVANGELISTA LADISLAU

NOÇÕES DE CÁLCULO DIFERENCIAL NO ENSINO MÉDIO

Trabalho apresentado à Universidade Federal do Vale do São Francisco – UNIVASF, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre.
Orientadora: Prof. Dra. Lucília Batista Dantas Pereira.
Coorientador: Prof. Dr. Prof. Severino Cirino de Lima Neto.

Juazeiro-BA
2014

Ladislau, C. Cley E.

L155n

Noções de Cálculo Diferencial no Ensino Médio/Carlos Cley Evangelista Ladislau. – Juazeiro-BA, 2014.

89 f.:il. Color.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro, 2014.

Orientadora: Profª. Dra. Lucília Batista Dantas Pereira.
Coorientador: Prof. Dr. Severino Cirino de Lima Neto.

1. Matemática – Ensino. 2. Ensino Médio. 3. Cálculo. 4. Cálculo Diferencial. I. Título. II. Universidade Federal do Vale do São Francisco.

CDD 515.3

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Biblioteca SIBI/UNIVASF
Bibliotecária: Ana Paula Lopes da Silva

Universidade Federal do Vale do São Francisco

Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT/UNIVASF

NOÇÕES DE CÁLCULO DIFERENCIAL NO ENSINO MÉDIO

Por:

CARLOS CLEY EVANGELISTA LADISLAU

Dissertação aprovada em 30 de Setembro de 2014.

Lucília Batista Dantas Pereira

Orientadora: Profª. Drª. Lucília Batista Dantas Pereira

(UNIVERSIDADE DE PERNAMBUCO – UPE)

Severino Cirino de Lima Neto

Prof. Dr. Severino Cirino de Lima Neto

(PROFMAT - UNIVASF)

Prof. Dr. Wilson Hugo Cavalcante

(UNIVERSIDADE REGIONAL DO CARIRI - URCA)

Juazeiro

2014

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, sobretudo.

Aos meus pais Carlos Alberto Ladislau e Arnete Evangelista Ladislau, em especial, a minha mãe, por ter me ensinado a ler e escrever as primeiras letras do alfabeto.

Aos colegas de mestrado Aristóteles Feitosa, Felipe Dionísio, Carla Saturnina e, em especial, ao amigo Tonny Santos, exemplo de sabedoria e altruísmo, com o qual dividi momentos de descontração ou estudo nesta árdua, porém prazerosa caminhada.

Aos colegas de trabalho Neide Azevedo, Adeilton Guimarães, Nivaldo Moreira, Simone Ramos e Simone Rodrigues pela solicitude, ajuda na permuta de horários e, em algumas situações, até abono de faltas por conta das inúmeras atividades relacionadas ao mestrado.

Aos professores Severino Cirino e Lucília Dantas, pelos exemplos de dedicação e incentivo aos alunos a buscarem sempre o melhor para a educação.

Aos meus filhos Caio Ladislau, Cayane Ladislau, Carla Eduarda Ladislau e a minha enteada Tarcila Ferreira, para os quais sirvo de exemplo.

A todos os alunos com os quais tive o prazer aprender, ensinar, construir e compartilhar conhecimento.

E, em especial, a minha esposa Isabel Ladislau, exemplo de companheira, pois o seu amor e dedicação foram os maiores incentivos para que conseguisse alcançar meus os objetivos.

RESUMO

A presente pesquisa tem por objetivo mostrar a viabilidade da introdução de noções de Cálculo Diferencial no Ensino Médio. Os sujeitos constituíram-se de alunos de 2º e 3º anos de escolas das cidades de Juazeiro-BA e Petrolina-PE, usando como princípio aulas expositivas e demonstrativas no intuito de prepará-los a compreenderem, interpretarem e modelarem soluções do cotidiano que exijam conhecimento sobre o tema. Foi elaborada uma sequência didática, com caráter investigativo, por meio de um curso de extensão onde se explorou o software GeoGebra para visualização dinâmica gráfica, além de uma página interativa numa rede social para comentários discussões e exposição de resultados relativos ao curso. Iniciou-se em setembro de 2013 e teve coleta de dados para análise finalizada em dezembro do mesmo ano. Foram registradas as observações e os resultados alcançados, mostrando que há a necessidade e a viabilidade de se introduzirem as noções de Cálculo já no Ensino Médio.

Palavras-chave: Limites. Derivadas. GeoGebra.

ABSTRACT

This research aims to show the feasibility of introducing notions of differential calculus in high school. The subjects consisted of students from 2nd and 3rd year schools in the cities of Juazeiro, Bahia, and Petrolina, Pernambuco, using the principle exhibition and demonstration classes in order to prepare them to understand, interpret and fashioning everyday solutions that require knowledge on the subject. A didactic sequence was drafted with an investigative nature, by means of an extension course where he explored the GeoGebra software for dynamic graphical display, plus an interactive page in a social network for comments and discussions exposure results for the course. It began in September 2013 and had data collection for analysis finalized in December of the same year. The observations and the results were recorded, showing that there is the need and the feasibility of introducing the concepts of Calculus in high school already.

Keywords: Limits. Derivatives. GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Esta dissertação apresenta o estudo sobre a realização do curso de extensão cujo tema foi “Noções de Cálculo para o Ensino Médio”. A escolha deste tema se deu a partir da experiência do aluno pesquisador como professor de Matemática desde 1990 e foi se aprimorando com a concretização de um projeto de extensão sob a supervisão do seu coorientador pelo PROFMAT (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), o que oportunizou ao aluno pesquisador um contato direto com grupos de estudos formados por alunos de Ensino Médio das redes pública e privada do Vale do São Francisco.

Levando em consideração o que dizem as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, “Falar de ensino e aprendizagem implica a compreensão de certas relações entre alguém que ensina, alguém que aprende e algo que é o objeto de estudo – no caso, o saber matemático.” (BRASIL, 2006, p.80). A partir dessa tríade de atuação, parece ser coerente desenvolver pesquisa nessa linha, uma vez que se tem como intuito possibilitar a demonstração do ensino da Matemática não como algo estanque, mas como algo dinâmico e flexível, para que se constatem a dinamicidade e flexibilidade do ensino de Cálculo no Ensino Médio.

Diante do exposto, o conhecimento da disciplina torna-se fundamental para a execução da práxis do educador, e não pode ser diferente com a Matemática, que, no atual contexto, assume papel fundamental na vida do discente.

> A missão do educador é preparar as novas gerações para o mundo em que terão que viver. Isto quer dizer proporcionar-lhes o ensino necessário para que adquiram as destrezas e habilidades que vão necessitar para seu desempenho, com comodidade e eficiência, no seio da sociedade que enfrentarão ao concluir sua escolaridade. (SANTALÓ, 1996, p. 11).

Assim, é importante ponderar o ensino de noções de Cálculo no Ensino Médio como algo que apresenta, sim, entraves para o educando; no entanto, se o professor possuir um amplo conhecimento da disciplina, pode tornar seu trabalho menos complicado, levando o discente a uma aprendizagem mais efetiva e eficiente.

Dessa forma, questiona-se o seguinte: Por que o aluno é tão resistente à aprendizagem de Matemática? Por que o aluno que chega ao ensino superior nas áreas de ciências exatas têm tantas dificuldades com a disciplina Cálculo? Será que esse aluno possui o conhecimento necessário para compreender as noções fundamentais do Cálculo? Que contribuições os conceitos de limites e derivadas, se explorados no Ensino Médio, poderão trazer ao aluno no Ensino Superior?

Sabe-se que a disciplina Matemática permite uma interdisciplinaridade com outras áreas do conhecimento. Assim, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do ensino de matemática para o Ensino Médio, “Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras”. (BRASIL, 2002, p.111).

Constata-se, então, que na medida em que a disciplina Matemática serve como balizadora para estruturar o pensamento lógico do aluno, também, o capacita a aprender, interpretar situações e tirar conclusões próprias, tornando a disciplina um instrumento para muitas ações necessárias a sua formação.

Portanto, este estudo tem como objetivo geral mostrar a viabilidade de se introduzir as noções de Cálculo no Ensino Médio. Especificamente, busca-se trazer abordagens sobre como ensinar o Cálculo no atual contexto; aplicar o Cálculo Diferencial no Ensino Médio, e usar o software GeoGebra como forma de aprimorar o entendimento de gráficos de funções e suas implicações na aprendizagem de limites e derivadas.

É salutar informar que se tem a pretensão de despertar o interesse dos órgãos responsáveis para que haja a inclusão das noções básicas de Cálculo na grade curricular do Ensino Médio. O fato de expressar esse desejo não que dizer em absoluto que este estudo vá exaurir o tema, mas que possa contribuir para uma reflexão sobre a importância da aplicabilidade dessas noções ainda no Ensino Médio. E que essa venha a contribuir de forma significativa para que o aluno chegue à universidade com embasamento para acompanhar a linha de raciocínio exigida por uma série de disciplinas, tais como: Cálculo Diferencial e Integral, Física, Probabilidade e Estatística; que permeiam os mais variados cursos de nível superior nas áreas de ciências exatas. É importante também ressaltar que a Matemática está inserida no contexto diário dos indivíduos e, por esse motivo, deve ser compreendida como uma ferramenta que pode auxiliar na realização das mais diversas atividades, tanto na vida profissional quanto na vida pessoal. Dessa forma, espera-se contribuir de forma significativa para que essas noções básicas de Cálculo sejam ensinadas já no Ensino Médio.

Nesse sentido, almejando o êxito desta pesquisa, para os estudos de conteúdos serviram como suportes, os autores Leithold, Ávila, Hughes e Bianchini.

O presente trabalho está organizado em quatro capítulos. O capítulo 1 trata do ensino de noções de Cálculo no contexto atual, dos estudos sobre o ensino do Cálculo no Ensino Médio e do uso do software GeoGebra e suas implicações na aprendizagem da matemática. No capítulo 2, são apresentadas as definições que serviram de base para o curso de extensão. No capítulo 3, expuseram-se a metodologia utilizada, o local e os critérios usados quanto à participação dos alunos no curso e à entrega do certificado. No capítulo 4, estão os resultados obtidos pelos alunos de 2º e 3º anos do Ensino Médio, selecionados de escolas públicas e privadas do Vale do São Francisco na avaliação final, além da análise das respostas dos mesmos no questionário avaliativo pós-curso. Por fim, apresentam-se as considerações finais e sugestões.

CAPÍTULO 1

1. O ENSINO DE NOÇÕES DE CÁLCULO NO CONTEXTO ATUAL

Nos dias atuais, ainda, é possível perceber o Ensino das Ciências Exatas baseado no modelo cartesiano, reducionista e linear, onde a estratégia de ensino se desenvolve a partir da exposição formal e discursiva dos conteúdos pelo professor. Numa tentativa de síntese, pode-se dizer que os educandos, ainda, estão limitados ao espaço de suas carteiras, sendo-lhes exigidas apenas as habilidades de memorização e reprodução.

No entanto, faz-se necessário direcionar um novo olhar para o ensino de Cálculo. Nessa perspectiva, surge o modelo de ensino de Cálculo fundamentado na proposta de Newton e Leibniz, cuja aplicabilidade abrange diversas áreas da Física, Química, Biologia, Economia, Astronomia, Arqueologia, Medicina e até mesmo a Psicologia e as Ciências Políticas. A disciplina Cálculo diferencial e integral assume um papel importante para a formação de vários segmentos profissionais, tais como nas Engenharias e na Medicina.

Nesse sentido, Lachini (2001) argumenta que o estudo do cálculo ajuda o aluno no desenvolvimento do pensamento organizado. Ainda de acordo com o autor, os alunos entram na universidade com dificuldades de organizar suas ideias para resolver determinados problemas, e essa habilidade, de acordo com o autor, é fundamental não só no período do ensino superior como também no Ensino Médio, pois "é preciso que o estudante pense sobre o significado geométrico e numérico do que está fazendo, saiba avaliar e analisar dados e explique o significado de suas respostas." (LACHINI, 2001, p. 147).

Um dos grandes problemas apontados atualmente no ensino de cálculo deve-se ao fato de a ênfase ser dada na parte procedimental. Para Frota (2001), parece haver um consenso que o ensino de matemática precisa libertar-se das amarras de um ensino passo a passo, que produz a aprendizagem de procedimentos e não incentiva o conhecimento matemático relacional que leva o aluno a estabelecer novas conexões entre os vários conceitos estudados.

Ao se analisar a história do desenvolvimento do Cálculo no Brasil, foi possível perceber que, devido a algumas reformas no ensino, os conteúdos de Cálculo já estiveram presentes e ausentaram-se em diferentes momentos da grade curricular do Ensino Médio. Atualmente, é possível perceber que alguns tópicos do Cálculo se encontram ausentes nos livro didáticos, como os limites e as derivadas, Ávila (1991) diz que essa ausência se deve ao fato de alguns professores acreditarem ser esse um conteúdo muito difícil para os alunos do Ensino Médio.

Assim, este trabalho pretende demonstrar que isso pode ser um mito, uma vez que todo estudo requer a habilidade da prática e essa habilidade pode ser trabalhada no ensino de Cálculo.

Segundo Ávila (1991, p. 8 apud MOLON, 2013, p.16) “seria muito mais proveitoso que todo o tempo que hoje se gasta, no 2º grau, ensinando formalismo e longa terminologia sobre funções, que todo esse tempo fosse utilizado com o ensino das noções básicas do Cálculo e suas aplicações”.

Diante do contexto, surge a possibilidade de buscar por meio desse estudo uma proposta alternativa de ensinar Cálculo. Entende-se ser necessário passar de uma organização em que o professor é o centro, para uma forma em que os alunos interajam com outros alunos, com o professor e com as mídias, ou seja, que o aluno possa interagir não só no ambiente micro (sala de aula), mas também em um ambiente macro (mundo e suas inter-relações). Além disso, busca-se nos softwares um ambiente de aprendizagem no qual a construção dos conceitos de limite e derivada possa ser potencializada.

1.1 ESTUDOS SOBRE NOÇÕES DE CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO

É notória a preocupação de muitos professores com o ensino do Cálculo na Educação Básica. Há algumas pesquisas sobre sugestões de como introduzir novamente as noções iniciais do Cálculo, de modo que seja facilitada uma transição desses tópicos aos que pretendem ingressar à universidade, principalmente aos que cursarão algum ramo das Ciências Exatas.

Assim, Oliveira (2010) fez um histórico sobre o ensino do Cálculo no Brasil desde 1931 até os dias atuais, além de uma análise dos livros didáticos usados hoje em dia. O autor observou que o Cálculo estava presente nos currículos escolares do antigo Ensino Secundário, o que corresponde ao ensino que antecede o Ensino Universitário atual, ou seja, ao Ensino Médio. Segundo os dados de sua pesquisa, em 1960, o Cálculo deixou de ser ensinado nas escolas brasileiras.

A resistência a esse fato foi mínima. Segundo Ávila (1991), há alguns fatores determinantes para essa exclusão, tais como a exigência de um estudo aprofundado dos números reais e uma excessiva preocupação com o rigor exigido para tal, algo que a então matemática moderna julgava como inviável devido ao tempo que se despendia, sobretudo porque o Cálculo passou a não constar nos editais dos vestibulares. Porém, com o passar dos anos, observou-se a necessidade de se reintroduzir esses tópicos, devido ao distanciamento que se criou entre os conteúdos programáticos dos cursos de Ensino Médio e o que realmente se aborda no ensino superior relativo ao Cálculo.

Desse modo, Guedes e Assis (2009) realizaram uma pesquisa com professores de Ensino Médio das redes pública e privada de Natal-RN, com o objetivo principal de verificar se o ensino de elementos do Cálculo fazia parte dos conteúdos abordados pelo professor em sala de aula.

Os dados revelaram que o Cálculo não estava incluso nos conteúdos programáticos das escolas de Ensino Médio daquela região, e que um dos principais impedimentos relatados pelos professores era o fato de a grande maioria dos docentes se achar despreparada para proporcionar essa inclusão, embora não tenham atribuído essa falta de preparação às instituições onde se formaram, pois as julgavam de boa qualidade.

Consideraram também que o Cálculo seria útil para os seus alunos do Ensino Médio, mas que a falta de material didático adequado era outro fator que impossibilitava a abordagem do tema nesse nível de ensino e, sobretudo, que a metodologia de ensino dessa disciplina no Ensino Superior é equivocada, pois a mesma não é abordada de uma forma experimental, contextualizada; porém, apenas limitada às salas de aulas, com demonstrações enfadonhas e exercícios repetitivos.

Voltando ao trabalho de Oliveira (2010), sua proposta se iniciou com um minicurso de quatro encontros ou 8 horas aula, com um grupo de sete alunos do 2º e 3º anos do Ensino Médio do Colégio Estadual de Ensino Médio Cândido José Godói. Realizou uma revisão sobre funções para, em seguida, utilizar recipientes distintos com formato de sólidos geométricos, no laboratório de química do Colégio, onde havia torneiras ativas para que ele questionasse os alunos sobre a velocidade com que o nível da água subia sob uma vazão constante e esboçassem, em um sistema de eixos, a relação entre a altura do nível da água e o tempo necessário para encher cada sólido. Após esse primeiro encontro, o aluno pode entender, na prática, a ideia de taxa de variação.

Nos encontros seguintes, Oliveira usou a sala de aula com quadro negro para revisar conceitos sobre semelhança de triângulos, razão de semelhança no plano cartesiano, coeficiente angular; e o laboratório de informática da escola para o uso do software Winplot para interpretar, geometricamente, a taxa de variação média e instantânea, além de usar o quadro branco como auxílio.

O autor pôde observar a evolução dos alunos no decorrer das aulas práticas. Nas atividades propostas, concluiu que o Winplot deu uma visão substancial sobre a interpretação geométrica da taxa de variação, tema base para compreensão das primeiras noções de Cálculo, e que, sem a necessidade de muitas aulas, conseguiu despertar o interesse dos alunos em relação à disciplina cujas noções básicas iniciais jamais deveriam ter saído do Ensino Médio.

Nessa linha de pensamento, Molon (2013) propõe uma série de atividades com o objetivo de obter uma aproximação do aluno aos conteúdos relacionados ao Cálculo, tendo como auxílio o uso de algo que permeia o cotidiano dos nossos alunos atuais: os softwares computacionais.

Em sua pesquisa, foi usado o GeoGebra para facilitar a compreensão de conceitos importantes para o estudo do Cálculo. A autora realizou um minicurso com um grupo experimental de 14 estudantes do 1º ano, e nessa oportunidade ministrou atividades sobre os conceitos intuitivos de limites, velocidade média e velocidade instantânea, e o cálculo da área de regiões do plano limitada por curvas.

Molon, ainda, destaca que, devido à escolaridade dos estudantes, direcionou os estudos acerca do comportamento de gráficos de funções, explorou o conceito de limites, reta tangente, coeficiente angular e utilizou a ideia de aproximação, facilitando, assim, a compreensão da noção intuitiva de integral definida, sempre com o auxílio do GeoGebra.

Segundo a autora, a oportunidade de trabalhar num laboratório proporcionou um entendimento mais efetivo desses conteúdos, uma abordagem diferenciada do que, em geral, é a praticada em sala de aula, deixando de lado a abstração usual à qual os professores submetem os estudantes, sugerindo situações que aproximem a matemática da realidade, como forma de melhorar a qualidade do ensino da disciplina.

Já Vianna (2013) traz uma proposta de ambientação dos alunos com as ideias de limites derivadas e integrais. Ele defende essa ambientação a partir do 9º ano do Ensino Fundamental, e usa como local da pesquisa o Colégio Pedro II[1], no Rio de Janeiro. Segundo o autor, o aluno tem as primeiras ideias de infinito quando a ele são apresentados os conjuntos numéricos. Tenta induzir o aluno a desenvolver aptidões por meio da prática, ao passo que introduz novas simbologias e remete o aluno a refletir sobre conceitos, instigando-o à curiosidade sobre as inúmeras aplicações da disciplina.

A sua pesquisa foi iniciada por meio de um questionário investigativo sobre o conhecimento do conceito de infinito. O questionário aplicado se constituiu na sua primeira atividade, tendo o autor abordado sondagens que exploraram a ideia de infinito; as respostas dos alunos foram criteriosamente analisadas e, a partir desse questionário, foram sugeridas outras duas atividades não realizadas com alunos em sala de aula. Segundo o mesmo, o motivo foi a escassez de tempo.

Como proposta de uma segunda atividade, Vianna faz alusão ao método de Exaustão de Eudoxo, idealizada por Arquimedes, cujo objetivo é o de calcular a

---

[1]O Colégio Pedro II é uma tradicional instituição de ensino público, localizada no estado do Rio de Janeiro, no Brasil. A partir da Lei nº 12.677/2012, o Colégio Pedro II equiparou-se aos IFEs (Institutos Federais) nas questões administrativas, e consequentemente as suas Unidades Escolares passaram a ser chamadas de Campus, e a Direção-Geral passou a ser chamada Reitoria.

área de um círculo de raio 1 limitado inferiormente pela área de um polígono regular de n lados inscrito nesse círculo. Para isso, sugere que os alunos tenham acesso a um computador com internet, GeoGebra e Excel instalados. Logo em seguida, sugere realizar uma série de procedimentos no GeoGebra e no Excel com o intuito de induzir os alunos a perceberem que, conforme se aumenta o número de lados do polígono regular inscrito, sua área, cada vez mais, se aproxima da área do círculo, tanto visual (GeoGebra) quanto numericamente (Excel). Ao final dessa atividade, o autor propõe ao professor a introdução da notação $\lim_{n \to +\infty} A_{pol} = A_{circ}$, onde A_{pol} representa a área do polígono de n lados e A_{circ} representa a área do círculo.

Na terceira atividade, denominada alterações em gráficos, na qual sugere ao professor trabalhar as transformações que ocorrem nos gráficos de funções reais do tipo $f(x) = p(x+q)^n + r$ ocasionadas pelas variações dos coeficientes, p, q, r e n. Nessa atividade, foram dadas ênfases às ideias de limites laterais, às definições de assíntotas horizontais e verticais; explorados diversos outros conceitos sobre paridade e, por meio da translação, trabalhados as definições de amplitude, pontos de inflexão, máximos e mínimos, sempre usando o GeoGebra como suporte gráfico.

Na sequência, sugere exercícios sobre funções trigonométricas do tipo $f(x) = c.\text{sen}(ax+b)$, $f(x) = c.\cos(ax+b)$ e $f(x) = c.\text{tg}(ax+b)$, tentando induzir o aluno à compreensão do que ocorre quando se fazem variações nos coeficientes a, b, c e d. Explora os conceitos de domínio, imagem, período, paridade, pontos de inflexão, translação e amplitude, sempre usando o GeoGebra como suporte gráfico, de modo análogo às atividades anteriores.

A partir da segunda atividade, Vianna propõe a aplicação de um Quiz interativo via PowerPoint, de caráter avaliativo, com o objetivo de proporcionar debates e conclusões sobre os conceitos estudados, utilizando uma apresentação autoexplicativa no PowerPoint ou Impress fornecida nos arquivos: Alterações no gráfico 21.ppt e Alterações no gráfico 22.ppt, respectivamente encontrados nos endereços: http://www.4shared.com/office/XdVZffZD/Alteraes_no_grfico_21.html e http://www.4shared.com/office/rz4JulVb/Alteraes_no_grfico_22.html, dividindo os alunos em grupos de 3 a 5 elementos para essa aplicação.

Como as atividades 2 e 3, propostas pelo autor, não foram experimentadas, não há como tirar conclusões sobre as mesmas, como também sobre os resultados que se obteriam, caso seguisse as ideias do autor, ou se suas atividades se adequariam a qualquer realidade de ensino existente em outras regiões do nosso país. De todo modo, essas atividades são extremamente interessantes, e o próprio autor as coloca como sugestões para pesquisas futuras.

Outra pesquisa que propõe a inserção de ideias de Cálculo no Ensino Médio é a de Carmo (2013), em que o autor procura estender o número de problemas de otimização que se consegue solucionar no ensino básico para além daqueles modelados por funções quadráticas.

Para isso, fez uso do que ele denominou de Métodos Numéricos, tendo realizado uma abordagem numérica para problemas de otimização no Ensino Médio, sugerindo uma série de atividades relativas ao tema. A proposta do autor é muito interessante, visto que o mesmo se intitula professor do Ensino Médio e da disciplina Cálculo no Ensino Superior, tendo contato com as duas realidades.

Ele inicia seu estudo mostrando um método de encontrar máximos e mínimos de funções quadráticas sem necessidade de usar as fórmulas para o cálculo das coordenadas do vértice da parábola, usando apenas o cálculo das raízes de funções do tipo $f(x) = ax^2 + bx$, $(a \neq 0)$.

Sua ideia é mostrar que a abscissa do vértice (x_v) é a média aritmética das raízes, enquanto que o valor máximo da função, se $a < 0$; ou mínimo, se $a > 0$ - conhecido pelo aluno do Ensino Médio pela ordenada do vértice da parábola (y_v) - nada mais é do que o valor numérico da abscissa do vértice na função f, ou seja, $y_v = f(x_v)$.

Nesse sentido, Carmo prova que, independentemente de a função apresentar ou não raízes reais, os valores máximo ou mínimo das funções do tipo $f(x) = ax^2 + bx$ $(a \neq 0, c = 0)$ e $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a.c \neq 0)$ são iguais, ou seja, não se alteram, pois quando o c varia, o gráfico sofre uma translação de modo a não alterar o valor máximo ou mínimo, e o auxílio do GeoGebra ajuda como suporte gráfico para um melhor entendimento por parte do aluno.

> Muitas questões ligadas a encontrar extremos de uma função são deixadas de lado no ensino básico por esta estrutura formal e tradicionalista de ensinar matemática estar impregnada nas mentes dos professores da escola básica. Não vamos ser covardes em nos restringirmos a trabalhar apenas com o que os exames de vestibulares trazem, temos que ir para além deste ponto comum. Educação é refletir sobre o cotidiano, o atual; é procurar alternativas para resolver problemas da vida prática. (CARMO, 2013 p.11)

Nesse trecho, ao usar a palavra covarde, o autor talvez quisesse expressar o comodismo de uma grande parcela dos professores ao lidar com a Matemática mecanizada, na qual os alunos decoram técnicas de resoluções de questões sem se importar com as aplicações da disciplina no cotidiano.

O trabalho de Carmo foge um pouco do objetivo desta pesquisa, pois, para demonstrar os Métodos Numéricos, visando encontrar máximos e mínimos para funções reais, lança mão de teoremas que exigem disponibilidade de tempo e uma maturidade ainda não alcançada pela quase totalidade dos alunos do Ensino Básico. Ele demonstra rigorosamente o Teorema de Weierstrass para valores extremos, os Teoremas de Rolle e do Valor Médio, com uma linguagem abstrata, algo que ainda não faz parte da realidade do aluno do Ensino Médio.

Pode-se observar nestas pesquisas que há a real necessidade de se introduzir as noções de Cálculo no Ensino Médio, e mesmo que as escolas não tenham suporte físico para tal, como, por exemplo, um laboratório de informática, o professor pode usar a criatividade e o improviso de material didático para conseguir levar esses tópicos ao conhecimento dos alunos.

1.2 USO DO SOFTWARE GEOGEBRA E SUAS IMPLICAÇÕES NA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA.

O acesso às mídias eletrônicas e à internet tem crescido de forma significativa, dando a entender que o uso do computador deixará a sociedade cada vez mais dependente dele. Segundo Borba e Penteado (2001), o uso da tecnologia da informática (TI) é discutido desde a década de 70 do século XX, e as escolas públicas e privadas deveriam proporcionar, no mínimo, uma “alfabetização tecnológica” aos seus alunos.

> Na verdade, as inovações educacionais, em sua grande maioria, pressupõem mudança na prática docente, não sendo uma exigência exclusiva daquelas que envolvem o uso de tecnologia informática. A docência, independentemente do uso de TI, é uma profissão complexa. Nela estão envolvidas as propostas pedagógicas, os recursos técnicos, as peculiaridades da disciplina que se ensina, as leis que estruturam o funcionamento da escola, os alunos, seus pais, a direção, a supervisão, os educadores de professores, os colegas professores, os pesquisadores, entre outros. (BORBA e PENTEADO, 2001, p.54)

Desde então, apesar do medo inicial de ser substituído pelo computador, percebeu-se que a prática docente estava imune a tal fato, e que, apesar dos benefícios da inserção da tecnologia no cotidiano escolar ser algo indiscutível, o uso do computador não pode ser considerado como único fim, pois a discussão entre o professor e os alunos é insubstituível.

No caso dos softwares, tem-se presenciado, ao longo dos últimos anos, o crescimento do número de programas para apoiar o ensino de vários conteúdos matemáticos. Os softwares de geometria dinâmica favorecem a agilidade na investigação, pois construções geométricas, que tomariam certo tempo para serem realizadas no papel, são obtidas em segundos na tela do computador. A interatividade oferecida por esses softwares torna real a possibilidade de privilegiar as propriedades geométricas de uma figura. Dentre os programas auxiliares do ensino de Cálculo encontra-se o aplicativo GeoGebra (www.geogebra.org). Esse software é um programa de matemática dinâmico e gratuito além de ter versões para o Windows e Linux. Combina álgebra, geometria, tabelas e gráficos, possui, também, ferramentas para o trabalho com Estatística e Cálculo.

CAPÍTULO 2

2. O CURSO DE EXTENSÃO PARA ALUNOS DE ENSINO MÉDIO

A programação do grupo de estudos voltada para os alunos do Ensino Médio foi delineada pela aplicabilidade de uma revisão inicial dos conceitos básicos com caráter investigativo inicial, tendo sido foram trabalhados os seguintes conteúdos: produtos notáveis, fatoração, solução de uma equação do 2º grau completando quadrados, domínio de funções reais. Em seguida, limites de funções: noção intuitiva de limite por meio de progressões geométricas (séries convergentes), limite de uma função afim, de uma função constante; limites laterais e limites infinitos, a indeterminação da forma $\frac{0}{0}$ e limite da função polinomial para x tendendo a $-\infty$ e $+\infty$; Introdução ao estudo da derivada de uma função: interpretação geométrica e física, derivada de uma função; regras de derivação e aplicações da derivada: máximos e mínimos. O cronograma do curso pode ser visto no apêndice H.

O curso teve uma carga horárias de 30 horas-aula, entre aulas expositivas no quadro branco; Datashow, na exposição de gráficos com o auxílio do GeoGebra; e com as avaliações. Porém, nos tópicos a seguir, abordar-se-ão apenas os temas mais importantes trabalhados no curso, que servirão de base para o entendimento das noções de Cálculo Diferencial. As listas preparadas com teorias e exercícios, usadas em 24 das 30 horas-aula do curso podem ser vistas no Apêndice H.

2.1 A IDEIA DE LIMITE PARA O ENSINO MÉDIO

Ao estudar as progressões geométricas, o aluno é remetido à primeira noção de limite. Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) destacam que:

> O estudo da progressão geométrica infinita com razão positiva e menor que 1 oferece talvez a única oportunidade de o aluno estender o conceito de soma para um número infinito de parcelas, ampliando sua compreensão sobre a adição e tendo a oportunidade de se defrontar com as ideias de convergência e de infinito. (BRASIL, 2002, p.121).

No curso de extensão, os alunos foram instigados a responder às seguintes atividades:

Atividade 1:

a) Qual o comportamento da sequência $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},...,\frac{1}{2^n},...,\ n \in N^*$, quando n cresce indefinidamente, tendendo ao infinito?

Resposta esperada: zero, pois quanto maior o valor de n, maior será o denominador da expressão $\frac{1}{2^n}$ e mais próximo de zero será o resultado da expressão.

b) Qual o valor do limite da soma dos termos da PG $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{2^n}+...$?

Resposta esperada: Na PG acima, tem-se $a_1 = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$, logo para calcular a soma S_n dos n termos basta substituir os valores de a_1 e q na eq. (1.a).

$$S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1} \qquad (1.a)$$

Assim, obtém-se, a eq. (1.b),

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}.\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1}. \qquad (1.b)$$

Sabendo-se que quando n tende ao infinito, $\frac{1}{2^n}$ tende a zero, o valor da soma tende a 1. Voltando à eq. (1.b), tem-se:

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}.\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{2}[0-1]}{-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = 1, \text{ ou seja, } \lim_{n \to \infty} S_n = 1. \qquad (2)$$

Na figura 1, tem-se uma interpretação geométrica para a soma pedida.

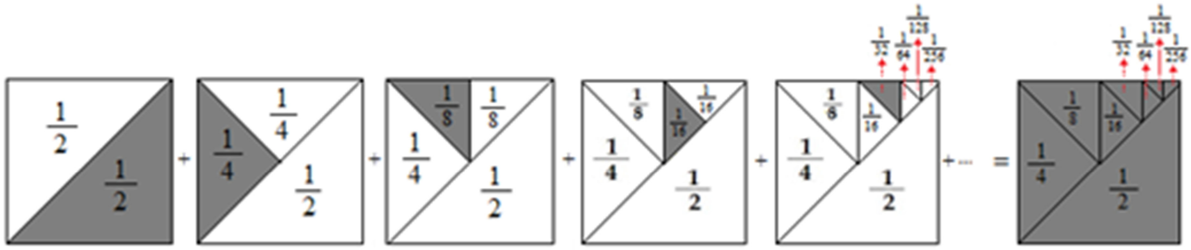


Figura 1. Representação geométrica da soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{2^n}+...=1$.

A atividade a seguir foi trabalhada com os alunos do curso no intuito de complementar a ideia já introduzida no exemplo anterior quando se trabalhou progressão geométrica. Ela sintetiza e facilita o entendimento do conceito de limite ao se usarem as funções.

Atividade 2:

a) Dada a função real $f(x)=\frac{2x^2-4x}{x-2}$, qual o domínio de f?

Resposta esperada: R - {2}, pois a função real acima não é definida para x = 2.

b) Simplificando a expressão que define a função fracionária $f(x)=\frac{2x^2-4x}{x-2}$, R - {2}, obtém-se que função?

Resposta esperada: $f(x)=\frac{2x(x-2)}{(x-2)} \Rightarrow f(x)=2x$

c) Faça o gráfico da função obtida.

Resposta esperada: Como a função f(x) = 2x é linear, então o gráfico de f passa pelo ponto (0,0), portanto, basta se identificar um segundo par ordenado que satisfaça a função, por exemplo, (1,2); e traçar a reta que passa pelos pontos (0,0) e (1,2), conforme mostra a figura 2.

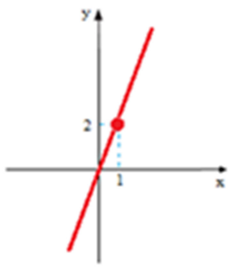


Figura 2. Reta de equação f(x) = 2x.

d) Construindo o quadro 1, onde f(x) é a função obtida no item anterior, a que valor tende o resultado de y = f(x), quando x tende a 1?

Resposta esperada: Ao substituir os valores de x na função f(x) = 2x no quadro 1, espera-se que o aluno perceba que, para valores muito próximos de 1 pela esquerda ou pela direita, o valor de f(x) tende a 2, ou seja $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$.

Quadro 1: Valores obtidos para f(x) = 2x.

X	y = f(x)
0,99	1,98
0,999	1,998
0,9999	1,9998
0,99999	1,99998
1,01	2,02
1,001	2,002
1,0001	2,0002
1,00001	2,00002

Após ter induzido o aluno a responder essas questões de fácil entendimento, pode-se definir limite de modo que sua compreensão ficasse muito mais fácil.

2.2 DEFINIÇÃO DE LIMITE PARA O ALUNO DO ENSINO MÉDIO

Seja f uma função real de variável real e a $\in$ R. Diz-se que *o* limite *de f(x),* para x tendendo a ***a***, é ***b*** (b $\in$ R), e escreve-se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, se a toda possível sequência de valores de x, pertencentes ao domínio da função, tendendo para a (mas diferentes de a) corresponde uma sequência de valores de f(x) tendendo para b.

2.2.1 Unicidade do limite

Uma função não pode tender a dois limites ao mesmo tempo, ou seja, se o limite de uma função existir, ele será único. Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$. Na figura 3, quando os valores de x se aproximam de 2 (tendem a 2) pela esquerda, os valores de y se aproximam de 1 (representa-se por: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$).

Entretanto, quando os valores de x tendem a 2 pela direita, os valores de y tendem a 3 (representa-se por: $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$). Logo, como os limites laterais são diferentes, conclui-se que o limite da função no ponto de abscissa 2 não existe, visto que o limite tem que ser único.

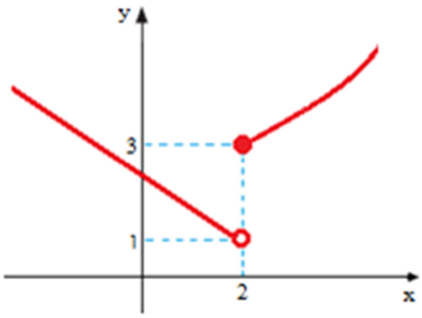


Figura 3. Não há limite no ponto de abscissa 2.

2.2.2 Continuidade de uma função

Diz-se que uma função *f* é contínua em um número *a* se, e somente se forem satisfeitas as seguintes condições:

I) f(a) existe;

II) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe;

III) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Se uma dessas condições não for satisfeita em a, a função f será descontínua em a. Como exemplo, observe a função f: R→ R na figura 4.

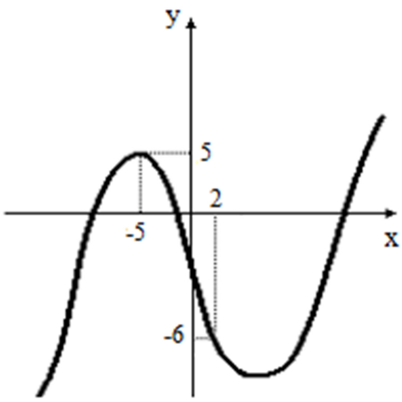


Figura 4. Função contínua para todo x real.

Pode-se afirmar que *f* é contínua no ponto de abscissa 2, visto que

I) f(2) = – 6, ou seja, f(2) existe;

II) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = -6$, ou seja, $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe;

III) $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = -6$.

Percebe-se, ainda, que a função é contínua em qualquer número do seu domínio.

2.2.3 Continuidade em um intervalo

Uma função *f* cujo domínio contém o intervalo fechado [a, b] será contínua em [a, b] se, e somente se ela for contínua no intervalo aberto (a, b), ou seja, se ela for contínua à direita de a e contínua à esquerda de b.

No curso de extensão, com o auxílio do professor, o aluno construiu o gráfico da função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ usando o aplicativo GeoGebra (ao digitar na CAIXA DE ENTRADA o comando f(x) = sqrt (4 - x^2) e pressionar um ENTER), e observou que essa função é definida para todos os valores de x, tais que $4 - x^2 \geq 0$, ou seja, para $-2 \leq x \leq 2$; como pode ser visto na figura 5.

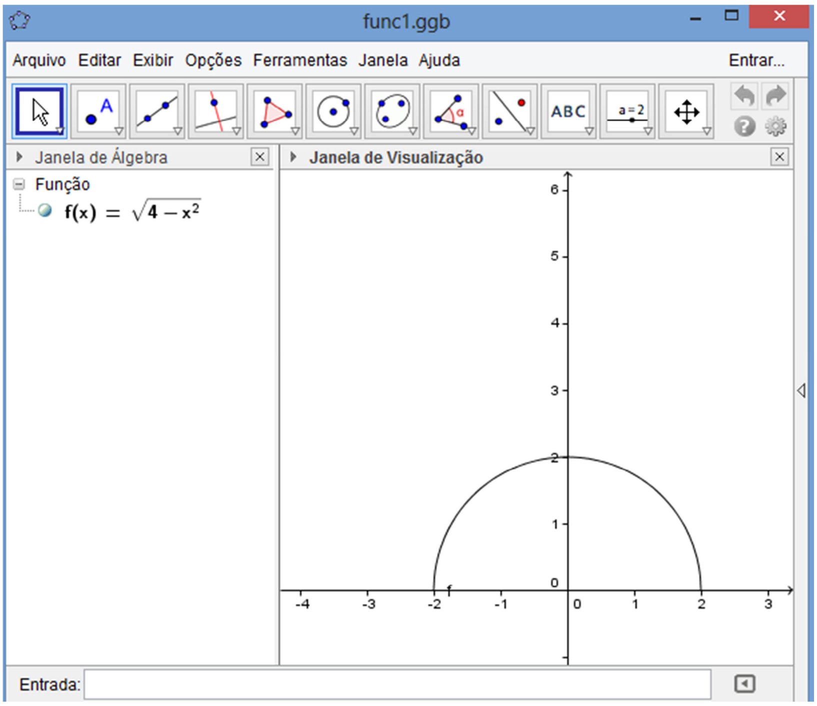


Figura 5: Função construída no GeoGebra.

Na figura 5, note que $\lim_{x \to -2^{+}} \sqrt{4-x^2} = 0 = f(-2)$ e $\lim_{x \to 2^{-}} \sqrt{4-x^2} = 0 = f(2)$. Diz-se que essa função é contínua à direita de -2 e contínua à esquerda de 2, logo é contínua no intervalo fechado [-2, 2].

Nesse momento do curso, por estar familiarizado com o GeoGebra, o aluno pode analisar várias outras situações.

Ao se analisar o gráfico da função definida por $g(x) = \dfrac{2}{x-4}$, mostrado na figura 6, nota-se que a função g é descontínua em x = 4, pois quando x tende a 4 pela direita, g(x) tende a + ∞, e quando x tende a 4 pela esquerda, g(x) tende a - ∞. Porém, ao definir a função *g*, já se sabe que 4 não pertence ao seu domínio. Logo, pode-se dizer que a função é contínua para qualquer valor do seu domínio, exceto para x = 4.

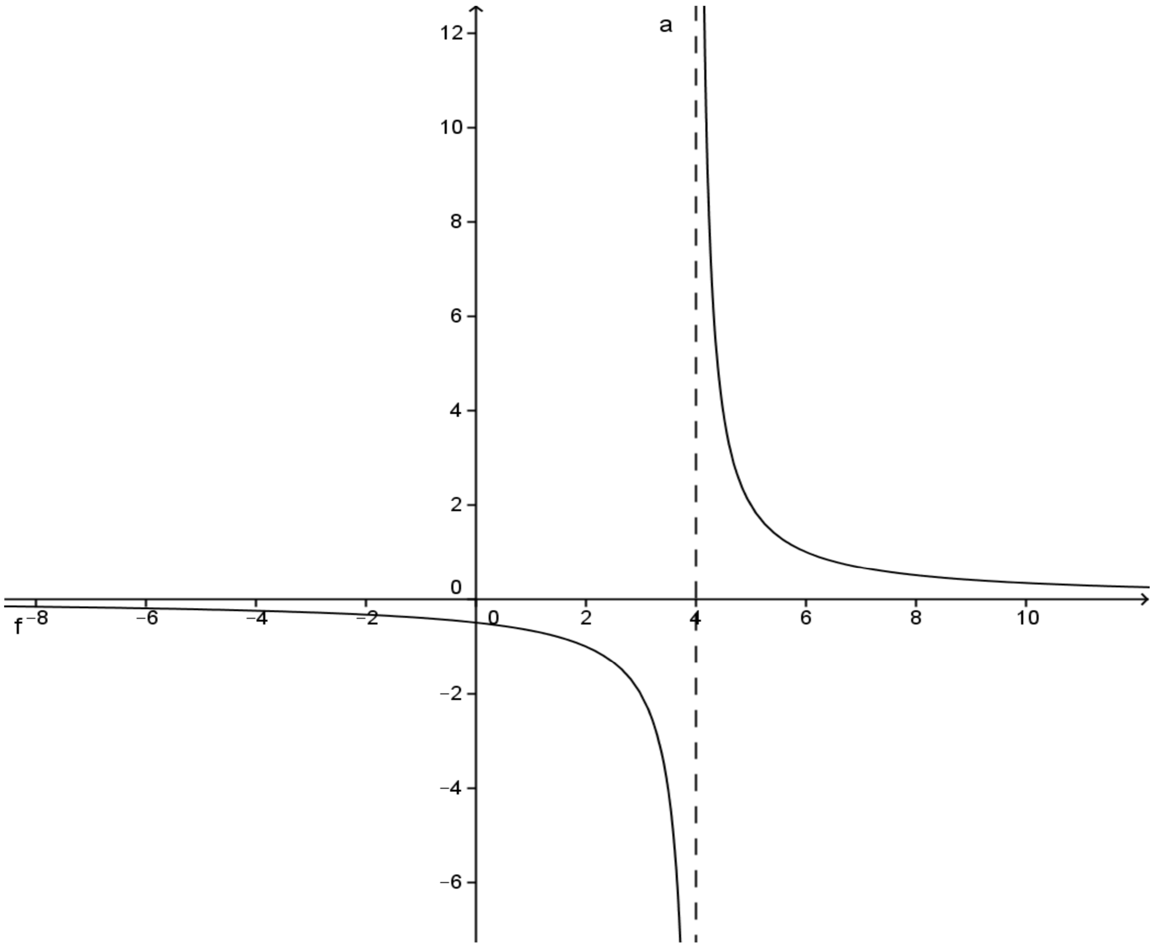


Figura 6: Função contínua em todo o seu domínio.

2.3. A DERIVADA NO ENSINO MÉDIO COMO TAXA DE VARIAÇÃO

2.3.1 Coeficiente angular da reta

Toda reta *r* representada graficamente no plano cartesiano forma um ângulo α $(0 \leq \alpha < 180°)$ em relação ao semieixo positivo das abscissas, e esse ângulo é denominado ângulo de inclinação da reta r. Define-se coeficiente angular da reta r ou inclinação da reta r e representa-se por m_r, a tangente desse ângulo α. Por definição,

$$m_r = tg\alpha \tag{3}$$

Na figura 7, têm-se quatro possíveis situações de como esse ângulo α pode se apresentar.

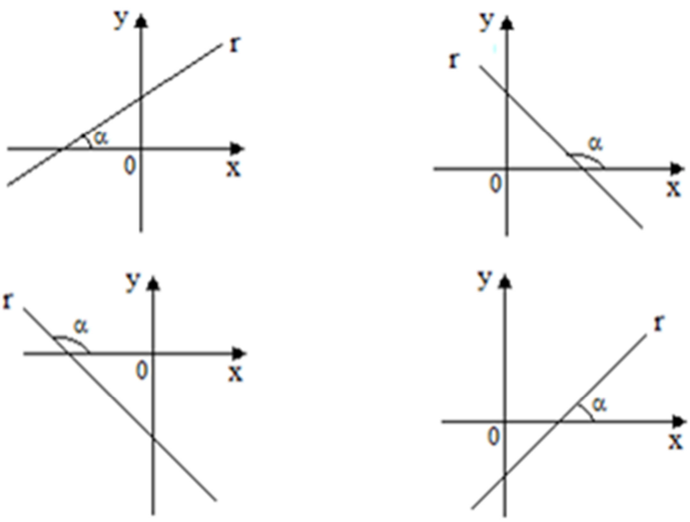


Figura 7: Inclinação de uma reta no plano cartesiano.

Se α = 90º, então a reta r não apresenta coeficiente angular, visto que a tangente de 90º não existe, conforme a figura 8.

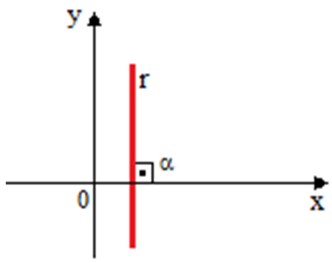


Figura 8: Reta com ângulo de inclinação 90º.

Quando são dados dois pontos distintos A(x_1,y_1) e B(x_2,y_2) de uma mesma reta *r*, como na figura 9, o coeficiente angular m dessa reta é obtido conforme a eq. (3).

$$m = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (4)$$

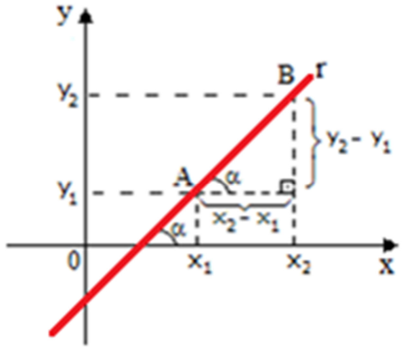


Figura 9: Inclinação da reta dados dois pontos.

2.3.2 Reta secante a uma curva

Considere dois pontos distintos A(x_1,f(x_1)) e B(x_2,f(x_2)) pertencentes a uma mesma curva, como pode ser visto na figura 10. A reta $\overrightarrow{AB}$, que passa pelos pontos A e B, é denominada reta secante a essa curva.

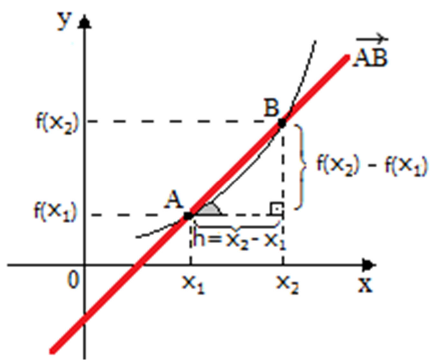


Figura 10: Reta secante à curva nos pontos A e B.

Note que o coeficiente angular da reta $\overrightarrow{AB}$, segundo a eq. (4), é dado por

$$m_{\overrightarrow{AB}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Rightarrow m_{\overrightarrow{AB}} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \text{ onde } h = x_2 - x_1, \text{ com } x_2 \neq x_1. \qquad (5)$$

2.3.3 Reta tangente a uma curva

No Ensino Médio, o aluno já conhece a definição de reta tangente a um ponto P de uma circunferência, como sendo a reta perpendicular ao raio da circunferência nesse ponto P, ou ainda, como a reta que toca a circunferência somente nesse ponto. Na figura 11, *t* é a reta tangente à circunferência no ponto P.

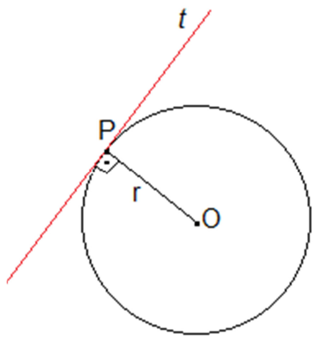


Figura 11. Reta t é tangente à circunferência no ponto P

A definição de reta tangente a uma curva qualquer é mais abrangente. Se $A(x_1,f(x_1))$ é um ponto no gráfico de uma função *f*, então a reta tangente ao gráfico de *f* em *A*, também chamada de reta tangente ao gráfico de *f* em x_1, é definida como sendo a reta que passa por *A* com coeficiente angular m, tal que

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \qquad (6)$$

Se o limite da eq. (6) não existir, então não há reta tangente ao gráfico em *A*. Na figura 12, observa-se uma reta tangente *t* no ponto A do gráfico da função f.

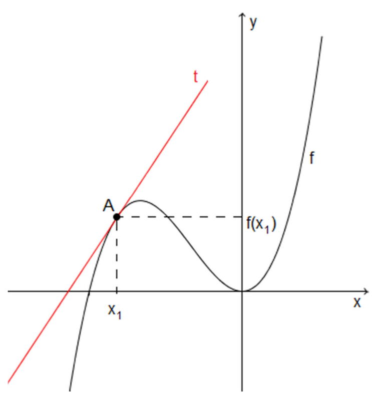


Figura 12. Reta t tangente ao ponto A da curva

2.3.4 Inclinação de uma curva num ponto dessa curva

Sendo $A(x_1,f(x_1))$ um ponto qualquer de uma curva f, denomina-se inclinação da curva f no ponto A, o coeficiente angular da reta *t* tangente à curva nesse ponto A. Na figura 13, a inclinação da curva f no ponto A é dada por $m_t = \text{tg}\ \alpha$, ($\alpha \neq 90º$).

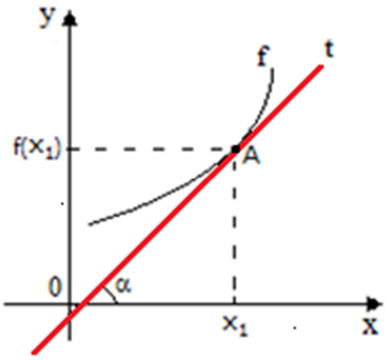


Figura 13. Inclinação da curva f no ponto A.

2.4 A DERIVADA DE UMA FUNÇÃO NUM PONTO FIXO

Fixando-se o ponto $A(x_1, f(x_1))$ da função *f* e fazendo o ponto $B(x_2, f(x_2))$ variar, ao longo da curva, na direção de A, a reta secante $\overrightarrow{AB}$ irá girar em torno do ponto A e o valor de h se aproximará cada vez mais de zero, fazendo com que a razão $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{h}$, tenda ao coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto A, como mostra a figura 14. Portanto, pode-se dizer, intuitivamente, que o coeficiente angular m da reta tangente à curva *f* no ponto $A(x_1,f(x_1))$ é:

$$m_{\overrightarrow{AB}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \text{ onde } h = x_2 - x_1. \quad (7)$$

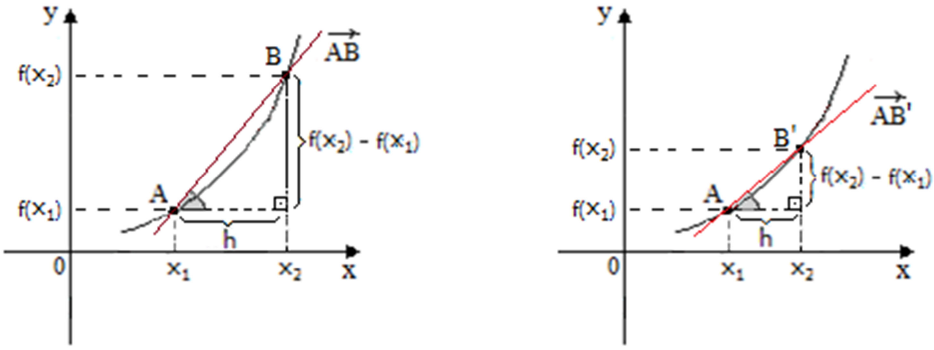


Figura 14. Reta AB, à esquerda; e depois de B se aproximar de A, reta AB’, à direita.

Esse limite é definido como a derivada f’ da função f no ponto $A(x_1,f(x_1))$, e representada assim:

$$f'(x_1) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad (8)$$

ou

$$f'(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \qquad (9)$$

Numa atividade realizada com o GeoGebra, tomaram-se os pontos A(4,1) e B(9,74; 5,93) do gráfico da função *f* definida por $f(x) = \frac{1}{16}.x^2$, os pontos C e D da mesma função e a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto A. Traçaram-se as retas $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$, observando o comportamento da reta secante e foi dado ênfase ao fato de que a inclinação de cada reta obtida ficava cada vez mais próxima da inclinação da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto A, como forma de facilitar a compreensão da definição de derivada, conforme a figura 15.

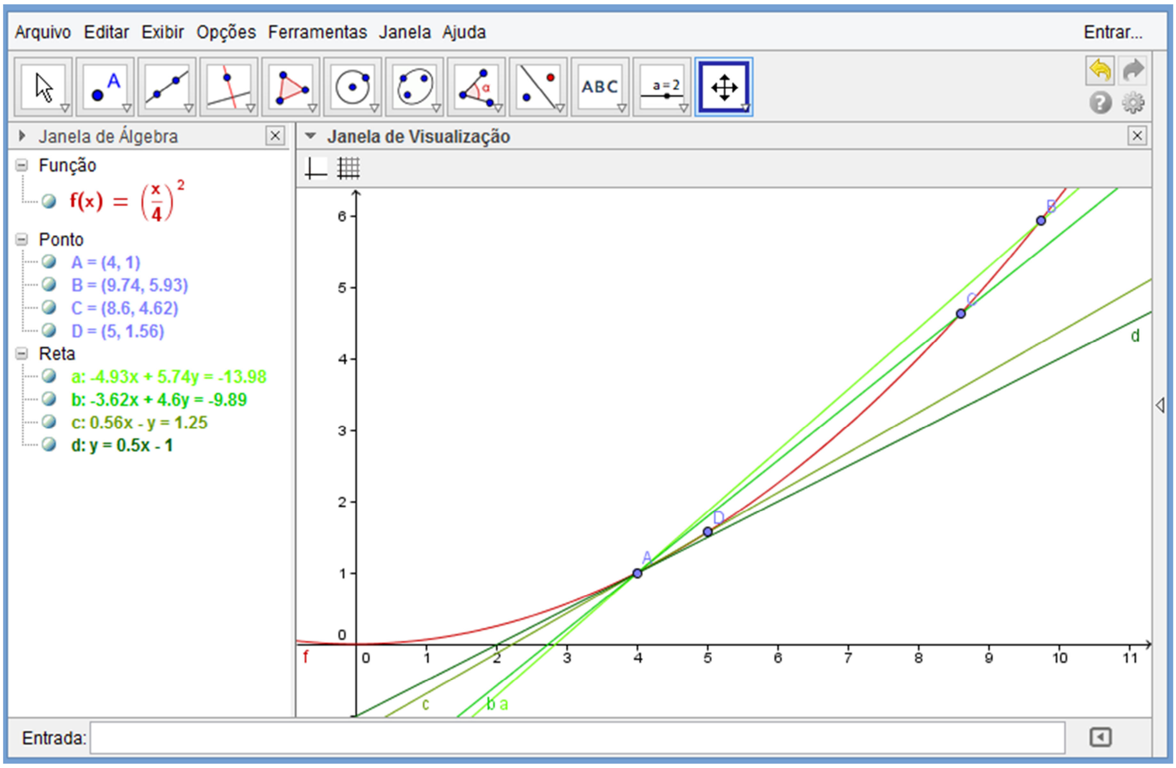


Figura 15: Interpretação geométrica da derivada como inclinação da reta tangente pelo GeoGebra.

Outro exemplo foi construído no GeoGebra, como pode ser visto na figura 16, onde se traçou o gráfico de uma função *f* qualquer, uma reta tangente ao gráfico de *f* no ponto P $(x_0, f(x_0))$ com inclinação $\beta = 30°$ e um ponto Q(x, f(x)) genérico, determinando, assim, a reta secante PQ de inclinação $\alpha = 50°$. À medida que se aproximava o ponto Q do ponto P, percebia-se que ângulo de inclinação se aproximava de 30º e a reta PQ se aproximava da reta tangente em P, mostrando, graficamente, a ideia da derivada.

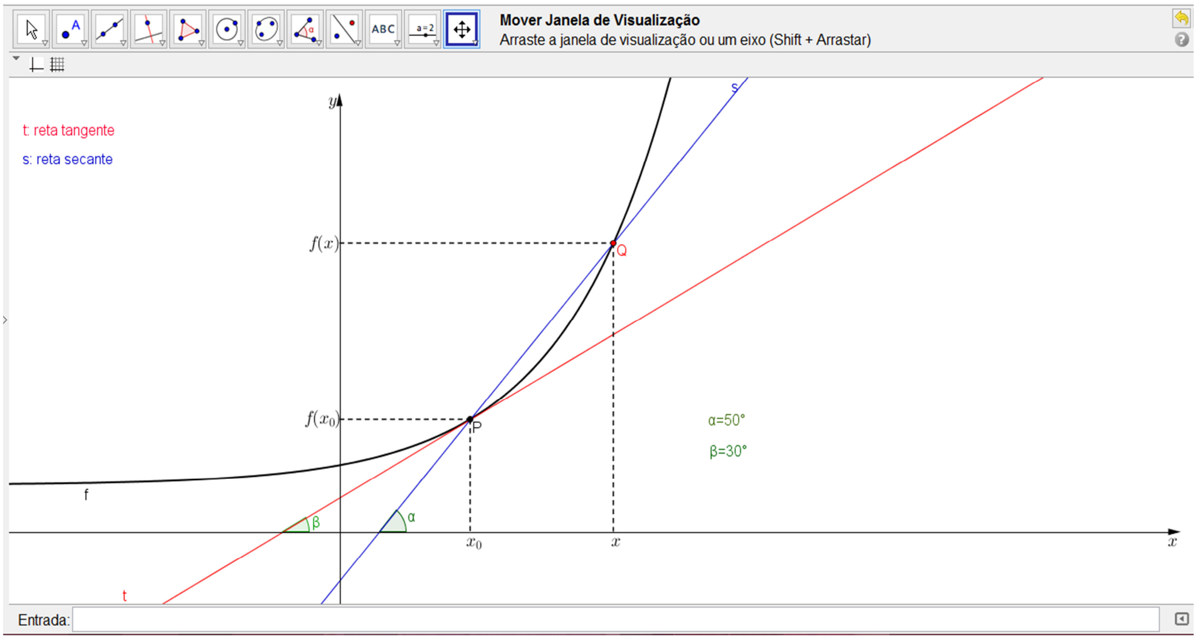


Figura 16: Outra interpretação da derivada como a inclinação da reta tangente.

2.4.1 A função derivada

Aqui, o aluno já era capaz de entender a "derivada" num ponto fixo, mas se fazia necessário estender essa definição para qualquer ponto da função, ou seja, mostrar as condições para as quais a função inteira é derivável. O princípio dessa ideia foi definir a "função derivada", como segue:

A derivada de uma função *f* é a função denotada por *f'*, tal que seu valor em qualquer número x do domínio de *f* seja dado por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \qquad (10)$$

se esse limite existir.

A seguinte notação também pode ser usada:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \qquad (11)$$

onde $f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta y$ é denominado incremento de y e representa a variação no valor da função *f* quando x varia de Δx .

Segundo Bianchini (1995), esse limite é uma nova função de x denominada função derivada e pode ser indicada por y' ou D*f* (x) ou $\frac{dy}{dx}$ em lugar de f'(x).

A notação $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, (12)

Essa notação já era usada pelo alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

No decorrer do curso, os alunos tiveram a oportunidade de resolver diversos exercícios de vários níveis, contextos e abordagens. Nesse momento específico, os alunos já haviam estudado todas as propriedades dos limites, o que facilitou a compreensão da definição de derivada, porém foi coerente iniciar as investigações necessárias para uma melhor compreensão do assunto.

Como primeiro exemplo, construiu-se o seguinte problema: O que seria a derivada da função real f(x) = x^2 no ponto de abscissa 6?

O quadro 2 apresenta o coeficiente angular m da reta secante, quando se fez os valores de x se aproximarem cada vez mais do ponto fixo de abscissa 6.

Quadro 2: Coeficiente angular da reta secante.

X	f(x) = x^2	$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(6)}{x - 6}$
8	64	14
7	49	13
6,5	42,25	12,5
6,25	39,0625	12,25
6,1	37,21	12,1
6,001	36,012001	12,001
6,00001	36,0001200001	12,00001

Pode-se perceber que, à medida que o ponto (x, f(x)) se aproxima do ponto fixo (6, 36), o coeficiente angular da reta que passa por esses dois pontos (reta secante) se aproxima de 12. Nesse caso: $\lim_{x \to 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6} = 12$.

Por definição, esse limite é denominado derivada da função f no ponto de abscissa 6, ou simplesmente f '(6), e representa a inclinação da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abscissa 6.

Fez-se o aluno perceber que esse resultado poderia ter sido obtido sem a necessidade de dados experimentais, visto que o aluno já tinha conhecimento de limites e suas propriedades, como segue:

f'(x) = $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{f(x)-f(6)}{x-6}$ $\Rightarrow$ f'(x) = $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-36}{x-6}$ $\Rightarrow$ f'(x) = $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{(x-6)(x+6)}{x-6}$.

Então, pode-se dizer que f'(x) = $\lim\limits_{x\to 6}(x+6)$ = 6 + 6 = 12.

Outra forma de se encontrar a derivada da função f(x) = x^2 no ponto de abscissa 6 é primeiro encontrar a função derivada f' da função f, ao se substituir $f(x)=x^2$ na eq. (11), ou seja,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x\,;$$

Portanto f '(x) = 2x , $\forall$ x $\in$ D_f. Logo, o que se pede é f '(6) = 2.6 = 12.

Na sequência das aulas, foram demonstradas as propriedades básicas das derivadas e pode-se perceber que a determinação da derivada dessa função era quase imediata, o que tornou a solução desse problema muito mais fácil.

2.4.2 Taxa de variação média

A derivada surgiu em conexão com o problema de traçar a reta tangente a uma curva, mas há outra motivação, não menos importante que a reta tangente: trata-se da ideia da taxa de variação, como, por exemplo, a velocidade de um móvel, a taxa de decaimento de um material radioativo, a taxa de crescimento de uma cultura de bactérias, etc.

Um dos primeiros conceitos da física é a velocidade média de um móvel num dado intervalo de tempo, representada pela expressão:

$$V_m=\frac{S(t_1)-S(t_0)}{t_1-t_0}, \qquad (13)$$

onde $S(t_1) - S(t_0) = \Delta s$ e $t_1 - t_0 = \Delta t$ significam, respectivamente, as variações de posição e tempo desse móvel. A figura 17 permite uma visualização dessa situação.

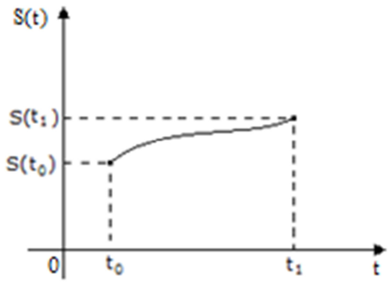


Figura 17: Gráfico do espaço em função do tempo.

Como exemplo, pode-se ver que o quadro 3 relaciona o espaço percorrido por um automóvel nos seis primeiros segundos de deslocamento:

Quadro 3: Espaço S percorrido no tempo t.

t(s)	0	1	2	3	4	5	6	...
S(m)	0	2	5	9	14	20	27	...

Observa-se que esse automóvel não se desloca com movimento uniforme, pois a sua velocidade média não é a mesma em intervalos de tempos iguais:

Entre 0 e 2 segundos: $v_1 = \dfrac{5 - 2}{2 - 0} = 1{,}5\text{m/s}$

Entre 2 e 4 segundos: $v_2 = \dfrac{14 - 5}{4 - 2} = 4{,}5\text{m/s}$

Entre 4 e 6 segundos: $v_3 = \dfrac{27 - 14}{6 - 4} = 6{,}5\text{m/s}$

Percebe-se, também, que o movimento é cada vez mais rápido, portanto acelerado.

Mas, se o aluno quisesse encontrar a velocidade do automóvel no instante 2,8s, como ele faria?

Ora, só foram cronometrados os instantes representados no quadro 3, e anotadas as suas posições naqueles instantes, não se têm elementos que permitam calcular a velocidade instantânea do automóvel para instantes diferentes do quadro 3. Esse é o objeto de estudo a seguir.

2.4.3 A velocidade instantânea

O quadro 3 fornece as posições do automóvel nos instantes: 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6 segundos o que, não permite calcular a velocidade no instante 2,8s, por exemplo. Supondo-se que com o auxílio de fotografias, se consiga determinar a velocidade do automóvel em intervalos de tempos cada vez menores, de forma que seja possível encontrar uma aproximação considerável da velocidade desse automóvel em torno do instante 2,8s. Ainda assim, não se terá a velocidade no exato instante 2,8s.

De um modo geral, a velocidade instantânea de um móvel pode ser calculada usando limites, pois, ao se considerar o instante t_0 como um ponto fixo, basta se calcular as velocidades médias obtidas pelo móvel em intervalos de tempos cada vez menores, com valores cada vez mais próximos de t_0, chegando à expressão:

$$V_{(t_0)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow V_{(t_0)} = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{S(t_1) - S(t_0)}{t_1 - t_0} \Rightarrow V_{(t_0)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t} \qquad (14)$$

Essa é a mesma ideia da derivada da função *f* num ponto fixo x_0 do seu domínio, isto é, a variação instantânea que a função *f* sofre em relação à variável x num ponto x_0. Quando essa variável é o tempo e a função *f* corresponde à posição S da partícula em cada instante, a derivada é a velocidade instantânea do móvel no instante t_0. Por exemplo, se um ponto material se move numa trajetória qualquer segundo a equação horária $S(t) = t^2 + 2t - 5$, em que **S** é dado em metros (m) e **t** é dado em segundos (s), pode-se determinar a velocidade do ponto material no instante t_0 = 2s, usando-se a derivada como auxílio. Para isso, basta que se sigam os seguintes passos:

I) No instante t_0 = 2 s o ponto material está na posição $S(t_0) = 2^2 + 2.2 - 5 = 3m$.

II) Deseja-se encontrar a velocidade no instante t_0 = 2s e sabe-se que essa velocidade é a derivada do espaço em t_0 = 2, logo, substituem-se as informações na eq. (14) e obtém-se:

$$V_{(t_0)} = S'_{(t_0)} \Rightarrow V_{(t_0)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(2 + \Delta t) - S(2)}{\Delta t}, \text{ ou seja, } V_{(t_0)} = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta t + 6) \Rightarrow V_{(t_0)} = 6m/s.$$

Na sequência, trabalharam-se não só questões de simples repetição a fim de que as propriedades e as definições fossem bem assimiladas, mas também situações contextualizadas do cotidiano onde se faziam necessárias as aplicações das derivadas para se chegar à solução.

Mostrou-se, também, que as derivadas têm aplicações nas diversas ciências exatas, e nos instantes das resoluções dessas situações-problemas, foi-se trabalhando a ideia de modelagem matemática, mesmo que de modo superficial devido à exiguidade de tempo, até como forma de incentivar os alunos a pesquisarem mais sobre o tema. Um modelo matemático é uma descrição matemática de uma situação real (HUGHES et al., 2012).

Buscou-se, ainda, incentivar o aluno a construir suas próprias conclusões a respeito da definição de derivada e sua importância nas resoluções de problemas, pois

> Quanto mais o professor instigar e provocar discussões na resolução de um determinado problema, mais ricas e desafiadoras serão as situações, levando assim a ação criativa, raciocínio, estabelecimento de relações, levantamento de dúvidas, busca de respostas e julgamentos (MENEGUELLE, 2009, p. 35)

Um exemplo de abordagem da modelagem no curso de extensão foi o seguinte problema proposto:

O Sr. Cirino mora no semiárido nordestino e pretende armazenar água da chuva para usá-la no período de estiagem na sua propriedade rural, visto que a água é um recurso escasso em grande parte do ano naquela região. Na loja de material de construção da cidade mais próxima, ele comprou um material apropriado para construir uma calha destinada a recolher a água da chuva que corre dos telhados. O material tem forma retangular com 30cm de largura e deve-se construir esse condutor dobrando-se as laterais perpendicularmente a esse material. O Sr. Cirino queria dobrar 7cm de cada lado, baseado apenas no seu olhar de homem experiente do campo, mas seu amigo Tonny, que cursou Engenharia Civil, se propôs a ajudá-lo, orientando-o sobre quantos cm deveriam ser dobrados de cada lado, de modo que o condutor de água tivesse capacidade máxima, de acordo com a vazão da água esperada. Como Tonny resolveu essa situação? O Sr. Cirino aproximou bem o valor a ser dobrado?

Segundo Bassanezi (2002, p. 24 apud ARAÚJO, 2011, p.2): “A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual”. O objetivo aqui era preparar o aluno para seguir os seguintes passos:

1. Fazer uma figura representativa da situação, quando possível.

2. Definir as variáveis. Em geral, procurar relacioná-las de modo que a quantidade de variáveis ficasse a menor possível.

3. Escrever todos os dados numéricos conhecidos sobre as variáveis, tentando obter uma equação e(ou) uma função que as relacionasse.

4. Esboçar o que fazer e partir para o que se chama solução ótima.

Todos esses passos foram seguidos, e o envolvimento dos alunos foi tão significativo, que possibilitou uma incrível interação e a construção da solução esperada, transformando a sala de aula num verdadeiro ambiente de estudo, ou melhor, num autêntico laboratório de aprendizado.

CAPÍTULO 3

3. METODOLOGIA

Com o objetivo de introduzir as ideias intuitivas do Cálculo Diferencial no Ensino Médio com o auxílio do software GeoGebra, foram planejados conteúdos para um curso de extensão oferecido pela Universidade Federal do Vale do São Francisco - Campus Petrolina (UNIVASF).

O curso teve carga horária de 30h/a, foi ministrado com aulas expositivas, tendo-se usado o auxílio didático do aplicativo GeoGebra para mostrar o comportamento gráfico de algumas funções, a ideia de limite e representação gráfica da derivada de uma função. Foram enviadas listas de exercícios via internet, para o endereço eletrônico https://www.facebook.com/groups/1427905767436202/ criado pelo professor ministrador do curso cujo endereço no facebook é https://www.facebook.com/carlos.cley1. Nesse grupo, estão adicionados 83 membros (até 30/08/2014), dentre os alunos do curso, alunos de cursos de exatas da região, professores e, enfim, simpatizantes dos temas abordados no curso, o que enriqueceu mais ainda o grupo com discussões, informações sobre os temas e demonstrações diversas.

3.1 LOCAL DA PESQUISA

As aulas aconteceram sempre aos sábados no período de 28/09/2013 a 14/12/2013. O curso contou com a participação inicial de 50 alunos selecionados de escolas da região do Vale do São Francisco e as aulas foram ministradas na UNIVASF Petrolina, situada na Avenida José de Sá Maniçoba, s/n – Centro, CEP: 56304-917, sala 11, 1º andar.

3.2. SUJEITOS DA PESQUISA

Os alunos participantes do curso estavam cursando o 2º e o 3º ano do Ensino Médio, tendo em vista o conhecimento exigido pelo curso, bem como os assuntos estudados pelos mesmos em suas escolas de origem. O professor ministrador visitou as escolas listadas e, na oportunidade, pediu indicação aos professores das áreas de exatas dessas escolas, de alunos cujos perfis apontavam para cursos como Engenharia, Matemática, Física, Administração, Economia e cursos afins. O curso contou com a participação inicial de 50 alunos selecionados de escolas da região do Vale do São Francisco.

3.2.1 Critérios para a participação no curso de extensão

Cada participante do curso de extensão foi indicado pelos professores de suas respectivas escolas, dando prioridade àquele aluno que demonstrava interesse em matemática e pretendia concorrer a uma vaga num curso de exatas ao prestar vestibular, mesmo que esse aluno ainda estivesse no 2º ano do Ensino Médio. O quadro 4 mostra a distribuição dos 35 alunos concluintes do curso de extensão, de acordo com a escola de origem.

Quadro 4. Quantidades de alunos por instituição.

Instituição Educacional	Categoria	Nº de alunos
Colégio da Polícia Militar de Pernambuco	Rede Pública	4
Escola de Aplicação Vande de Souza Ferreira	Rede Pública	5
Escola Marechal Antônio Alves Filho	Rede Pública	4
Escola de Referência em E. M. Clementino Coelho	Rede Pública	8
Instituto Federal do Sertão Pernambucana	Rede Pública	1
Colégio Diocesano Dom Bosco	Rede Privada	1
Colégio GEO Juazeiro	Rede Privada	6
Colégio GEO Petrolina	Rede Privada	6
Total de instituições	**8**	**35**

3.2.2 Certificado de participação

Para o recebimento do certificado de conclusão do curso, mostrado no Apêndice A, foram feitas as seguintes exigências, segundo critérios definidos pelo Professor Orientador do curso: ter no máximo duas faltas justificadas, não faltar à avaliação final do curso e responder ao questionário final.

Devido ao não cumprimento dessas exigências e a outros fatores listados abaixo, apenas 35 alunos receberam o certificado. Dentre os fatores que contribuíram para a eliminação de 15 alunos, podem-se citar:

- Incompatibilidade de horários: alguns alunos assistiram às primeiras aulas, mas suas escolas começaram a marcar avaliações e aulas de revisões para o vestibular aos sábados, o que impossibilitou o comparecimento dos mesmos e a permanência no curso. A incidência desse fato se deu tanto com alunos selecionados nas escolas públicas quanto nas escolas privadas.

- Ter residência fixa em cidades vizinhas: alguns desses alunos desistiram do curso próximo à avaliação final ocorrida no dia 07/12, pois residem em cidades vizinhas a Petrolina, são custeados pelos pais e como passaram de ano por média, viajaram para desfrutar das festas de final de ano na companhia de seus entes queridos. A incidência desse fato se deu exclusivamente com alguns alunos de escolas privadas.

- Viagem para prestar vestibular em centros distantes: alguns alunos que estavam cursando 3º ano do Ensino Médio tiveram que desistir do curso por prestarem vestibular em Salvador, Recife, Aracaju, Juazeiro do Norte, Teresina e em outras cidades mais distantes, exatamente nos sábados próximos ao final do curso. Isso ocorreu com alunos de escolas públicas e privadas.

- Desinteresse: apenas dois alunos desistentes deram sinais de desinteresse pela disciplina ou pela aula do professor ou desistiram do curso por problemas pessoais não relatados pelos mesmos.

Quadro 5. Distribuição e assiduidade dos alunos em ordem numérico-alfabética.

ALUNO	ESCOLA	ASSIDUIDADE
Aluno 01	Colégio GEO Petrolina	100%
Aluno 02	Colégio da Polícia Militar – PE	90%
Aluno 03	Colégio da Polícia Militar – PE	100%
Aluno 04	Escola de Aplicação	90%
Aluno 05	Colégio Diocesano Dom Bosco	80%
Aluno 06	EREM Clementino Coelho	100%
Aluno 07	Colégio GEO Petrolina	100%
Aluno 08	EREM Clementino Coelho	90%
Aluno 09	Escola de Aplicação	100%
Aluno 10	EREM Clementino Coelho	100%
Aluno 11	Colégio GEO Juazeiro	100%
Aluno 12	Colégio da Polícia Militar – PE	80%
Aluno 13	Colégio GEO Petrolina	80%
Aluno 14	Colégio GEO Juazeiro	90%
Aluno 15	EREM Clementino Coelho	100%
Aluno 16	Escola de Aplicação	100%
Aluno 17	EREM Clementino Coelho	100%
Aluno 18	Escola Marechal Antônio Alves Filho	80%
Aluno 19	Colégio GEO Juazeiro	80%
Aluno 20	Colégio GEO Petrolina	90%
Aluno 21	EREM Clementino Coelho	90%
Aluno 22	Colégio GEO Juazeiro	75%
Aluno 23	Escola Marechal Antônio Alves Filho	90%
Aluno 24	Colégio GEO Petrolina	100%
Aluno 25	Colégio GEO Petrolina	90%
Aluno 26	Escola de Aplicação	80%
Aluno 27	Escola Marechal Antônio Alves Filho	80%
Aluno 28	Escola de Aplicação	80%
Aluno 29	Colégio GEO Juazeiro	100%
Aluno 30	EREM Clementino Coelho	100%
Aluno 31	Instituto Federal do Sertão	100%
Aluno 32	Escola Marechal Antônio Alves Filho	80%
Aluno 33	EREM Clementino Coelho	100%
Aluno 34	Colégio GEO Juazeiro	100%
Aluno 35	Colégio da Polícia Militar – PE	100%

Diante do exposto, no quadro 5, pode-se perceber que o público escolhido teve uma ótima assiduidade, com média de 92% de assiduidade, o que ajudou a comprovar uma participação efetiva dos alunos no curso, algo que poderá ser observado no próximo tópico mediante uma análise criteriosa de todos os resultados obtidos.

3.3. MATERIAL UTILIZADO

O curso teve uma carga horária de 30 horas-aula. Nessas aulas usaram-se o quadro branco e pincéis de cores distintas para as aulas expositivas; listas com teorias e exercícios, mostradas no apêndice I; Datashow e Notebook, com o GeoGebra instalado.

3.4 INSTRUMENTO DA PESQUISA

No final do curso de extensão, aplicou-se um questionário, contendo 10 (dez) questões para os 35 alunos que compuseram o grupo de estudos. Como já se conhecia o perfil de cada candidato quanto ao gênero, escolaridade e escola de origem, iniciou-se o questionário (APÊNDICE E) com três perguntas inerentes à relação dos alunos com a disciplina de Matemática e sua importância. Em seguida, elaboraram-se perguntas relativas às formas de se melhorar o ensino da Matemática. Após isso, vieram perguntas relativas ao conteúdo programático do curso, sobre a relevância do ensino do Cálculo Diferencial no Ensino Médio e, por fim, como os alunos avaliaram a experiência vivida no curso.

CAPÍTULO 4

4. ANÁLISE DOS RESULTADOS

4.1 RESULTADOS DA AVALIAÇÃO

A nota de avaliação não foi determinante para o recebimento do certificado de participação no curso, mas o aluno foi avaliado por dois critérios: participação - quanto à entrega de atividades propostas no ambiente da sala de aula, com pontuação máxima de 1,5 pontos; e nota de avaliação final – tendo sido realizada uma prova cuja pontuação máxima foi de 8,5 pontos. O Quadro 6 fornece a distribuição de frequência das médias obtidas pelos alunos após as avaliações.

Quadro 6. Frequência das médias dos alunos do curso.

Nota	Frequência	Frequência Relativa
2 ⊢— 3	1	2,86%
3 ⊢— 4	5	14,28%
4 ⊢— 5	0	0,00%
5 ⊢— 6	7	20,00%
6 ⊢— 7	8	22,86%
7 ⊢— 8	1	2,86%
8 ⊢— 9	4	11,43%
9 ⊢—⊣ 10	9	25,71%

Seguiu-se o mesmo critério adotado pela UNIVASF nos seus cursos de graduação e pós-graduação, onde o aluno deve obter uma média final igual ou superior a 5,0 para obter aprovação numa determinada disciplina. Após a correção e cálculo das médias obtidas, pode-se afirmar que 82.86% dos alunos conseguiram aproveitamento satisfatório, sendo que 40% obtiveram nota igual ou superior a 7,0.

No Apêndice B, tem-se a avaliação escrita à qual cada aluno participante foi submetido, composta de 7 questões, perfazendo um total de 14 itens. Cabe ressaltar que se abordaram os tópicos mais importantes estudados no curso relativos ao Cálculo Diferencial, trabalhados no ambiente de sala de aula.

Nos quatorze itens abordados na avaliação, o professor orientador procurou evidenciar questões de quatro níveis distintos, ao se levar em consideração o nível de escolaridade e maturidade dos alunos envolvidos no processo. Essa distribuição se apresenta no quadro 7 e foi classificada antes da ocorrência da avaliação escrita como: muito fácil, fácil, médio e difícil.

Quadro 7. Distribuição das questões de acordo com o nível de dificuldade.

Classificação	1-a	1-b	1-c	2	3-a	3-b	4	5-a	5-b	5-c	6-a	6-b	7-a	7-b
Muito fácil	x			x										
Fácil		x	x				x	x			x			
Médio					x	x			x	x		x		
Difícil													x	x

Ao se corrigir a avaliação escrita de cada aluno, pôde-se organizar os resultados e esboçá-los na figura 18, o que possibilitou uma análise mais detalhada dos mesmos. Vale salientar que, se o aluno deixou uma questão em branco, essa questão entrou para a estatística como questão errada.

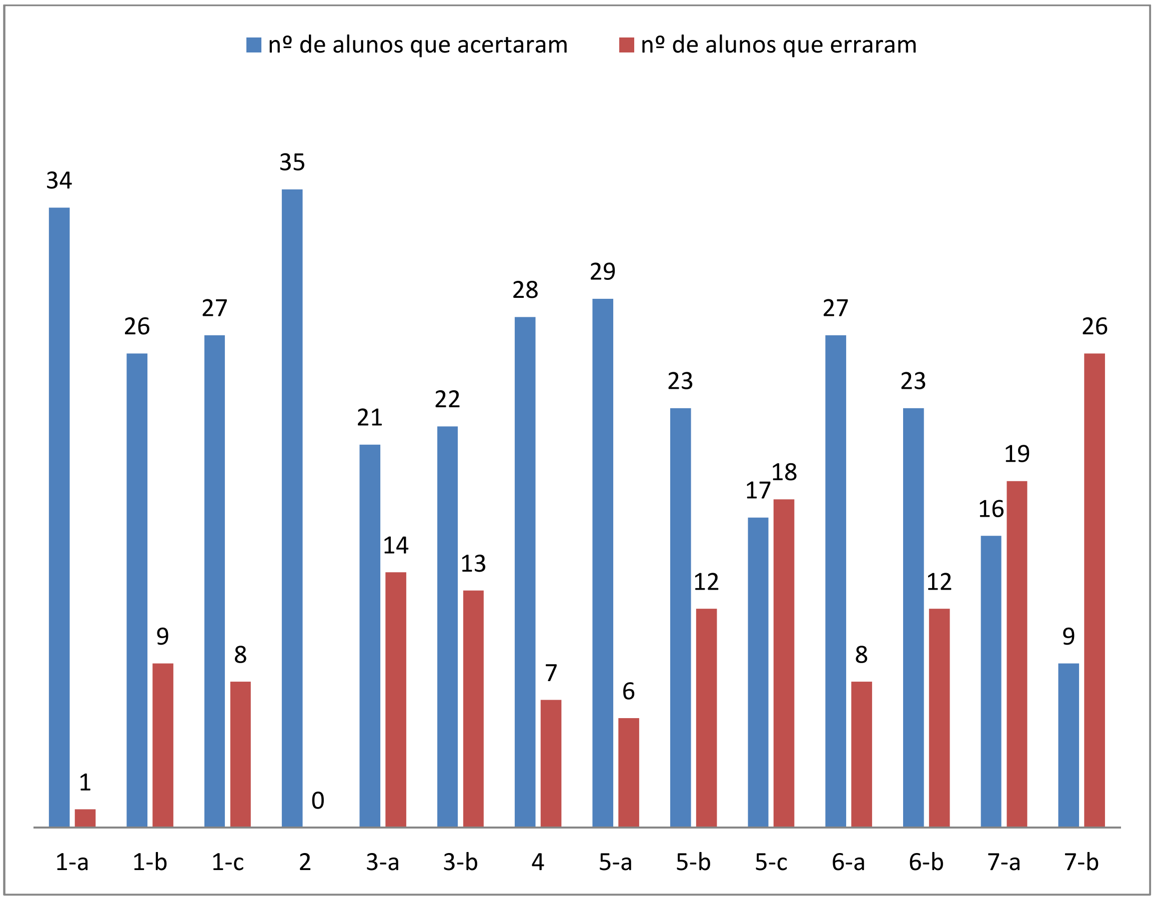


Figura 18: Número de erros e acertos por questão da avaliação.

Após a correção das avaliações e a catalogação dos resultados, observou-se que não houve muita surpresa ao se compararem os resultados obtidos pelos alunos com a classificação inicial das questões por parte do professor, visto que os resultados mostraram que os alunos não obtiveram resultados muito diferentes do esperado. Apenas a questão 5-c, mostrada pela figura 19 mediante a solução dada pelo aluno 15, da Escola de Referência em Ensino Médio Clementino Coelho, apresentou um nível de dificuldade diferente do esperado pelo professor e apresentou um número elevado de erros, sobretudo, chegando a ser classificada pela maioria dos alunos como uma questão difícil.

Talvez esse fato tenha ocorrido pela exiguidade de tempo em trabalhar com mais ênfase a regra da derivada do quociente, sobretudo porque o professor ministrador já havia observado uma ótima disposição dos alunos em realizar as atividades propostas em sala.

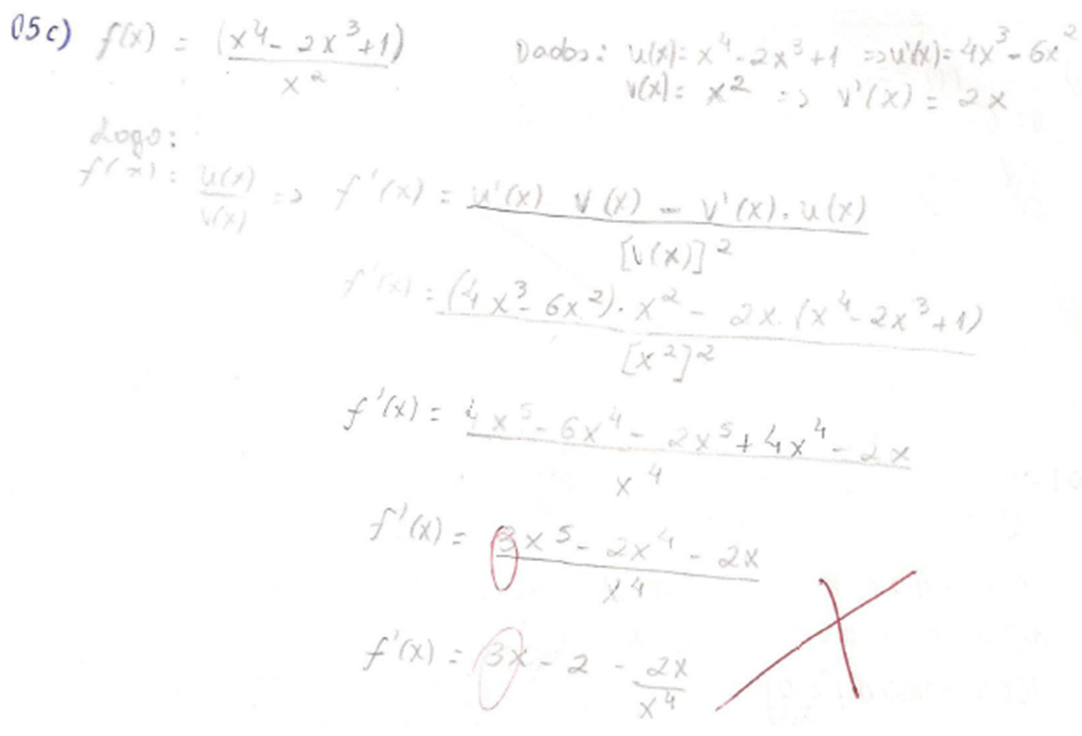


Figura 19: Solução incorreta para a questão 5-c pelo aluno 15.

Ainda sobre a questão 5-c, pôde-se notar que a maioria dos alunos que errou tal questão, cometeu equívocos de manipulação, ou seja, não foi dada a devida atenção no instante das aplicações das operações básicas, tais como: não esquecer os parênteses; aplicar corretamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição; subtrair, somar ou multiplicar corretamente polinômios semelhantes. Esses detalhes contribuíram para que houvesse um número maior de alunos que erraram, quando comparado ao número de alunos que acertaram a questão.

Na sequência, serão destacadas outras observações importantes referentes aos resultados dos alunos na avaliação escrita.

Na figura 20, pode-se observar as soluções corretas do aluno 1 do Colégio GEO Petrolina, para as questões 5-a, 5-b e 5-c, tendo o mesmo mostrado habilidade em aplicar todas as operações básicas, além de conhecer bem as regras das derivadas.

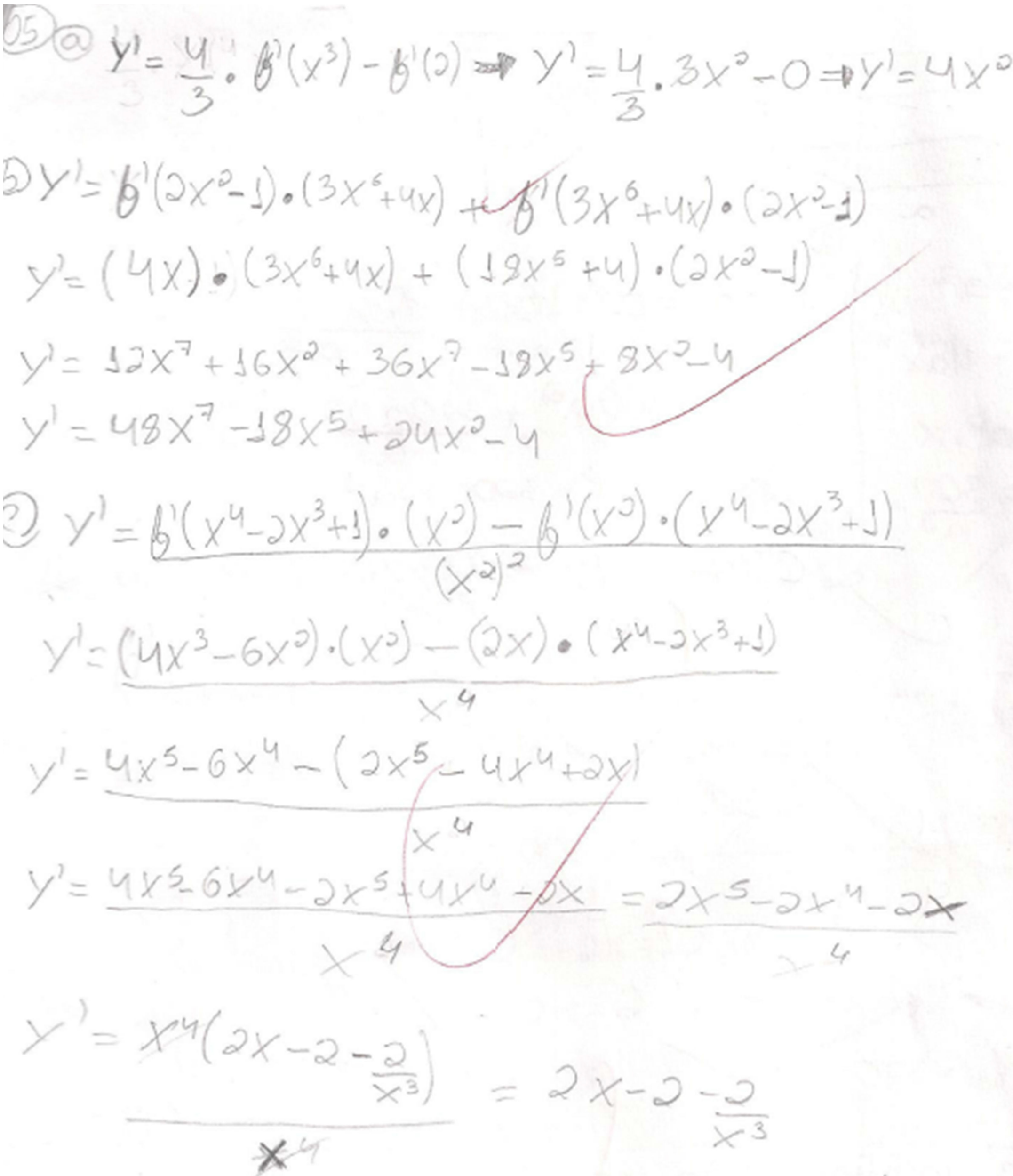


Figura 20: Solução das questões 5-a, 5-b e 5-c pelo aluno 01 do curso.

Destaca-se, também, que as questões 1-a e 2 foram confirmadas por todos os alunos como extremamente fáceis. Observa-se, na figura 18, que nenhum dos 35 alunos avaliados errou a questão 2 e apenas 1 aluno errou a questão 1-a.

A questão 1-a foi corretamente desenvolvida pelo aluno 08 da Escola de Referência em Ensino Médio Clementino Coelho, o que pode ser visto na figura 21.

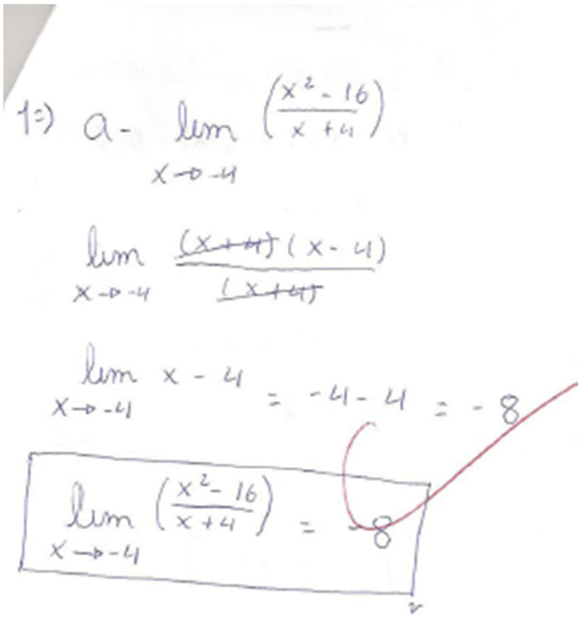


Figura 21: Solução da questão 1-a pelo aluno 08.

Na figura 22, tem-se a solução da questão 2 pelo aluno 08 da Escola de Referência em Ensino Médio Clementino Coelho.

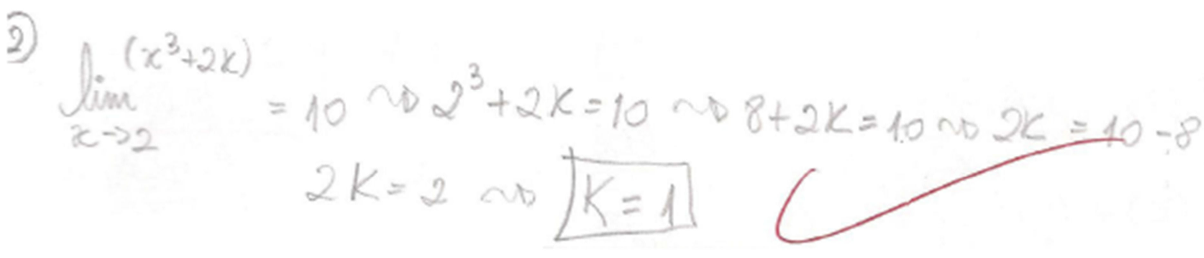


Figura 22: Solução da questão 2 pelo aluno 20.

É interessante relatar também que todos os alunos, que compreenderam a definição de derivada de uma função, conseguiram desenvolver corretamente a questão 4, ou seja, não houve erro de cálculos quando da aplicação da definição. O aluno que não entendeu a definição ou o que se pedia no enunciado, nem sequer começou a desenvolvê-la, deixando-a em branco. Isso ocorreu com sete alunos da turma. Na figura 23, tem-se a solução do aluno 31, do Instituto Federal do Sertão, para essa questão.

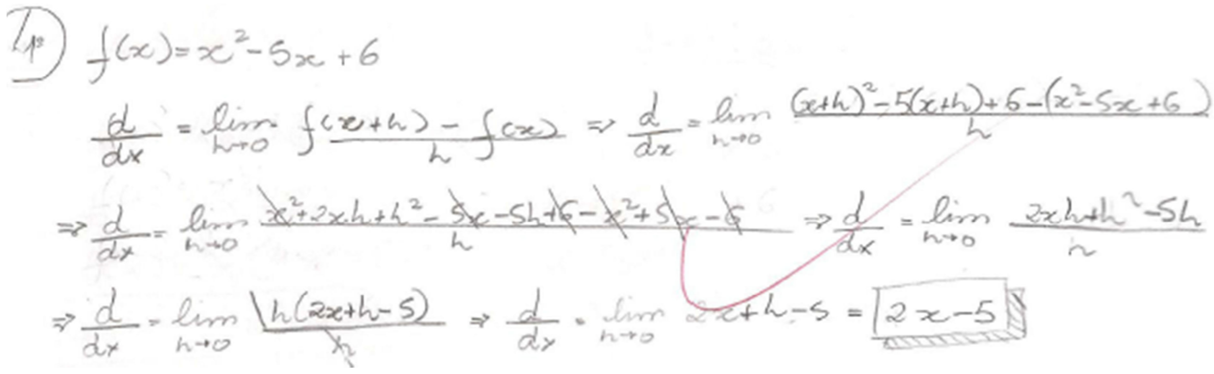


Figura 23: Solução correta da questão 4 pelo aluno 31.

Com relação à cobrança de alguns limites fundamentais, representados nas questões 3-a e 3-b, e classificadas pelo professor como questões de nível médio, os erros mais frequentes resultaram da falta de habilidade de alguns alunos em manipularem potências ou simplesmente por não se lembrarem de como aplicar o limite fundamental, fato que motivou seis dos 14 alunos que erraram tal questão a deixá-la em branco. Na figura 24, observa-se uma solução incorreta para tal questão, pelo aluno 21, da Escola de Referência em Ensino Médio Clementino Coelho.

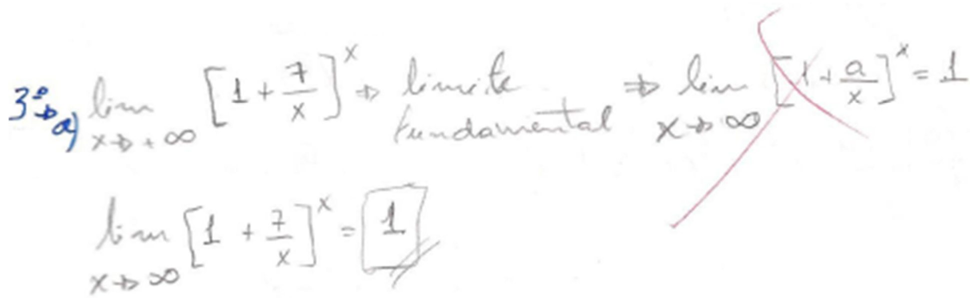


Figura 24: Solução incorreta do aluno 21 para a questão 3-a.

Com relação à questão 3-b, ao manipularem a fração, que deveria ser multiplicada pela expressão $\frac{\text{sen } 5x}{3x}$, alguns alunos cometeram erros do tipo mostrado na figura 25, pelo aluno 24 do Colégio GEO Petrolina. Nela, observa-se que o aluno alterou o argumento (5x), usando uma operação impossível de ser realizada, mesmo tendo ele achado que chegara à solução correta, após comparar a sua resposta com a de um colega que não cometera tal absurdo.

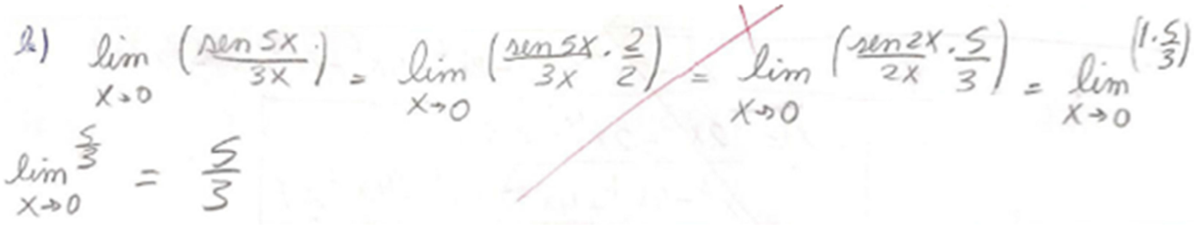


Figura 25: Exemplo de erro cometido pelo aluno 24 e repetido por outros alunos.

Na figura 26, tem-se uma solução correta do aluno 29, do Colégio GEO Juazeiro, para as questões 3-a e 3-b.

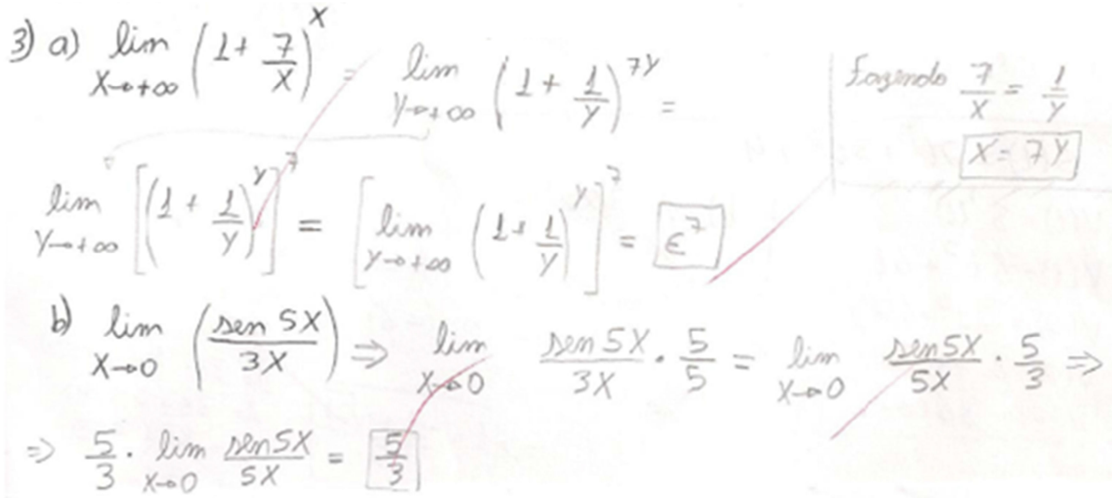
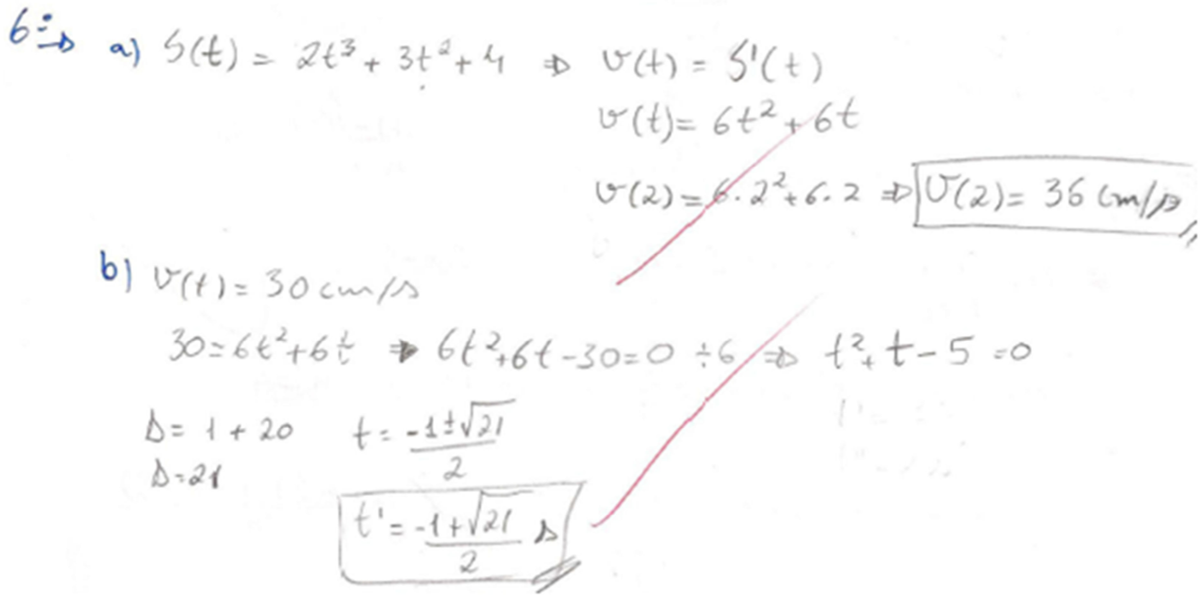


Figura 26: Solução correta das questões 3-a e 3-b pelo aluno 29.

Agora, podem-se ver as soluções corretas das questões 6-a e 6-b por meio da figura 27 pelo aluno 21, da Escola de Referência em Ensino Médio Clementino Coelho. Essa questão reproduz uma situação comum na Física do 1º ano, ocasião em que o professor pôde resolvê-la sem usar derivadas, apesar de a solução se tornar um pouco mais trabalhosa; logo, é importante que ele aproveite o momento para introduzir a ideia de derivadas.



6: ⇒ a) $s(t) = 2t^3 + 3t^2 + 4 \Rightarrow v(t) = s'(t)$

$v(t) = 6t^2 + 6t$

$v(2) = 6 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 \Rightarrow \boxed{v(2) = 36\ cm/s}$

b) $v(t) = 30\ cm/s$

$30 = 6t^2 + 6t \Rightarrow 6t^2 + 6t - 30 = 0 \div 6 \Rightarrow t^2 + t - 5 = 0$

$\Delta = 1 + 20$ $\quad t = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$

$\Delta = 21$

$\boxed{t' = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}\ s}$

Figura 27: Solução correta do aluno 21 para as questões 6-a e 6-b.

As questões 7-a e 7-b, classificadas pelo professor ministrante como as mais difíceis da avaliação, fazem referência a uma situação clara de modelagem matemática, pois exigem do aluno uma análise detalhada e uma solução organizada. Aqui, as dificuldades do aluno aumentaram devido a sua pouca familiaridade em resolver questões contextualizadas, e sobre os tópicos abordados nessas questões, notou-se a necessidade de o professor exercitar mais situações em sala de aula. Dezenove alunos não conseguiram desenvolver sequer uma das duas questões, enquanto que dezesseis deles resolveram apenas a questão 7-a e nove outros acertaram as duas, mas nenhum deles acertou apenas a questão 7-b. Na figura 28, tem-se uma ótima solução para essas questões pelo aluno 01, do Colégio GEO Petrolina.

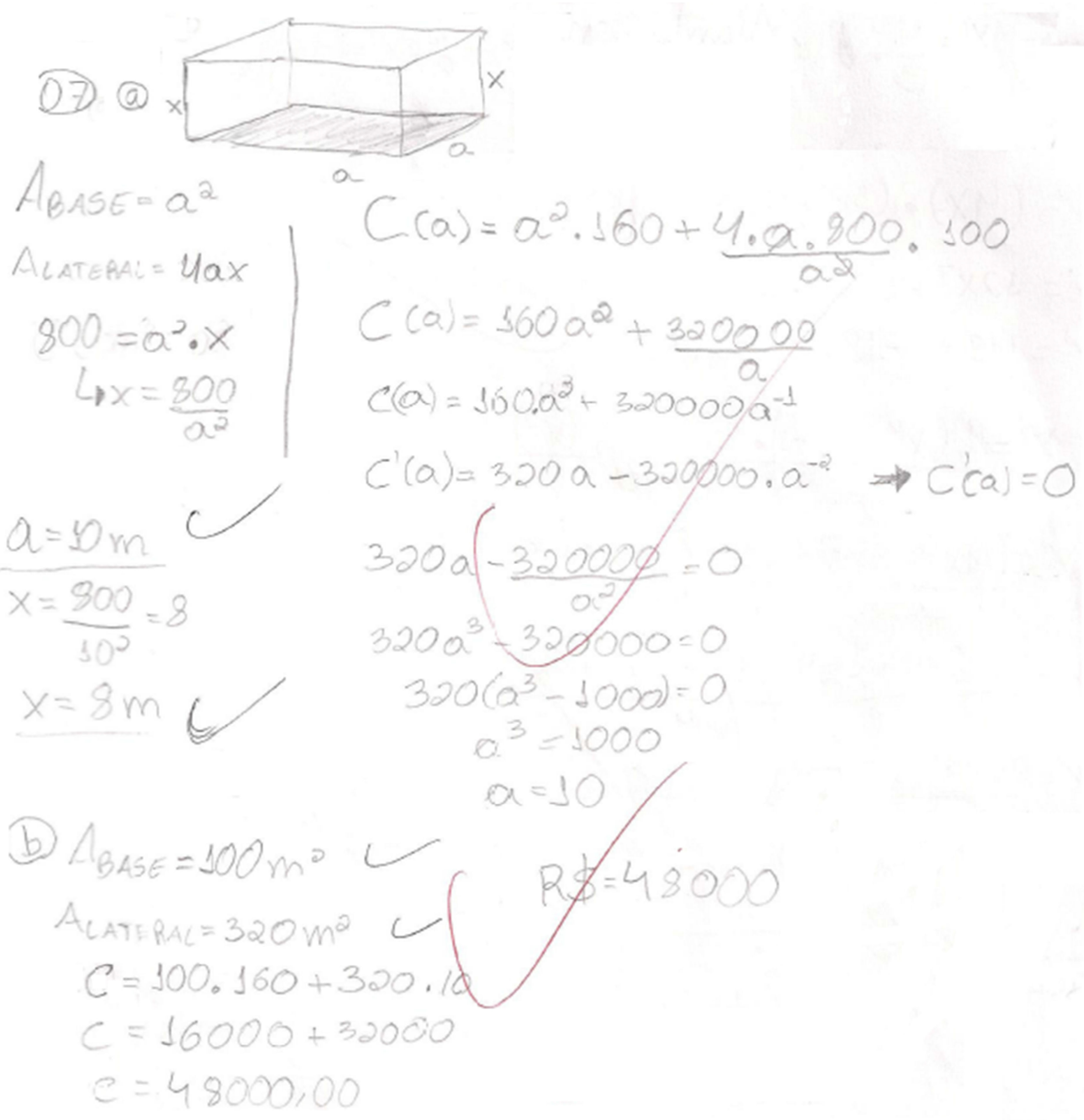


Figura 28: Solução do aluno 01 para as questões 7-a e 7-b.

Em se tratando de um curso de pouca duração, observou-se que os alunos tiveram uma ótima experiência e um bom aproveitamento, conforme pode ser evidenciado também pelo comentário de um dos participantes do curso de extensão na página do facebook da turma: https://www.facebook.com/groups/1427905767436202/; que pode ser visualizado no apêndice D.

4.2. ANÁLISE DE DADOS OBTIDOS NA APLICAÇÃO DO QUESTIONÁRIO

As respostas foram devidamente separadas e foi delineado um percentual de cada resposta. Assim, com base nesses percentuais, pode-se ter uma visão geral do grau de satisfação e/ou insatisfação no âmbito da aprendizagem dos alunos do curso.

Nesta pesquisa, tentou-se levantar questões que caminhassem junto com o cotidiano, trabalharam-se as características do saber ensinar e não somente do transferir conhecimento, indo ao encontro do pensamento de Freire (1996, p.52):

> Saber que ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para sua própria produção ou a sua construção. Quando entro em uma sala de aula devo estar sendo um ser aberto a indagações, à curiosidade, às perguntas dos alunos, a suas inibições; um ser crítico e inquiridor, inquieto em face da tarefa que tenho – a de ensinar e não a de transferir conhecimento.

Assim, nas duas primeiras perguntas do questionário, todos os 35 alunos conseguiram perceber alguma importância da Matemática no seu dia a dia e acharam que a Matemática pode contribuir de forma real na sua formação profissional e/ou pessoal.

Houve também unanimidade quanto às perguntas 06 e 07 do questionário, relativas ao fato de todos terem considerado importante o contato com as noções de Cálculo antes de adentrarem à universidade, e à experiência positiva de terem participado do grupo de estudos.

Com relação à questão 03, sobre as dificuldades enfrentadas na aprendizagem da Matemática, a figura 29 mostra os percentuais relativos às respostas dos alunos.

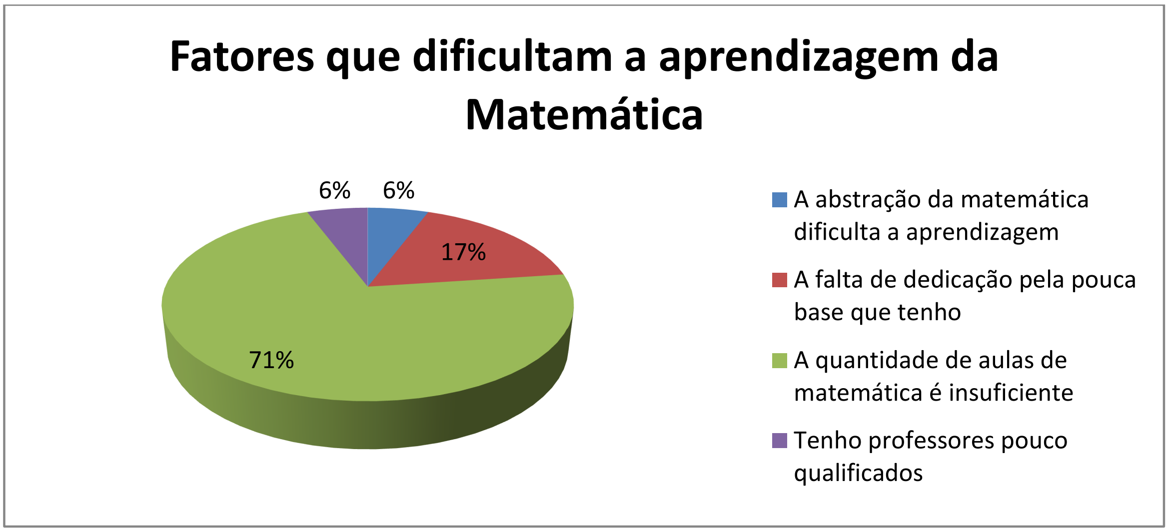


Figura 29: Resposta dos alunos à questão 03 do questionário.

Já com relação ao método utilizado que melhor facilitaria a compreensão da Matemática, as respostas dos alunos estão evidenciadas pela figura 30.

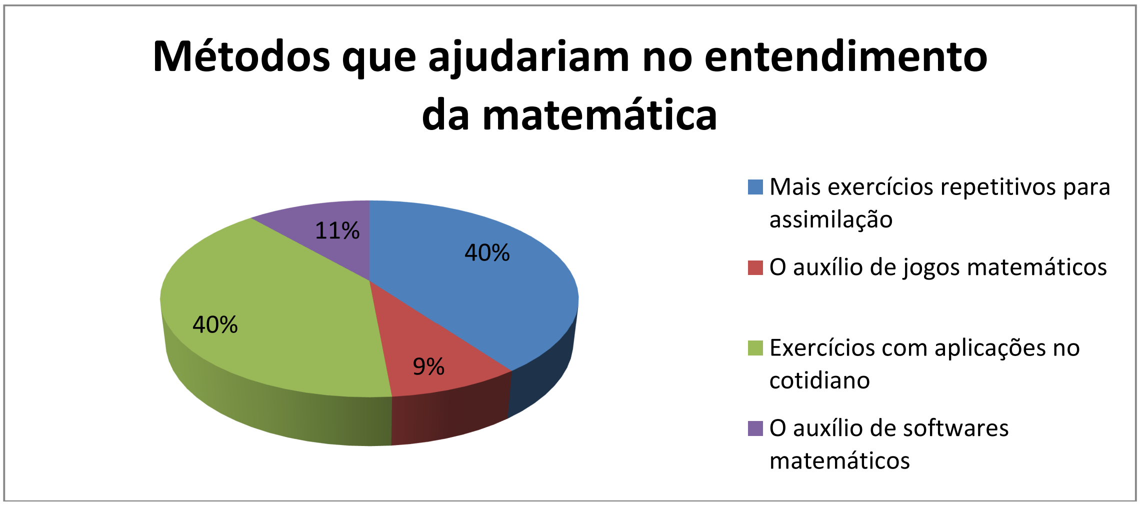


Figura 30: Respostas dos alunos à questão 04 do questionário.

Percebe-se que a maioria dos alunos não tem contato algum com softwares e jogos matemáticos e, ainda, estão muito ligados aos métodos tradicionais de aprendizagem, os quais o professor sozinho é capaz de motivá-lo ao aprendizado. Isso, provavelmente, deve-se ao fato de as escolas da região não oferecerem melhores condições para o aprendizado, tais como laboratórios de Matemática e de Informática, da pouca condição social da maioria dos alunos, além da constatação da superlotação de algumas salas de aula, algumas delas chegando a ultrapassar

60 alunos, o que contraria as convenções de trabalho dos estados da Bahia, que limita o número de alunos em 40; e do Pernambuco, que limita em 50 alunos a quantidade de alunos por sala de aula, no Ensino Médio.

A questão 05 verificou o contato que o aluno tivera sobre as noções de limites e derivadas. Todos disseram que nunca tiveram aula sobre esses assuntos, dentre eles, apenas 20% desses disseram ter lido algo relativo a esses tópicos, enquanto 80% não tinham noção alguma do que se tratava. Esse fato é deveras preocupante, o que enfatiza, ainda mais, a necessidade da discussão urgente sobre a inserção desses tópicos no Ensino Médio.

Um indicativo de que essa necessidade é latente foi a resposta dos alunos à questão 08, quando todos os participantes do curso conseguiram perceber a necessidade de se incluir as noções de limites e derivadas como conteúdo programático de Matemática a partir do 2º ano do Ensino Médio, sendo que apenas 8,5% desses restringiram essa inclusão apenas ao 3º ano do ensino médio.

Com relação à questão 09, quanto à avaliação dos conceitos estudados no curso, as respostas estão representadas na figura 31.

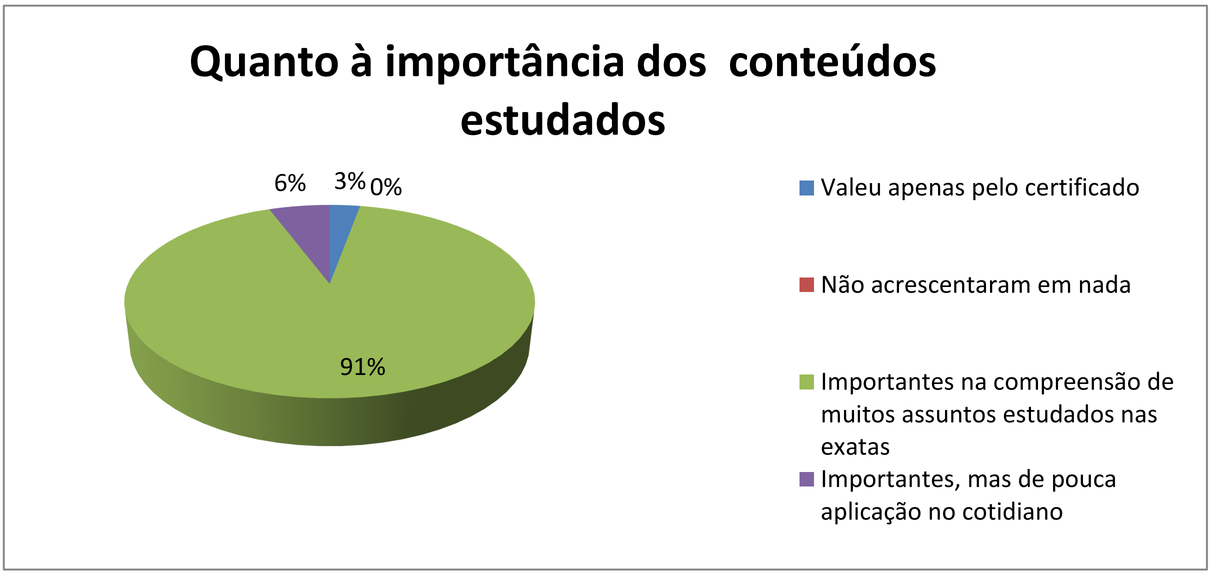


Figura 31: Respostas dos alunos à questão 09 do questionário.

A satisfação dos alunos foi bastante evidenciada quando analisadas as respostas da questão 10, onde se percebeu que todos os alunos julgaram o curso como bom ou excelente, sendo que destes, próximo de 86% julgaram o curso excelente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os estudantes, mesmo sem ter efetivo conhecimento sobre o que iriam fazer nos encontros, demonstraram desde o início muito entusiasmo por terem sido selecionados para o curso. A cada encontro, a expectativa dos estudantes aumentava, visto que esses alunos gostam das disciplinas da área de exatas e mostraram grande interesse pela disciplina lecionada.

Ao conheceram o principal objetivo do curso, apresentaram um bom desenvolvimento naqueles encontros presenciais: eles, juntos, constituíram uma amostra de alunos de 2º e 3º anos do Ensino Médio, que resolveram, com orientação do professor, roteiros de atividades intuitivas de cálculo, baseadas na exploração de funções com auxílio da tecnologia. Pode-se observar esse fato a partir do momento em que se fez uso do aplicativo GeoGebra, que auxiliou de forma considerável na compreensão da disciplina pelo grupo de alunos que participou do projeto descrito neste estudo.

As características do GeoGebra potencializaram a constituição de cenários para investigação, nos quais o aluno foi capaz de experimentar situações em um processo dinâmico. Entende-se que as atividades e tarefas propostas na pesquisa constituíram situações que possibilitaram e estimularam a investigação e o questionamento, convidando os alunos a descobrirem, formularem questões, procurarem respostas, levantarem e verificarem conjecturas.

Dessa forma, na sequência deste trabalho, foi analisado o entendimento, por parte desses estudantes, dos conceitos intuitivos de limites e derivadas. Como foi destacado anteriormente, esses são os conteúdos fundamentais ao entendimento das ideias básicas do Cálculo Diferencial, uma disciplina integrante do currículo do Ensino Superior nos cursos relacionados, principalmente, com as ciências exatas e suas tecnologias.

É importante ressaltar que a volta do ensino do Cálculo pode possibilitar aos alunos do Ensino Médio um aprendizado de forma amena de conceitos importantes. Dessa forma, o objetivo da pesquisa foi alcançado, tendo em vista que foi mostrado que os assuntos de limites e derivadas podem ser abordados no Ensino Médio, desde que o professor use alternativas adequadas e interessantes de abordá-los, pois esses tópicos são importantes, principalmente para os alunos que pretendem fazer um curso na área das Ciências Exatas.

É notória a necessidade de uma articulação da Matemática do Ensino Médio com os temas atuais da ciência e da tecnologia, e é nesse viés que se direciona esta pesquisa, pois a ideia é facilitar a compreensão de conceitos importantes, que aliam a Matemática a outras ciências.

Apesar de o Brasil ser um país multicultural, com diferentes realidades regionais, é possível se introduzirem as noções de Cálculo no Ensino Médio, cabendo ao professor ministrante a sensibilidade da necessidade ou não de um aprofundamento desses conceitos. Analisando os estudos realizados sobre o tema e descritos nesta pesquisa, percebeu-se que cada autor trabalhou a realidade de seus alunos-alvo. Essa diversidade foi levada em consideração, pois, de acordo com a região de atuação desse autor, os tópicos seguiram uma linha mais ou menos rigorosa.

Portanto, é salutar que, com maior ou menor profundidade, independentemente de se ter ou não um laboratório para experimentação, de se usar ou não softwares ou jogos matemáticos, se o professor tiver uma boa formação matemática e dedicação, com um mínimo de estrutura, ele terá condições de passar ao discente as noções necessárias ao bom entendimento do Cálculo.

REFERÊNCIAS

ALVES, Magda. **Como Escrever Teses e Monografias**. Rio de Janeiro: Campus, 2003.

ÁVILA, Geraldo; ARAÚJO, L. C. de. **Cálculo: ilustrado, prático e descomplicado**. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

ÁVILA, Geraldo. O ensino do Cálculo no Segundo Grau. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n.18, p.1-9, 1991.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2002.

BIANCHINI, Edwaldo. PACCOLA, Herval. **Matemática: versões alfa e beta**. v.3, 2ed. São Paulo, 1995.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Mirian Godoy. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BRASIL. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias/Secretaria de Educação Básica. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p. (Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2).

BRASIL. Secretaria de Educação Ensino Médio. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília: MEC/SEF, 2002.

_______ Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclo do ensino fundamental: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CARMO, Ângelo Pereira do. **Uma Abordagem Numérica para Problemas de Otimização no Ensino Médio.** 72 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

FROTA, Maria Clara. **Duas abordagens distintas de estratégia de resolução de exercícios no estudo de cálculo**. Belo Horizonte: FUMARC, 2001.

GUEDES, Anderson Guimarães; ASSIS, Márcia Maria Alves**. Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio: uma análise nas escolas de ensino médio da cidade do Natal/RN.** In: II Encontro Regional de Educação Matemática-II EREM, 2009, Natal. Anais-II EREM, 2009.

GODOY, Arilda. **Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. Revista de administração de empresas**. v. 35, n° 2, mar/abr, 1995 p.57-63

HUGHES-HALLETT, Deborah et al. **Cálculo Aplicado**. 4 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012. 432 p.

LACHINI, Jonas. **Subsídios para explicar o fracasso dos alunos em cálculo**. Belo Horizonte: FUMARC, 2001.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1994. 685 p.

MENEGUELLE, Flaviana Cristina**. Verificação da aprendizagem de operações matemáticas a partir de jogos interativos multimídia: o caso dos alunos da Casa São José**. Florianópolis-SC, Universidade Federal de Santa Catarina, 2009.

MOLON, Jaqueline. **Cálculo no ensino médio: uma abordagem possível e necessária com auxílio do software GeoGebra.** 195 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2013.

MORAN, José Manuel. **Ensino e aprendizagem inovadores com tecnologias audiovisuais e telemáticas**. Campinas: Papirus, 2006

OLIVEIRA, Fernando Rodrigues. **Uma proposta para o ensino de noções de Cálculo no Ensino Médio.** 58 p. TCC (Graduação em matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

SANTALÓ, Luiz A. matemática para não matemáticos. In PARRA, Cecília; SAIZ, Irma.(org.). **Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

VIANNA, Bruno Santos. **Cálculo no Ensino Médio: Despertando Ideias Sobre o Infinito.** 139 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2013.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Certificado de participação no curso de extensão

Noções de Cálculo para o Ensino Médio

Certificamos que o(a) aluno(a),

NOME DO ALUNO

Do **Colégio** , participou do curso de extensão ***Noções de Cálculo para o Ensino Médio***, ministrado pelo professor Carlos Cley Evangelista Ladislau e coordenado pelo professor Severino Cirino de Lima Neto, realizado na Universidade Federal do Vale do São Francisco – UNIVASF, Campus Petrolina.

Carga horária: 30 h/a

Petrolina-PE, 16 de dezembro de 2013.

Severino Cirino de Lima Neto
Coordenador Acadêmico do PROFMAT/UNIVASF

UNIVASF UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

CAPES

Proex PRÓ-REITORIA DE EXTENSÃO

APÊNDICE B - Avaliação escrita do curso Noções de Cálculo no Ensino Médio.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO – UNIVASF
PRÓ-REITORIA DE ENSINO – PROEN
DEPARTAMENTO DE REGISTRO E CONTROLE ACADÊMICO – DRCA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

AVALIAÇÃO DO CURSO "NOÇÕES DE CÁLCULO PARA O ENSINO MÉDIO" TEMA DA AVALIAÇÃO: NOÇÕES DE LIMITES E DERIVADAS	
PROFESSOR: Carlos Cley Evangelista Ladislau	**Data:__/___/____**
ALUNO:	**Valor:** 8,5 **Nota:**

01. Determine os seguintes limites: (1,5)

a) $\lim\limits_{x\to -4}\left(\dfrac{x^2-16}{x+4}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^4 - x^3+2x^2+1)$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^3-1}{x-1}\right)$

02. O valor de k para que $\lim\limits_{x\to 2}(x^3+2k) = 10$, é: (0,5)

A) 1 B) 5 C) 3 D) 2 E) 0

03. Calcule os limites: (0,5)

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{7}{x}\right)^x$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\text{sen } 5x}{3x}\right)$

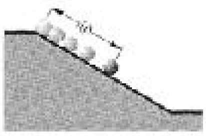
04. Dada a função real $f(x) = x^2 - 5x + 6$, determine, caso exista, a derivada de f utilizando a definição. (0,5)

05. Ache a derivada y' em cada caso: (1,5)

a) $y = \dfrac{4}{3}x^3 - 2$ b) $y = (2x^2-1).(3x^6+4x)$ c) $f(x)=\dfrac{(x^4-2x^3+1)}{x^2}$, com $x \neq 0$

06. (1 ponto cada item) Uma bola desce um plano inclinado de modo que a distância (em cm) que ela percorre em t segundos é dada por $s(t) = 2t^3 + 3t^2 + 4$ para $0 \le t \le 3$ (figura abaixo). (2,0)

a) Determine a velocidade da bola em t = 2.
b) Em que instante a velocidade é 30 cm/s?

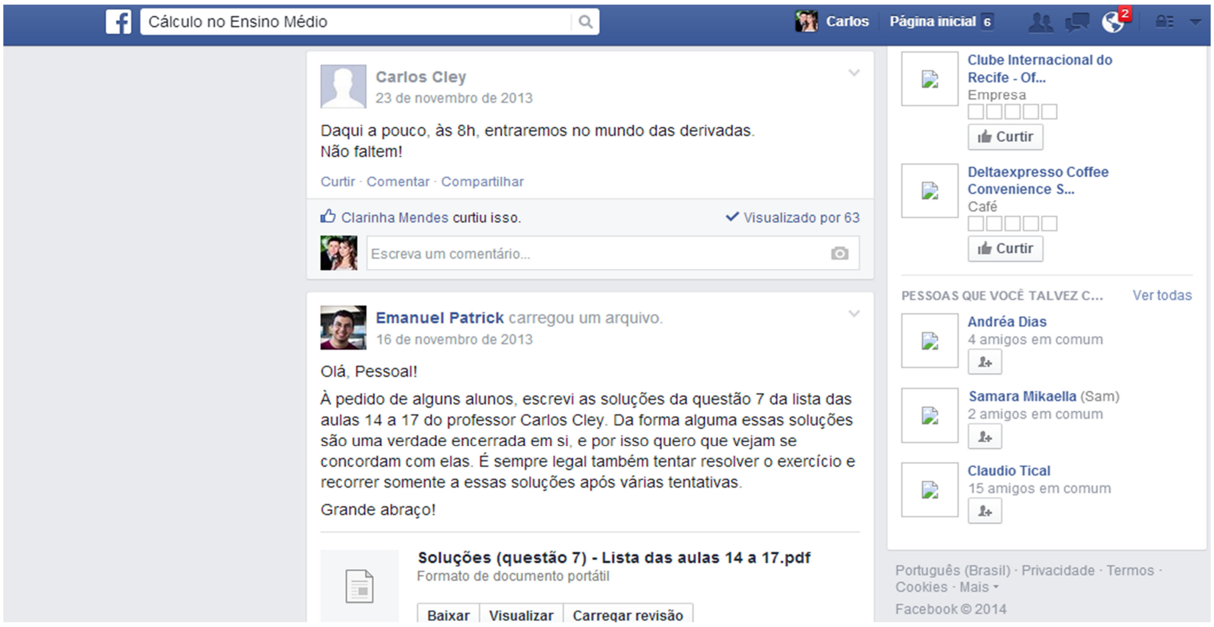


07. (1 ponto cada item) Um reservatório sem tampa, de base quadrada, deve ser construído de forma que o seu volume seja de 800 m^3. O material da base vai custar R$ 160,00 por m^2 e o material dos lados R$ 100,00 por m^2. (2,0)

a) Determine as dimensões da caixa de modo que o custo do material seja mínimo.
b) Qual é esse custo? Utilize duas casas decimais com arredondamento.

Av. José de Sá Maniçoba, s/n, Centro, CEP: 56304-917, Petrolina-PE, CNPJ: 05.440725/0001-14
Telefone: (87) 3862-9319 / Fax: (87) 3862-5013. Site: www.univasf.edu.br.

APÊNDICE C – Página do grupo para dúvidas e discussões sobre o curso



APÊNDICE D – Depoimento de aluno após ser aprovado na disciplina Cálculo I, no curso de Engenharia Mecânica da UNIVASF.

APÊNDICE E – Questionário avaliativo do curso

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS QUE PARTICIPARAM DO CURSO "NOÇÕES DE CÁLCULO PARA O ENSINO MÉDIO"

01. Você percebe alguma importância da Matemática no dia a dia?

( ) sim
( ) não
( ) às vezes

02. Você acha que a Matemática pode contribuir de forma real na sua formação profissional e/ou pessoal?

( ) sim
( ) não

03. Qual a sua maior dificuldade na aprendizagem da Matemática?

( ) a Matemática é muito abstrata e isso dificulta a aprendizagem.
( ) a pouca base que tenho me desestimula a estudar, não me dedico o bastante.
( ) a quantidade de aulas de Matemática que tenho na escola é insuficiente.
( ) tenho professores pouco qualificados e(ou) estimulados.

04. Qual método você acha que te ajudaria a entender melhor a Matemática?

( ) exercícios repetitivos para uma melhor assimilação
( ) exercícios com o auxílio de jogos matemáticos
( ) exercícios de aplicação no dia a dia
( ) exercícios com o auxílio de softwares matemáticos

05. Antes do curso você tinha alguma noção sobre limites e derivadas?

( ) sim
( ) não
( ) já havia lido sobre esses assuntos

06. Você acha importante ter noções de Cálculo antes de adentrar a universidade?

( ) sim
( ) não

07. Você gostou de participar desse grupo de estudos, ou seja, conhecer os conceitos básicos de limites e derivadas?

( ) sim
( ) não

08. Você acha que esses conceitos podem ser ensinados na escola, inclusos no conteúdo programático de Matemática a partir do 2° ano do ensino médio?

( ) sim
( ) não
( ) sim, desde o 1° ano
( ) só no terceiro ano do ensino médio

09. Como você avaliaria esses conceitos estudados?

( ) valeu apenas pelo certificado de participação no curso
( ) pouco importantes, não acrescentam em nada
( ) importantes para a compreensão de muitos assuntos estudados nas exatas.
( ) importantes, mas de pouca aplicabilidade no cotidiano

10. Como você avalia o curso?

( ) excelente
( ) bom
( ) regular
( ) ruim
( ) péssimo

APÊNDICE F – Apresentação do pôster sobre o curso de extensão na Oficina SBM do Ensino Básico em Juazeiro-BA, realizada de 18 a 20/11/2013.

APÊNDICE G – Imagens do momento final da aula inaugural do curso "Noções de Cálculo para o Ensino Médio", dia 28/09/2013.

APÊNDICE H – Cronograma do curso

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO – UNIVASF
PRÓ-REITORIA DE ENSINO – PROEN
DEPARTAMENTO DE REGISTRO E CONTROLE ACADÊMICO – DRCA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

UNIVASF

PROGRAMAÇÃO DO CURSO

TÓPICOS DE MATEMÁTICA **TCC: NOÇÕES DE CÁLCULO PARA O ENSINO MÉDIO - limites e derivadas com o auxílio do Geogebra.**	Código da Disciplina: **MA40**
	Período de oferta: **2013.2**
	Turma: **2012.1**
PROFESSOR MINISTRANTE: **Carlos Cley Evangelista Ladislau** ORIENTADORA: **Dra. Lucília Batista Dantas Pereira** COORIENTADOR: **Dr. Severino Cirino de Lima Neto**	

SEMANAS	CONTEÚDO PROGRAMÁTICO	DATAS
1ª	Revisão de conceitos básicos de caráter avaliativo inicial: produtos notáveis, fatoração, solução de uma equação do 2º grau completando quadrados, domínio de funções reais.	28/09
2ª	Noção intuitiva de limite através progressões geométricas (séries convergentes), definição, limite de uma função do 1º grau, de uma função constante.	05/10
3ª	FERIADO - Lista de exercícios para casa	12/10
4ª	Limites laterais e limites infinitos - exercícios	19/10
5ª	(ENEM) Atividade para casa – lista de exercícios	26/10
6ª	Propriedades dos limites, a indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, e limite da função polinomial para x tendendo a $-\infty$ e $+\infty$.	02/11
7ª	Continuidade e exercícios gerais sobre limites.	09/11
8ª	Introdução ao estudo da derivada de uma função: Interpretação geométrica e na física, função derivada.	16/11
9ª	Regras de derivação, aplicações da derivada: máximos e mínimos.	23/11
10ª	Lista de exercícios – Discussão em grupos	30/11
11ª	Atividade Avaliativa Final	07/12
12ª	Encerramento: entrega de notas e certificados	14/12

Av. José de Sá Maniçoba, s/n, Centro, CEP: 56304-917, Petrolina-PE, CNPJ: 05.440725/0001-14
Telefone: (87) 3862-9319 / Fax: (87) 3862-9013. Site: www.univasf.edu.br

APÊNDICE I – Parte do material didático usado no curso

NOÇÕES DE CÁLCULO PARA O ENSINO MÉDIO – PROFESSOR CARLOS CLEY

AULAS 01 a 06: REVISANDO CONCEITOS

ATIVIDADE AVALIATIVA

Aluno:

Série:

Colégio:

01. Fatore as expressões:

a) $2x^2 - 4x + 3xy - 6y$
b) $(3x + 5)(x - 2) + (3x + 5)^2$
c) $27x^3 + 1$
d) $27 - 8a^3b^3$
e) $9x^2 - 25$
f) $(3x + 4)^2 - (2x - 1)^2$
g) $x^2 + 6x + 9$
h) $x^2 + 7x + 12$
i) $b^2 - 4b - 21$
j) $y^3 - 15y^2 + 56y$

02. Simplifique as expressões:

a) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1}$

b) $\frac{x^3-y^3}{x-y} - \frac{x^3+y^3}{x+y}$

c) $\frac{2+\sqrt{3}}{1-\sqrt{5}} - \frac{2-\sqrt{3}}{1+\sqrt{5}}$

d) $\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}$

e) $\frac{\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{81}}{\sqrt{2\sqrt[3]{9}}.\sqrt{32}}$

f) $\left(1+\frac{a-b}{a+b}\right):\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right)$

03. Determine o valor da expressão $\frac{(x^4-y^4).(x+y)^2}{(x^2+y^2).(x^2+2xy+y^2)}$ para $x = 4$ e $y = \sqrt{3}$.

04. Se $x+\frac{1}{x}=3$, o valor de $x^3+\left(\frac{1}{x}\right)^3$ é:

A) 27
B) 18
C) 9
D) 6
E) 2

05. Resolva as equações do 2º grau, em R, usando o método "completar quadrados":

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $x^2 - x - 2 = 0$

c) $x^2 - x - 20 = 0$

d) $x^2 + 3x + 2 = 0$

e) $x^2 + 2x + 5 = 0$

06. Dê o domínio de cada função:

a) $f(x) = 3x + 7$

b) $f(x)=\frac{3x-2}{x}$

c) $f(x)=\frac{x+8}{x+5}$

d) $f(x)=\frac{3}{8-4x}$

e) $f(x)=\frac{x^2-7x+10}{2x+7}$

f) $f(x)=\sqrt{-x^2+2x+3}$

g) $y=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$

h) $g(x)=\frac{\sqrt{7-x}}{\sqrt{x-2}}$

Olha o desafio!

07. Determine o valor da soma $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{999}+\sqrt{1000}}$

Mais um desafio!

08. Quantos são os pares (x,y) de inteiros positivos tais que $x^2 - y^2 = 2^{2010}$?

AULAS 07 a 09

Noção intuitiva de Limite

Ao estudar as progressões geométricas, você teve o primeiro contato com a noção de limite. Por exemplo:

a) Qual o comportamento da sequência $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$, $n \in N^*$, quando n cresce indefinidamente, tendendo ao infinito?

b) Qual o valor do limite da soma dos termos da PG acima?

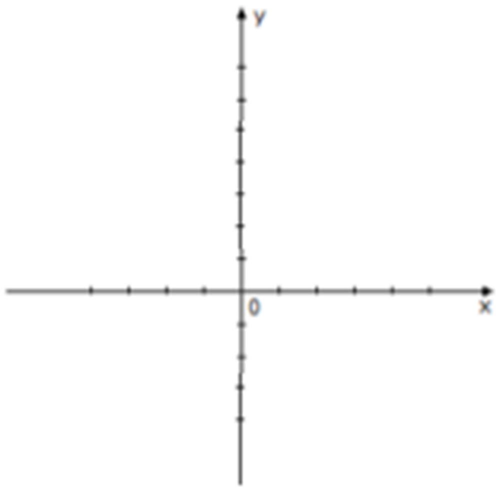
c) Que nome se dá a esse tipo de série ou sequência?

Podemos também usar as funções para entendermos o conceito de limite. Por exemplo:

a) Dada a função real $f(x) = \frac{2x^2 - 4x}{x - 2}$, qual o domínio de f?

b) Simplificando a expressão que define a função fracionária $f(x) = \frac{2x^2 - 4x}{x - 2}$, obtemos que função?

c) Faça o gráfico da função obtida:



d) Construa a tabela abaixo, onde f(x) é a função obtida no item anterior:

x	y=f(x)
2,99	
2,999	
2,9999	
2,99999	
3,01	
3,001	
3,0001	
3,00001	

e) A que valor tende o resultado de y=f(x)?

Conclusão:

Definição de Limite

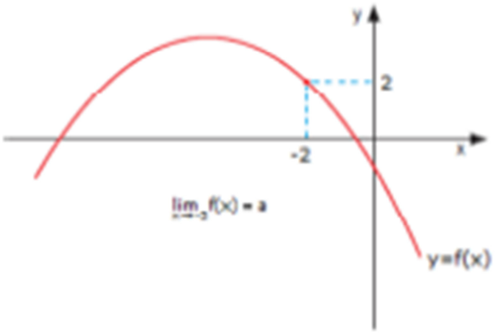
Sejam f uma função real de variável real e $a \in R$. Dizemos que o **limite de f(x)**, para x tendendo a **a**, é **b** $\in$ **R**, e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

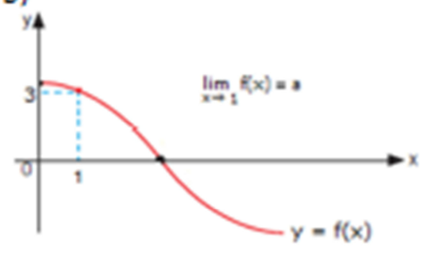
Se a toda possível sequência de valores de x, pertencentes ao domínio da função, tendendo para a (mas diferentes de a) corresponde uma sequência de valores de f(x) tendendo para b.

Exercício 01 Determine o valor de **a** nos seguintes casos:

a)



b)



Unicidade do limite

Uma função não pode tender a dois limites ao mesmo tempo, ou seja, se o limite de uma função existir, ele será único.

Se $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$

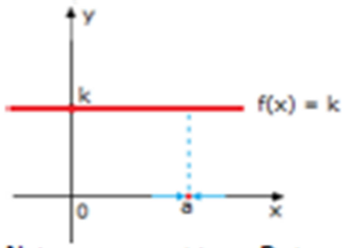
Observe o gráfico abaixo:

Note que, quando os valores de x se aproximam de 2 (tendem a 2) pela esquerda, os valores de y se aproximam de 1. Mas quando os valores de x tendem a 2 pela direita os valores de y tendem a 3. Portanto dizemos que o limite da função no ponto de abscissa 2 não existe, visto que o limite tem que ser único.

Limite de uma função constante

O gráfico de uma função constante f(x) = k, k ∈ R, é uma reta paralela ao eixo Ox.

Exemplo

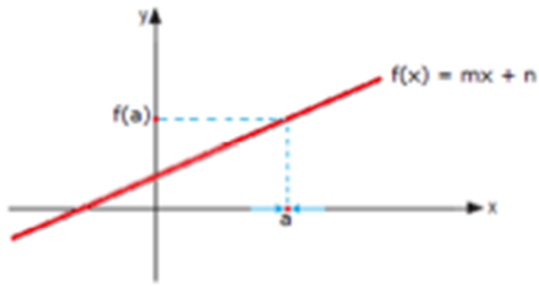


Note que para ∀ a ∈ R, temos:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} k = k}$$

Limite de uma função do 1º grau

A função do1º grau é representada graficamente por uma reta não paralela aos eixos coordenados. Veja o exemplo!



∀ a ∈ R, temos:

$$\boxed{\lim_{x\to a} (mx+n) = f(a) = ma+b}$$

Exercício 02 Determine os limites:

a) $\lim_{x\to 8} 30$

b) $\lim_{x\to -4} (3x-2)$

c) $\lim_{x\to 0,5} \left(\frac{1}{4} - \frac{3x}{2}\right)$

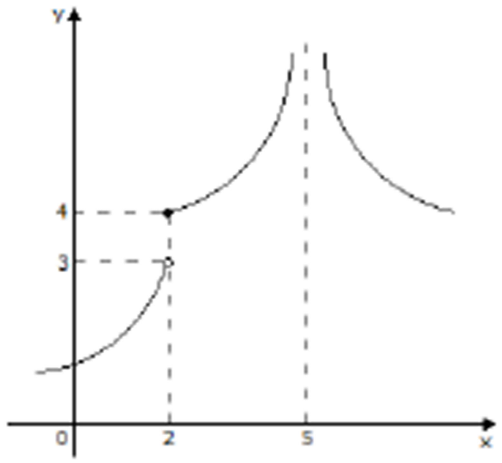
d) $\lim_{x\to 0} \left[\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]$

e) $\lim_{x\to 3} \left(\frac{x^2-9}{x-3}\right)$

f) $\lim_{x\to 2} \left(\frac{x^3-8}{x-2}\right)$

Limites laterais de uma função

Considere a função $y = f(x)$ representada pelo gráfico a seguir:



Note que para valores de x tão próximos de 2 quanto desejarmos, valores estes à esquerda de 2, a função $f(x)$ tenderá a 3. Indicamos isso assim:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$$

Lê-se: "limite de f(x) quando x tende a 2 pela esquerda é igual a 3".

Tomando agora valores de x tão próximos de 2 quanto desejarmos, valores estes à direita de 2, a função $f(x)$ tenderá a 4. Indicamos esse fato assim:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$$

Lê-se: "limite de f(x) quando x tende a 2 pela direita é igual 4".

Esses dois limites que acabamos de observar são denominados **limites laterais** da função $f(x)$. Perceba também que

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$$

De acordo com o teorema da unicidade do limite, o limite de f(x) quando x tende a 2 não existe, apesar de seus limites laterais existirem, pois o resultado deveria ser único.

Ainda relativo ao mesmo gráfico, note que:

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = \infty \text{ e } \lim_{x \to 5^+} f(x) = \infty$$

Portanto, como os limites laterais são iguais, existe o limite de f(x) quando x tende a 5. Indicamos esse limite assim:

$$\lim_{x \to 5} f(x) = \infty$$

__Exercício 03__ Esboce o gráfico da função *f*, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -x+1, \text{ se } x < 0 \\ 3, \text{ se } 0 \le x \le 2 \\ x+1, \text{ se } x > 2 \end{cases}$$

Verifique se existem $\lim_{x \to 0} f(x)$ e $\lim_{x \to 2} f(x)$.

__Exercício 04__ As taxas para despachar cargas por navio são frequentemente baseadas em fórmulas que oferecem um preço menor por quilo, quando o tamanho da carga é maior. Suponha que x quilos seja o peso de uma carga, C(x) seja o seu custo total, tal que

$$C(x) = \begin{cases} 0{,}80x, \text{ se } 0 < x \le 50 \\ 0{,}70x, \text{ se } 50 < x \le 200 \\ 0{,}65x, \text{ se } x > 200 \end{cases}.$$

Faça o que se pede:

a) Um esboço do gráfico de C

b) $\lim_{x \to 50^-} C(x)$

c) $\lim_{x \to 50^+} C(x)$

d) $\lim_{x \to 50} C(x)$

e) $\lim_{x \to 200^-} C(x)$

f) $\lim_{x \to 200^+} C(x)$

AULAS 10 a 13

Propriedades dos limites

Dadas as condições de existências dos limites, e sendo $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$,demonstra-se que:

I) Limite da soma (ou diferença) de funções

$$\boxed{\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L_1 \pm L_2}$$

Exemplo

$$\lim_{x\to 2}(x+4) = \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 4 = 2+4 = 6$$

II) Limite do produto de funções

$$\boxed{\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x) = L_1.L_2}$$

1ª Consequência

Se uma das funções for constante, por exemplo, g(x) = k, k ∈ R, temos:

$$\boxed{\lim_{x\to a}[k.f(x)] = \lim_{x\to a} k.\lim_{x\to a} f(x) = k.\lim_{x\to a} f(x)}$$

2ª Consequência

Para n inteiro e positivo, temos:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \lim_{x\to a} \underbrace{[f(x).f(x).f(x).\ldots.f(x)]}_{\text{n fatores}} =$$

$$= \overbrace{\lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} f(x).\ldots.\lim_{x\to a} f(x)}^{\text{n fatores}} =$$

$$= \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$$

ou seja, $\boxed{\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n}$.

Exemplo

$$\lim_{x\to 3}(x^3 - 2x) = \lim_{x\to 3} x^3 - \lim_{x\to 3} 2x =$$

$$= \left(\lim_{x\to 3} x\right)^3 - 2.\lim_{x\to 3} x =$$

$$= 3^3 - 2.3 =$$

$$= 27 - 6 =$$

$$= 21$$

3ª Consequência

Dada a função polinomial $P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \ldots + a_0$, temos:

$$\lim_{x\to a} P(x) = a_n.\lim_{x\to a} x^n + a_{n-1}.\lim_{x\to a} x^{n-1} + \ldots + \lim_{x\to a} a_0$$

$$\lim_{x\to a} P(x) = a_n.\left(\lim_{x\to a} x\right)^n + a_{n-1}.\left(\lim_{x\to a} x\right)^{n-1} + \ldots + a_0$$

$$\lim_{x\to a} P(x) = a_n.a^n + a_{n-1}.a^{n-1} + \ldots + a_0$$

Note que o 2º membro da expressão acima é o valor numérico de P(x) quando x =a. Logo,

$\boxed{\lim_{x\to a} P(x) = P(a)}$, ∀o grau n do polinômio P(x).

III) Limite do quociente

$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}}$, com $L_2 \neq 0$.

Exemplos

$$\lim_{x\to -4}\left(\frac{3}{x+1}\right) = \frac{\lim_{x\to -4} 3}{\lim_{x\to -4}(x+1)} = \frac{3}{-4+1} = -1$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2 - x + 3}{x^3 + 2}\right) = \frac{0^2 - 0 + 3}{0^3 + 2} = \frac{3}{2}$$

IV) limite de uma raiz

$\boxed{\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}}$, dadas as condições de existência.

V) limite de um logarítmo

$\boxed{\lim_{x\to a}[\log_c f(x)] = \log_c\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]}$, $0 < c \neq 1$, sendo c um número real.

A indeterminação $\frac{0}{0}$

No cálculo de $\lim_{x\to 2}\left(\frac{3x-6}{x-2}\right)$, a propriedade do limite do quociente não se aplica, pois $\lim_{x\to 2}(x-2) = 0$.Perceba que quando *x tende a dois*, tanto numerador quanto denominador *tendem a zero*, gerando o que denominamos *indeterminação do tipo* $\frac{\to 0}{\to 0}$, que quase sempre é indicado por $\frac{0}{0}$.

Veja!

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{3x-6}{x-2}\right)=\frac{3.2-6}{2-2}=\frac{0}{0}$$

E agora?

Lembre-se de que quando x "tende" a 2, o resultado "tende" a $\frac{0}{0}$. Porém estamos considerando valores muito próximos de 2, mas nunca iguais a 2. Portanto é possível calcular limites desse tipo, fatorando um dos termos da expressão.

A solução toma a seguinte forma:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{3x-6}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}3=3$$

Note que só podemos dividir ambos os termos da expresão por (x – 2) porque, na realidade, x nunca poderá assumir o valor 2.

Vamos a mais um exemplo!

Calcule o limite:

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\right)$$

Solução

Note que o limite acima também gera a indeterminação $\frac{0}{0}$, mas, dessa vez, podemos fatorar o denominador. Veja!

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2).(\sqrt{x}+2)}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{(\sqrt{x}+2)}\right)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=$$
$$=\frac{1}{2+2}=$$
$$=\frac{1}{4}$$

Limite da função polinomial para x tendendo a - ∞ e a + ∞.

Sabemos que se n for inteiro positivo qualquer, então:

$$\begin{cases} I)\ \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x^n}\right)=0 \\ II)\ \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{x^n}\right)=0 \end{cases}$$

Vejamos agora como calcularmos o limite de uma função polinomial P(x) quandox → - ∞ ou quando x → +∞. Considerando o polinômio $P(x)=a_n.x^n+a_{n-1}.x^{n-1}+\ldots+a_0$, temos:

$$\lim_{x\to +\infty}P(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(a_n.x^n+a_{n-1}.x^{n-1}+\ldots+a_0\right)$$

Colocando $a_n.x^n$ em evidência, no polinômio acima, vem:

$$\lim_{x\to +\infty}a_n.x^n\left(1+\frac{a_{n-1}.x^{n-1}}{a_n.x^n}+\frac{a_{n-2}.x^{n-2}}{a_n.x^n}\ldots+\frac{a_0}{a_n.x^n}\right)$$
$$=\lim_{x\to +\infty}a_n.x^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n.x}+\frac{a_{n-2}}{a_n.x^2}\ldots+\frac{a_0}{a_n.x^n}\right).$$

Observe que as frações $\frac{a_{n-1}}{a_n.x},\frac{a_{n-2}}{a_n.x^2},\ldots,\frac{a_0}{a_n.x^n}$ tendem a zero quando x → +∞, pois o numerador de cada uma delas é uma constante e o denominador tende ao infinito. Assim, concluimos que

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty}P(x)=a_n.x^n}.$$

Isso significa que o limite do polinômio é o limite do termo de maior grau. De modo análogo se chega à mesma conclusão quando x → - ∞.

Exemplo1:

$$\lim_{x\to +\infty}(x^2+5x-6)=\lim_{x\to +\infty}x^2=+\infty$$

Exemplo2:

$$\lim_{x\to -\infty}(5x^4-2x^3+7x^2+9x-11)=\lim_{x\to -\infty}5x^4=+\infty$$

Exemplo3:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2x^2-x+5}{3x^3-4x^2+7x-9}\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2x^2}{3x^3}\right)=$$
$$=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{3x}\right)=\frac{2}{3}.\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

Alguns limites fundamentais

Os limites de grande importância no estudo do cálculo são denominados "limites fundamentais". Os exemplos abaixo são de fácil demonstração e muito útil.

I) $\boxed{\lim_{x \to 0}\left(\frac{\text{sen } x}{x}\right) = 1}$

II) $\boxed{\lim_{x \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$

e

$\boxed{\lim_{x \to -\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$, onde $e \approx 2{,}71$

Note que, no primeiro caso, temos uma indeterminação do tipo $\frac{\to 0}{\to 0}$, ou simplesmente $\frac{0}{0}$, enquanto no segundo caso, temos uma indeterminação do tipo $(\to 1)^{\to \infty}$,ou simplesmente 1^{∞}.

Exemplo 1

Calcule o valor de $\lim_{x \to 0}\left(\frac{\text{sen } 3x}{4x}\right)$.

Solução

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{\text{sen } 3x}{4x}\right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{\text{sen } 3x}{4x} \cdot \frac{3}{3}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0}\left(\frac{\text{sen } 3x}{3x} \cdot \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} \cdot \lim_{x \to 0}\left(\frac{\text{sen } 3x}{3x}\right) = \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}$$

Exemplo 2

Calcule o valor de $\lim_{x \to +\infty}\left(1 + \frac{8}{x}\right)^x$.

Solução

Fazendo $\frac{8}{x} = \frac{1}{y} \Rightarrow x = 8y$, temos:

$$\lim_{x \to +\infty}\left(1 + \frac{8}{x}\right)^x = \lim_{x \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{y}\right)^{8y} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right]^8 = \left[\lim_{x \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right]^8 = e^8$$

Exercícios propostos

01. Calcule os limites:

a) $\lim_{x \to 3}(x^2 - 8)$

b) $\lim_{x \to 0}\left(\frac{x + 2}{3 - x}\right)$

c) $\lim_{x \to -3} x^2.(x + 2)$

d) $\lim_{x \to -1} \sqrt{x^2 + x + 4}$

02. Sendo $\lim_{x \to a} f(x) = 3$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 5$, calcule:

a) $\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)]$

b) $\lim_{x \to a} 2.g(x)$

c) $\lim_{x \to a}\left[\frac{g(x)}{f(x)}\right]$

d) $\lim_{x \to a}[f(x)]^4$

e) $\lim_{x \to a}\sqrt{g(x)}$

f) $\lim_{x \to a}\left[\log_{\frac{1}{9}} f(x)\right]$

03. Calcule m e n sabendo que $\lim_{x \to 2}(mx + n) = 9$ e $\lim_{x \to 1}(mx + n) = 5$.

04. O valor de k para que $\lim_{x \to 2}(kx^3 + 2) = 50$ é:

A) 5
B) 8
C) 6
D) 2
E) n.d.a.

05. Calcule os limites:

a) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\text{sen } px}{qx} \right)$

b) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\text{sen}^2 \frac{x}{3}}{x^2} \right)$

c) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^{3x}$

d) $\lim_{x \to +\infty} (1 + x)^{1/x}$

06. O valor de $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\text{sen } 2x}{x.\cos x} \right)$ é:

A) 0
B) $+\infty$
C) 1
D) 2
E) $\frac{4}{3}$

07.(CEFET-PR) O $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\text{tg } x}{x} \right)$ é igual a:

A) 0
B) 4
C) 2
D) 3
E) 1

08. (MACK-SP) O $\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x^2 - 9x}$ é igual a:

A) $\frac{1}{9}$
B) $\frac{1}{27}$
C) $\frac{1}{243}$
D) $\frac{1}{81}$
E) $\frac{1}{54}$

09. (CEFET-PR) O $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x+5}$ é:

A) $+\infty$
B) 1
C) e^5
D) 0
E) e

10.(FUVEST) Sabe-se que $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\text{sen}^2 x}{x^2} \right) = 1$. Conclui-se que $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right)$:

A) é $\frac{1}{2}$
B) é zero
C) é infinito
D) é indeterminado
E) não existe

AULAS 14 a 17

Ao estudarmos os limites laterias de uma função, intuitivamente, já foi introduzida a idéia de continuidade. Agora, veja a definição formal.

Continuidade de uma função

Dizemos que uma função *f é contínua em um número a* se, e somente se forem satisfeitas as seguintes condições:

I) f(a) existe;
II) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe;
III) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

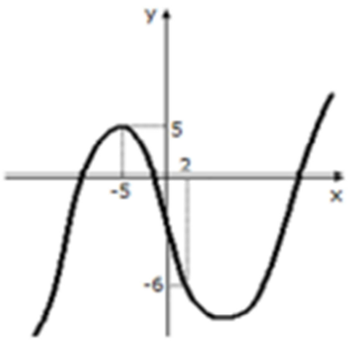
Se ao menos uma dessas condições não for satisfeita *em a*, a função *f* será *descontínua em a*.

Continuidade em um intervalo

Uma função *f* cujo domínio contém o intervalo fechado [a, b] será contínua em [a, b] se, e somente se ela for contínua no intervalo aberto (a,b), ou seja, se ela for contínua à direita de a e contínua à esquerda de b.

Exemplo 1:

Observe a função *f: R→ R* do gráfico abaixo:



Podemos afirmar que *f* é contínua no ponto de abscissa 2, visto que

I)f(2) = – 6, ou seja, f(2) existe;

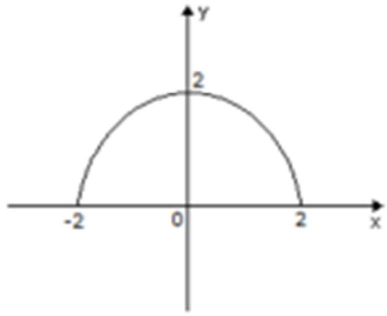
II) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -6$, ou seja, $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ existe;

III) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = -6$.

Perceba, ainda, que a função é contínua em qualquer número do seu domínio.

Exemplo 2

A função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ é definida para todos os valores de x, tais que 4 – x^2 ≥ 0, ou seja, para – 2 ≤ x ≤ 2. Veja o gráfico dessa função:



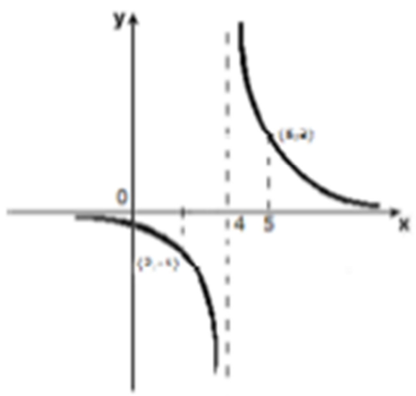
Note que $\lim\limits_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0 = f(-2)$ e

e $\lim\limits_{x \to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0 = f(2)$

Dizemos que essa função é contínua à direita de -2 e contínua à esquerda de 2, logo é contínua no intervalo fechado [-2, 2].

Exemplo 3

O gráfico abaixo representa a função definida por $g(x) = \dfrac{2}{x - 4}$. Note que a função é descontínua em x = 4, pois quando x tende a 4 pela direita, g(x) tende a +∞, e quando x tende a 4 pela esquerda, g(x) tende a - ∞. Porém, ao definirmos a função *g* já sabemos que 4 não pertence ao seu domínio, logo podemos dizer que a função é contínua para qualquer valor do seu domínio.



Exercícios propostos

01. Em cada exemplo, trace o gráfico da função; ache os limites laterais da função quando $x \to a^-$ e quando $x \to a^+$; determine o limite da função quando $x \to a$ (se ele existe) e diga se a função é contínua no valor a:

a) $f(x) = \begin{cases} 3 - x^2, \text{ se } x \leq 1 \\ 1 + x^2, \text{ se } x < 1 \end{cases}$, sendo a =1

b) $f(x) = \begin{cases} |x - 2|, \text{ se } x \neq 2 \\ 1, \text{ se } x = 2 \end{cases}$, sendo a =2

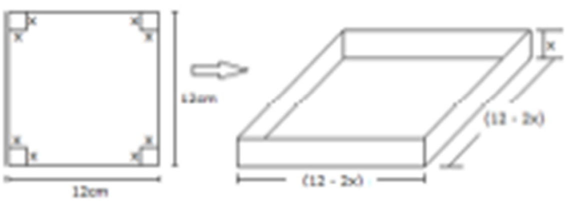
02. Um jardim retangular deve ser feito, de modo que o lado da casa sirva de limite e 100 metros de cerca sejam usados para os outros três lados. Se x metros for o comprimento do lado do jardim paralelo à casa, determine:

a) A área do jardim, em metros quadrados, em função de x.

b) O domínio da função

c) Prove que a função é contínua em seu domínio.

03. Um fabricante de caixas de papelão deseja fazer caixas abertas de pedaços quadrados de papelão com 12cm de lado. Para isso, ele pretende retirar quadrados iguais dos quatro cantos, dobrando a seguir os lados. Se x cm for o comprimento dos quadrados a serem cortados, expresse o volume da caixa como função de x; o domínio da função e prove que ela é contínua em seu domínio.



04. (CEFET-PR) Se $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ é igual a:

A) 1
B) 0
C) $+\infty$
D) $-\infty$
E) não existe

05. (PUC-MG) Se $L = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{\dfrac{2 - 8x}{x + 1}}$, o valor de L é:

A) −2
C) −1
C) 0
D) 1
E) 2

06. Uma partícula se movimenta sobre uma trajetória qualquer obedecendo à função horária $S(t) = t^2 - 4t + 3$, com S em metros e t em segundos.

a) Qual a velocidade média da partícula no intervalo de 4 a 4 + x segundos com $x \neq 0$?

b) Qual a velocidade da partícula no instante t = 4s, ou seja, com x tendendo a zero?

07. Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(3 - x^3)^4 - 16}{x^3 - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x + 2} - 1}{x + 1}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{3x + 5} - 2}{x^2 - 1}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}{x}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} (5x^3 + 4x^2 - 2x - 1)$

08. Demonstre o limite fundamental:

$$\lim_{u \to 0} \frac{a^u - 1}{u} = \ln a$$

AULAS 18 a 20

Introdução ao estudo da derivada de uma função: Interpretações geométrica e física.

O final do século XVII viu o surgimento de uma conquista matemática formidável: O Cálculo diferencial. Descoberto independentemente por Isaac Newton e Gottfried Leibniz, tornou-se a base para o desenvolvimento de várias áreas da Matemática, além de possuir aplicação em praticamente todas as áreas do conhecimento científico.

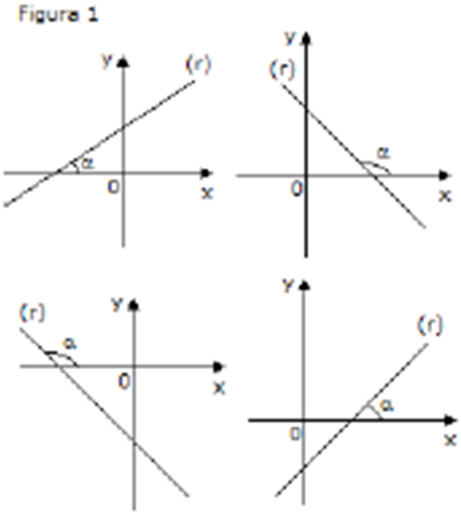
Nas aulas anteriores, estudamos o conceito de limite. A partir desta aula, estudaremos o conceito de derivada e sua relação com o limite. Poderemos observar que a derivada de uma função é o limite do quociente de duas grandezas em que ambas tendem a zero, e estudaremos algumas aplicações na física e na própia matemática, além de um pouco da importância da Modelagem Matemática no Cálculo.

A derivada como taxa de variação

Interpretação geométrica

Toda reta (r) do plano cartesiano apresenta um ângulo de inclinação α $(0 \le \alpha < 180^o)$ em relação ao semi-eixo positivo das abscissas. Define-se *coeficiente angular da reta* e representa-se por *m*, a tangente desse ângulo α *($\alpha \neq 90^o$)*. Veja!

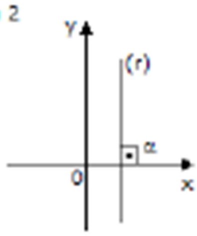
Figura 1



m = tgα é o *coeficiente angular ou a inclinação da reta* (r) em cada exemplo da figura 1.

Se α = 90º, *a reta não apresenta coeficiente angular, visto que tg 90º não existe.* (fig. 2)

Figura 2



Quando são dados dois pontos distintos $A(x_1,y_1)$ e $B(x_2,y_2)$ de uma mesma reta (r), observe que o coeficiente angular m dessa reta é dado na figura 3.

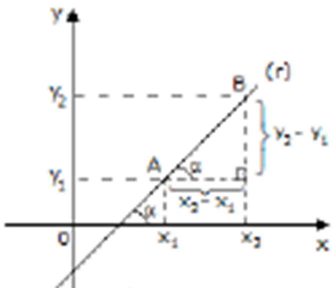


Figura 3

$$m = tg\,\alpha$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Reta secante a uma curva

Considere dois pontos distintos $A(x_1,f(x_1))$ e $B(x_2,f(x_2))$ pertencentes a uma mesma curva. A reta $\overrightarrow{AB}$ que passa pelos pontos A e B, é denominada reta secante a essa curva.

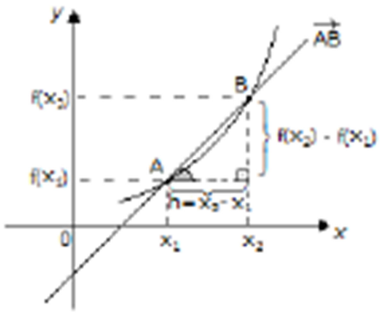


Figura 4

Na figura 4, $\overrightarrow{AB}$ é a reta secante à curva que passa pelos pontos A e B. Note que o coeficiente angular da reta $\overrightarrow{AB}$ é dada por:

$$m_{\overrightarrow{AB}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \text{ ou } m_{\overrightarrow{AB}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h}$$

Inclinação de uma curva num ponto fixo

Sendo $A(x_1,f(x_1))$ um ponto qualquer de uma curva f, denomina-se *inclinação da curva f no ponto A* a inclinação da reta t tangente à curva nesse ponto A. Na figura 5, a inclinação da curva f no ponto A é dada por $m_t = \text{tg}\,\alpha$, $(\alpha \neq 90°)$.

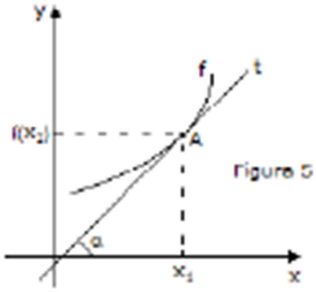


Figura 5

Derivada de uma função num ponto

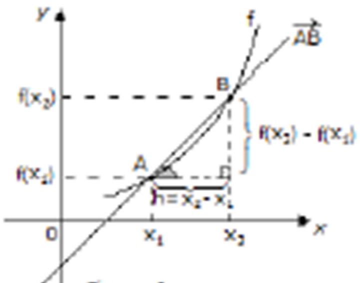


Figura 6

Na figura 6, se fixarmos o ponto $A(x_1,f(x_1))$ da função f e fizermos o ponto $B(x_2,f(x_2))$ variar, ao longo da curva, na direção de A, a reta secante AB irá girar em torno do ponto A e o valor de h se aproximará cada vez mais de zero, fazendo com que a razão $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{h}$, tenda ao coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto A. Portanto podemos dizer, intuitivamente, que o coeficiente angular m_t da reta t tangente à curva f no ponto $A(x_1,f(x_1))$ é:

$$m_t = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{h}$$

Esse limite é definido como *a derivada f'* da função f no ponto $A(x_1,f(x_1))$, e representada assim:

$$f'(x_1) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \text{ ou } f'(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{h}$$

A função derivada

A derivada de uma função *f* é a função denotada por *f'*, tal que seu valor em qualquer número x do domínio de *f* seja dada por

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}},$$

se esse limite existir.

A seguinte notação também pode ser usada:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}},$$

onde $f(x+\Delta x)-f(x) = \Delta y$ é denominado *incremento de y* e denota a variação no valor da função f quando x varia de Δx.

Escrevendo $\frac{dy}{dx}$ em lugar de $f'(x)$, teremos:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Essa notação foi usada pelo alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

Exemplo 01

O que seria a derivada da função real $f(x) = x^2$ no ponto de abscissa 6?

<u>Solução</u> Vamos tentar decifrar!

A tabela abaixo apresenta o coeficiente angular m da reta secante obtida, quando fazemos os valores de x variarem e se aproximarem cada vez mais do ponto fixo de abscissa 6.

x	$f(x) = x^2$	$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(6)}{x-6}$
8	64	14
7	49	13
6,5	42,25	12,5
6,25	39,0625	12,25
6,1	37,21	12,1
6,001	36,012001	12,001
6,00001	36,0001200001	12,00001

Perceba que à medida que o ponto (x, f(x)) se aproxima do ponto fixo (6,36), o coeficiente angular da reta que passa por esses dois pontos (reta secante) se aproxima de 12.

Nesse caso, temos:

$$\text{Lim}_{x\to 6}\frac{f(x)-f(6)}{x-6}=12$$

Por definição, esse limite é denominado *"derivada da função f no ponto de abscissa 6"*, ou simplesmente f′(6), e representa a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 6.

Poderíamos obter esse resultado sem a necessidade desses dados experimentais, visto que já temos conhecimento de limites e suas propriedades. Então vejamos:

$$f'(x) = \lim_{x\to 6}\frac{f(x)-f(6)}{x-6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{x\to 6}\frac{x^2-36}{x-6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{x\to 6}\frac{(x-6)(x+6)}{x-6}.$$

Então podemos dizer que

$$f'(x) = \lim_{x\to 6}(x+6) = 6 + 6 = 12.$$

Exercícios propostos

01. Ache o coeficiente angular da reta tangente à curva $y = x^2 - 4x - 5$ no ponto de abscissa - 2.

02. Ache as derivadas indicadas:

a) $f(x) = 7x + 3$; $f'(x) = ?$

b) $y = 3x^2 + 4$; $y' = ?$

c) $\frac{d}{dx}(8 - x^3)$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$; $f'(x) = ?$

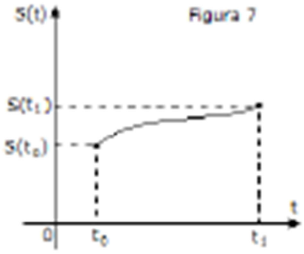
03. Considere a função $g(x) = x^3 - 3x^2$.

a) Calcule $g'(x)$, para x real.
b) Para que valores de x $g'(x) = 0$?
c) Interprete o significado de $g'(x_0) = 0$ para a reta tangente ao gráfico de g no ponto $(x_0, f(x_0))$.

04. Qual a equação da reta tangente à curva $y = x^3 - 4$ no ponto (2,4)?

Taxa de variação média

Um dos primeiros conceitos da física é a *velocidade média de um móvel* num dado intervalo de tempo, representada pela expressão $V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, onde $\Delta s = S(t_1) - S(t_0)$ e $\Delta t = t_1 - t_0$ significam as variações de posição e tempo desse móvel, respectivamente. Veja a figura 7.



$$\boxed{V_m = \frac{S(t_1)-S(t_0)}{t_1 - t_0}}$$

A tabela a seguir relaciona o espaço percorrido por um automóvel nos seis primeiros segundos de deslocamento:

t(seg)	0	1	2	3	4	5	6	...
S (m)	0	2	5	9	14	20	27	...

Observe que esse automóvel não se desloca com movimento uniforme, pois a sua velocidade média não é a mesma em intervalos de tempos iguais:

Entre 0 e 2 segundos: $v_1 = \frac{5-2}{2-0} = 1{,}5\text{m/s}$

Entre 2 e 4 segundos: $v_2 = \frac{14-5}{4-2} = 4{,}5\text{m/s}$

Entre 4 e 6 segundos: $v_3 = \frac{27-14}{6-4} = 6{,}5\text{m/s}$

Perceba também que o movimento é cada vez mais rápido, portanto acelerado.

E se quiséssemos encontrar a velocidade do automóvel no instante 2,8 segundos, como faríamos?

Note que só foram cronometrados os instantes representados na tabela, e anotadas as suas posições naqueles instantes. Até agora, não temos elementos que permitam calcular a velocidade instantânea do automóvel para instantes diferentes do da tabela. Esse é o nosso objeto de estudo a seguir.

A velocidade instantânea

A tabela do exemplo anterior nos fornece as velocidades do automóvel nos instantes: 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6 segundos; mas não nos dá a velocidade no instante 2,8s, por exemplo. Suponha que, com o auxílio de fotografias, possamos determinar a velocidade do automóvel em intervalos de tempos cada vez menores, de forma a encontrarmos uma aproximação considerável da velocidade desse automóvel em torno do instante 2,8s. Ainda assim, não teremos a velocidade no exato instante 2,8s.

De um modo geral, a velocidade instantânea de um móvel pode ser calculada usando limites, pois se considerarmos o instante t_0 como um ponto fixo, basta calcularmos as velocidades médias obtidas pelo móvel em intervalos de tempos cada vez menores, com valores cada vez mais próximos de t_0, chegando à expressão:

$$V_{(t_0)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{(t_0)} = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{S(t_1) - S(t_0)}{t_1 - t_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{(t_0)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}$$

Essa é a mesma ideia da derivada da função f num ponto fixo x_0 do seu domínio, isto é, a variação instantânea que a função f sofre em relação à variável x num ponto x_0. Quando essa variável é o tempo, a derivada é a velocidade instantânea do móvel no instante t_0.

Exemplo 2

Um ponto material se move numa trajetória qualquer segundo a equação horária $S(t) = t^2 + 2t - 5$, em que **S** é dado em metros (m) e **t** é dado em segundos (s). Determinar a velocidade do ponto material no instante $t_0 = 2s$.

<u>Solução</u>

I) No instante $t_0 = 2s$ o ponto material está na posição $S(t_0) = S(2) = 2^2 + 2.2 - 5 = 3m$.

II) Queremos a velocidade no instante $t_0 = 2s$ e sabemos que essa velocidade é a derivada do espaço em $t_0 = 2$, ou seja,

$$V_{(t_0)} = S'_{(t_0)} \Rightarrow V_{(t_0)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}$$

Então vejamos!

$$\begin{aligned} S(t_0 + \Delta t) = S(2 + \Delta t) &= \\ &= (2 + \Delta t)^2 + 2.(2 + \Delta t) - 5 = \\ &= 4 + 4.\Delta t + (\Delta t)^2 + 4 + 2\Delta t - 5 = \\ &= (\Delta t)^2 + 6.\Delta t + 3 \end{aligned}$$

$$V_{(t_0)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{(t_0)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\Delta t)^2 + 6\Delta t}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{(t_0)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t.(\Delta t + 6)}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{(t_0)} = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta t + 6) \Rightarrow V_{(t_0)} = 0 + 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{(t_0)} = 6m/s}$$

Exercícios propostos

05. Uma partícula se move sobre uma trajetória segundo a equação horária dada abaixo, em que **S** é dado em metros (m) e **t** é dado em segundos (s). Determinar a velocidade da partícula no instante indicado:

a) $S(t) = 2.t^2 + 10t - 1$, no instante t = 3s.
b) $S(t) = t^2 + 3t$, no instante t = 2s.
c) $S(t) = t^3 + t^2 + 2t + 1$, no instante t = 1s.

06. A aceleração **a** é a variação instantânea da velocidade **v** em relação ao tempo **t** num instante **t_0**, ou seja, é a derivada da velocidade no instante **t_0**: $a_{(t_0)} = V'_{(t_0)}$. Sabendo que um móvel tem a velocidade variável dada pela expressão $v = 3t^2 + 1$, determine sua aceleração, em m/s^2, no instantes nos t = 1s e t = 4s?

07. Seja V(x) cm^3 o volume de um cubo com xcm de lado. Use a calculadora para calcular a taxa média de variação de V(x) em relação a x, quando x varia de

a) 3 a 3,2
b) 3 a 3,1
c) 3 a 3,01
d) 3 a 3,001
e) Qual será a taxa de variação instantânea de V(x) em relação a x, quando x é 3?

08. Uma bola de bilhar é atingida e movimenta-se em linha reta. Seja $s = 100t^2 + 100t$ a equação da posição da bola, com *s* a posição, em cm, da bola após *t* segundos. Com que velocidade a bola atingirá a tabela da posição inicial que está a 39cm?

AULAS 21 a 24

Regras de derivação e propriedades operatórias

Nesta aula, estudaremos algumas regras fundamentais de derivação e propriedades operatórias cujas demonstrações têm como base a definição de derivada, vista nas aulas anteriores. Vale salientar que essas regras só valem se as funções apresentadas foram deriváveis.

I) Derivada da função constante

Se $f(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$), então $f'(x) = 0$

II) Derivada da função potência

Se $f(x) = x^n$, então $f'(x) = n.x^{n-1}$

Obs! Para n = 1 temos a função identidade $f(x) = x$, então $f'(x) = 1.x^0 \Rightarrow f'(x) = 1$.

III) Derivada da função seno

Se $f(x) = \text{sen}x$, então $f'(x) = \cos x$

IV) Derivada da função cosseno

Se $f(x) = \cos x$, então $f'(x) = -\text{sen}x$

V) Derivada da função exponencial

Se $f(x) = a^x$, então $f'(x) = a^x.\ln a$

VI) Derivada da função logarítmica neperiana (base e)

Se $f(x) = \ln x$, então $f'(x) = \frac{1}{x}$

VII) Derivada da função logarítmica não neperiana (base ≠ e)

Se $f(x) = \log_a x$, então $f'(x) = \frac{1}{x}.\ln a$

VIII) Derivada da soma ou diferença

$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

IX) Derivada do produto de uma constante por uma função

Sendo k uma constante real e *f e g* funções deriváveis, com $g(x) = k.f(x) \Rightarrow g'(x) = k.f'(x)$

X) Derivada do produto de funções

$(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

XI) Derivada do quociente entre funções

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Exercícos Propostos

01. Determine a função derivada $f'(x)$ de cada função:

a) $f(x) = 8$

b) $f(x) = \sqrt{\pi}$

c) $f(x) = x^2$

d) $f(x) = 2x^4$

e) $f(x) = 5x + 6$

f) $f(x) = -x^5 + 3x^4 - 6x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7$

g) $f(x) = \sqrt{x}$

h) $f(x) = \sqrt[5]{x} - 10x^3$

i) $f(x) = \sqrt{x}.\text{sen}x$

j) $f(x) = (x^2 + x + 1).(\cos x)$

k) $f(x) = 2.\ln x + 5.\cos x$

l) $f(x) = \frac{x+2}{2x}$

m) $f(x) = \frac{1}{x}$

n) $f(x) = \text{tg } x$

o) $f(x) = \text{cotg } x$

p) $f(x) = \sec x$

q) $f(x) = \text{cossec } x$

r) $f(x) = \frac{x}{\text{sen}x}$

02. Dê a equação da reta tangente à curva $y = 2x + \text{sen}x$ no seu ponto de abscissa 0.

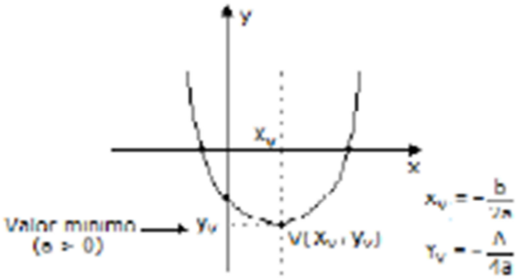
03. Determine $f'(1)$, sabendo que a função f é definida por $f(x) = (x + \ln x).(x - \ln x)$.

Pontos críticos de uma função

Um ponto do gráfico de uma função f de abscissa x_0, tal que $f'(x_0) = 0$ é denominado ponto crítico de f.

A ideia de máximo e mínimo da função

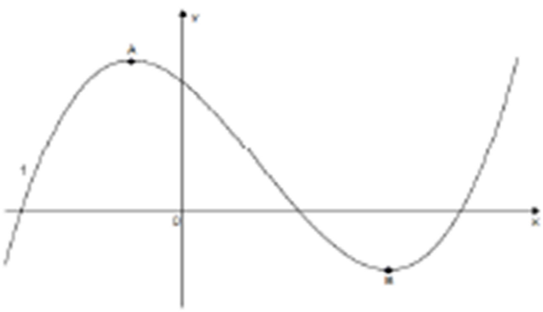
Ao estudarmos a função do quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, nos deparamos com o conceito de vértice (V) da parábola, abscissa do vértice (x_v), que pode ser maximante (ponto de máximo) ou minimante (ponto de mínimo), e ordenada do vértice (y_v), que é o valor máximo ou mínimo da função, a depender do valor de a. Veja o exemplo!



No exemplo do gráfico acima, de acordo com o conceito de derivada de uma função num ponto fixo, sabemos que os pontos da função situados à esquerda do vértice da parábola tem derivada negativa ($f'(x) < 0$), enquanto os pontos situados à direita do vértice tem derivada positiva ($f'(x) > 0$). No vértice, a derivada é igual a zero ($f'(x) = 0$), visto que a reta tangente ao gráfico da função no vértice é paralela ao eixo das abscissas, logo tem inclinação zero. O vértice é denominado **"mínimo absoluto"** da função.

Máximos e Mínimos locais (relativos)

Observe a função $y = f(x)$ do gráfico abaixo, onde D = R e Im = R:

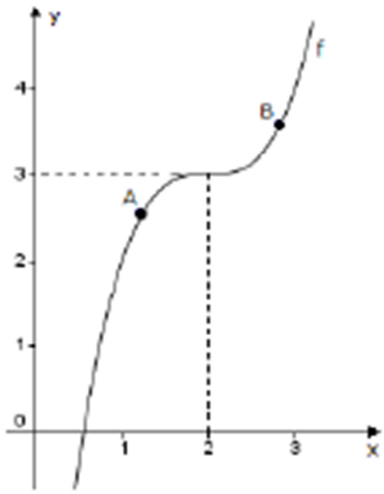


Essa função não tem máximo absoluto nem mínimo absoluto, pois o gráfico sugere que para $x \to +\infty \Rightarrow f \to +\infty$ e para $x \to -\infty \Rightarrow f \to -\infty$.

Dizemos que a função f apresenta um **"máximo local" ou "máximo relativo"** no ponto A situado no 2º quadrante do gráfico e um **"mínimo local" ou "mínimo relativo"** no ponto B, situado no 4º quadrante. Observe também que nos pontos A e B a derivada de f é nula ($f'(x) = 0$), e que os pontos A e B representam os locais onde a derivada muda de sinal, passando de positiva à negativa ao passar de A para B epelo ponto A e de negativa à positiva ao passar pelo ponto B.

Ponto de Inflexão

Na função da figura abaixo, se considerarmos um ponto movendo-se de A para B, sobre o gráfico de f, a inclinação da reta tangente a esse ponto será sempre positiva, exceto no ponto (2,3), onde a inclinação é zero. Tanto à direita quanto à esquerda do ponto (2,3) a inclinação de qualquer reta tangente ao gráfico dessa função continuará positiva, ou seja, a derivada da função em cada ponto do gráfico, exceto em (2,3) é positiva. Assim, dizemos que o ponto (2,3) é um **"ponto de inflexão"**.



Em geral, se uma função f definida na vizinhança de x_0 admite a derivada segunda ($f''(x)$), com $f'(x_0) = 0$, e:

- Se $f''(x_0) > 0$, então x_0 é ponto de mínimo local;
- Se $f''(x_0) < 0$, então x_0 é ponto de máximo local;
- Se $f''(x_0) = 0$, então x_0 é ponto de inflexão.

Aplicações: um pouco de modelagem matemática

Diariamente, há situações-problemas que requerem soluções e decisões rápidas. Alguns desses problemas contêm fatos matemáticos relativamente simples, envolvendo uma matemática elementar, outros necessitam de um conhecimento mais aprofundado.

Modelagem Matemática é um processo, que envolve a obtenção de um modelo, que descreve matematicamente um fenômeno da nossa realidade para tentar compreendê-lo e estudá-lo, criando hipóteses e reflexões sobre tais fenômenos.

Segundo Bassanezi (2002, p. 24) "A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual".

Nosso objetivo nesta aula é tratar de alguns exemplos de modelagem matemática em que se usam derivadas. Vejam!

Exemplo 1: O Sr. Cirino mora no semiárido nordestino e pretende armazenar água da chuva para usá-la no período de estiagem na sua propriedade rural, visto que a água é um recurso escasso em grande parte do ano naquela região. Na loja de material de construção da cidade mais próxima, ele comprou um material apropriado para construir uma calha destinada a recolher a água da chuva que corre dos telhados. O material tem forma retangular com 30cm de largura e deve-se construir esse condutor dobrando-se as laterais perpendicularmente a esse material. O Sr. Cirino queria dobrar 7cm de cada lado, baseado apenas no seu olhar de homem experiente do campo, mas seu amigo Tonny, que cursou Engenharia Civil, se propôs a ajudá-lo orientando-o sobre quantos cm deveriam ser dobrados de cada lado, de modo que o condutor de água tivesse capacidade máxima, de acordo com a vazão da água esperada. Como Tonny resolveu esta situação? O Sr. Cirino aproximou bem o valor a ser dobrado?

Comentário

Essa é uma situação típica de modelagem matemática, onde ainda não está tão claro qual tópico da matemática a ser usado para a sua resolução. Mas, para que se tenha sucesso, é necessário seguir os seguintes passos iniciais:

1. Faça uma figura representativa da situação, se isso for possível.
2. Defina as variáveis. Em geral, procure relacioná-las de modo que a quantidade de variáveis seja a menor possível.
3. Escreva todos os fatos numéricos conhecidos sobre as variáveis, tentando obter uma equação e(ou) uma função que as relacione.
4. Agora, você já deve ter um esboço do que fazer. Parta para uma solução ótima.

Solução

AULAS 21 a 24

Regras de derivação e propriedades operatórias

Nesta aula, estudaremos algumas regras fundamentais de derivação e propriedades operatórias cujas demonstrações têm como base a definição de derivada, vista nas aulas anteriores. Vale salientar que essas regras só valem se as funções apresentadas foram deriváveis.

I) Derivada da função constante

Se $f(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$), então $f'(x) = 0$

II) Derivada da função potência

Se $f(x) = x^n$, então $f'(x) = n.x^{n-1}$

Obs! Para n = 1 temos a função identidade $f(x) = x$, então $f'(x) = 1.x^0 \Rightarrow f'(x) = 1$.

III) Derivada da função seno

Se $f(x) = \text{sen}x$, então $f'(x) = \cos x$

IV) Derivada da função cosseno

Se $f(x) = \cos x$, então $f'(x) = -\text{sen}x$

V) Derivada da função exponencial

Se $f(x) = a^x$, então $f'(x) = a^x.\ln a$

VI) Derivada da função logarítmica neperiana (base e)

Se $f(x) = \ln x$, então $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

VII) Derivada da função logarítmica não neperiana (base ≠ e)

Se $f(x) = \log_a x$, então $f'(x) = \dfrac{1}{x}.\ln a$

VIII) Derivada da soma ou diferença

$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

IX) Derivada do produto de uma constante por uma função

Sendo k uma constante real e *f e g* funções deriváveis, com $g(x) = k.f(x) \Rightarrow g'(x) = k.\ f'(x)$

X) Derivada do produto de funções

$(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

XI) Derivada do quociente entre funções

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Exercícos Propostos

01. Determine a função derivada $f'(x)$ de cada função:

a) $f(x) = 8$

b) $f(x) = \sqrt{\pi}$

c) $f(x) = x^2$

d) $f(x) = 2x^4$

e) $f(x) = 5x + 6$

f) $f(x) = -x^5 + 3x^4 - 6x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + 7$

g) $f(x) = \sqrt{x}$

h) $f(x) = \sqrt[5]{x} - 10x^3$

i) $f(x) = \sqrt{x}.\text{sen}x$

j) $f(x) = (x^2 + x + 1).(\cos x)$

k) $f(x) = 2.\ln x + 5.\cos x$

l) $f(x) = \dfrac{x+2}{2x}$

m) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

n) $f(x) = \text{tg}\ x$

o) $f(x) = \text{cotg}\ x$

p) $f(x) = \sec x$

q) $f(x) = \text{cos}\sec x$

r) $f(x) = \dfrac{x}{\text{sen}x}$

02. Dê a equação da reta tangente à curva $y = 2x + \text{sen}x$ no seu ponto de abscissa 0.

03. Determine $f'(1)$, sabendo que a função f é definida por $f(x) = (x + \ln x).(x - \ln x)$.