



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO - UNIVASF
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL -
PROFMAT**

MANOEL PEREIRA DA SILVA FILHO

**ANÁLISE DA RELAÇÃO ENTRE FORMAÇÃO INICIAL E PROFICIÊNCIA DE
PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM EQUAÇÕES LITERAIS DE 1º GRAU: UM
ESTUDO DE CASO UTILIZANDO O MODELO DE RASCH DICOTÔMICO**

JUAZEIRO - BA

2014

MANOEL PEREIRA DA SILVA FILHO

**ANÁLISE DA RELAÇÃO ENTRE FORMAÇÃO INICIAL E PROFICIÊNCIA DE
PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM EQUAÇÕES LITERAIS DE 1º GRAU: UM
ESTUDO DE CASO UTILIZANDO O MODELO DE RASCH DICOTÔMICO**

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Vale do São Francisco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Me. Evando Santos Araújo

(Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional ó PROFMAT, Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF)

JUAZEIRO - BA

2014



Universidade Federal do Vale do São Francisco
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT/UNIVASF



**ANÁLISE DA RELAÇÃO ENTRE FORMAÇÃO INICIAL E
PROFIÊNCIA DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM
EQUAÇÕES LITERAIS DO 1º GRAU: UM ESTUDO DE CASO
UTILIZANDO O MODELO DE RASCH DICOTÔMICO**

Por:

MANOEL PEREIRA DA SILVA FILHO

Dissertação aprovada em 15 de Setembro de 2014.

Prof. Me. Evando Santos Araújo
Orientador(PROFMAT-UNIVASF)

Prof. Dr. Felipe Wergete Cruz
Examinador Interno(PROFMAT-UNIVASF)

Prof. Dr. Helinando Pequeno de Oliveira
(Colegiado de Pós-Graduação em Ciência dos Materiais - UNIVASF)

Prof. Dr. Telio Nobre Leite
(Colegiado de Pós-Graduação em Ciência dos Materiais - UNIVASF)

Juazeiro
2014

Silva Filho, Manoel Pereira da.

S586a Análise da relação entre formação inicial e proficiência de professores de matemática em equações literais de 1º grau: um estudo de caso utilizando o modelo de rasch dicotômico / Manoel Pereira da Silva Filho. . Juazeiro, 2014

93 f.: il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro - BA, 2014.

Orientador: Prof. Me. Evando Santos Araújo.

1. Matemática - Ensino. 2. Professores - Formação. 3. *Equações*. I. Título. II. Universidade Federal do Vale do São Francisco.

CDD 515.25

Com carinho,

À minha esposa Valéria, às
minhas filhas, Clarice e Ana
Clara, por proporcionarem minha
felicidade.

AGRADECIMENTOS

À Deus por sua bondade, por haver provido os meios para conclusão desse curso, principalmente quando me iluminou nos momentos mais difíceis.

À minha mãe, Maria de Lourdes Silva pela educação proporcionada e a todos meus irmãos, Jorge, Solineide, Adailton e Saionara, por sempre acreditarem em mim.

À minha esposa Valéria da Silva Pereira, pela dedicação e paciência durante a realização desse curso. Pelo conforto quando me deparei com situações adversas, por todo seu carinho e dedicação.

Aos companheiros de classe que fizeram parte do meu grupo de estudos, Paulo Soares, Carla Saturnina, Alice Valéria, Everaldo, José Dantas, Reginildo, Jurandir e Edilson.

Ao Professor Me. Evando Santos Araújo, pelo seu profissionalismo, paciência e dedicação na condução da orientação desse trabalho.

Ao professor Dr. Severino Cirino de Lima Neto por sua determinação na implantação do PROFMAT/UNIVASF.

À servidora da UNIVASF, Manoela Pereira Magalhães e ao apoio secretarial da OBMEP, representado por Diana Souza, por sua contribuição.

Aos participantes do PAPMEM-2013 pela cooperação na realização do estudo de caso. E a todos que de alguma forma e em algum momento contribuíram para o meu sucesso.

Muito Obrigado!

Lança o teu pão sobre as águas,
porque depois de muitos dias o
acharás.

(Eclesiastes 11, v. 1)

RESUMO

Equações Literais são expressões matemáticas que possuem, além da variável em questão, coeficientes representados de forma genérica por letras. Essas equações são de grande importância, uma vez que o professor pode usá-las para discutir e modelar fenômenos e situações em diversas áreas do conhecimento, através das relações entre as quantidades envolvidas, tornando o ensino de matemática mais significativo. Neste trabalho, analisou-se a relação entre formação inicial e proficiência de professores de matemática em Equações literais do 1º Grau via modelo de Rasch dicotômico. Esse modelo considera que a probabilidade de um indivíduo responder satisfatoriamente a um item de um questionário é função tanto da sua habilidade quanto da dificuldade deste item. Como instrumento de avaliação, os entrevistados responderam a itens de um questionário que discutia a formação acadêmica, o conhecimento técnico e a prática docente desse conteúdo. As respostas a este questionário foram analisadas antes e depois da disponibilização de um manual didático aos participantes da pesquisa, produzido para sanar possíveis dificuldades com o tema. Os resultados iniciais se mostraram bastante preocupantes uma vez que para cerca de 90% dos entrevistados, o modelo retornou que a habilidade desses profissionais foi estimada como sendo menor que a dificuldade dos itens propostos no questionário. Os resultados indicam que os professores não responderam positivamente às questões que tratavam da prática docente e do conhecimento do conteúdo. Por outro lado, verificou-se que uma ação simples de capacitação e formação continuada, como foi o caso da aplicação do manual didático, aumentou significativamente o nível de proficiência dos professores nos quesitos avaliados inicialmente.

Palavras-chave: Ensino, aprendizagem, equações literais, formação inicial e continuada, modelo de Rasch, proficiência.

ABSTRACT

Literal equations are mathematical expressions that have coefficients represented by letters (generic form), besides the variable in question. These equations are of great importance in the search for a more meaningful math to students, since the teacher can use them to discuss and to model phenomena and situations in all areas of knowledge through the relationships between the quantities involved. In this work, we analyzed the relationship between initial training and proficiency of teachers in literal equations of 1st degree via the dichotomous Rasch model. This model considers that the likelihood of a person answer satisfactorily to an item of a test is a function of both their ability and the difficulty of this item. As an tool, interviewed answered the items of a test that discussed the academic training, technical knowledge and teaching practice. Responses to this questionnaire were analyzed before and after the availability of a teaching manual, produced to remedy potential problems with the theme. Initial results were quite worrying since for about 90% of respondents, the ability was estimated to be less than item difficulty in the questionnaire. The results indicate that teachers did not respond positively to questions dealing with the teaching practice and content knowledge. Despite this, it was found that a simple action of training and continuing education, in the case of the application of the teaching manual, improved level of knowledge of teachers in different categories.

Keywords: Teaching, learning, literal equations, initial and continuing education, Rasch model, proficiency.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Representação esquemática das competências adquiridas pelo professor quando este se desenvolve profissionalmente.....	20
Figura 2. Representação planificada das faces do reservatório.....	28
Figura 3. Representação gráfica de P versus $\theta - D$	37
Figura 4. Curvas características dos itens (CCI).....	38
Figura 5. Curvas características dos itens (CCI) obtidas no Q1 (acima) e no Q2 (abaixo)	50
Figura 6. Comparação das estimativas das dificuldades dos itens de 1 a 10 (Q1 e Q2).....	51
Figura 7. Histogramas de frequências (%) dos valores de dos IDØs obtidos experimentalmente antes e depois da aplicação do MD.....	52
Figura 8. Gráfico $P \times -d$ (à esquerda) e porcentagem de IDØs (à direita) que responderam positivamente ao Item 6 ($P > 0,5$).....	54
Figura 9. Gráfico $P \times -d$ (à esquerda) e porcentagem de IDØs (à direita) que responderam positivamente ao Item 7 ($P > 0,5$).....	55
Figura 10. Gráfico $P \times -d$ (à esquerda) e porcentagem de IDØs (à direita) que responderam positivamente ao Item 8 ($P > 0,5$).....	56
Figura 11. Gráfico $P \times -d$ (à esquerda) e porcentagem de IDØs (à direita) que responderam positivamente ao Item 9 ($P > 0,5$).....	57
Figura 12. Gráfico $P \times -d$ (à esquerda) e porcentagem de IDØs (à direita) que responderam positivamente ao Item 10 ($P > 0,5$).....	57
Figura 13. <i>Score</i> total de probabilidades normalizado dos IDØs com relação às respostas dadas aos itens de 6 a 10, antes e depois da aplicação do Manual Didático (Q1 e Q2, respectivamente). Os <i>scores</i> foram normalizados em uma escala de 0 a 10.....	59

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Quadro comparativo profissional: Formação Inicial x Desenvolvimento Profissional.....	19
Tabela 2: Descrição dos itens utilizados no Q1.....	43
Tabela 3. Descrição dos itens de 11 a 17 utilizados no Q2.....	44
Tabela 4. Estimção dos <i>scores</i> de dificuldades dos itens do questionário pelo modelo de Rasch dicotômico: antes (D_a) e depois (D_d) da aplicação do MD.....	47
Tabela 5. Scores de habilidades antes (θ_a , no Q1) e depois (θ_d , no Q2) do MD em função da quantidade de respostas positivas aos itens do questionário, calculados pelo Modelo de Rasch.....	51
Tabela 6. Estatísticas descritivas dos dados amostrais para θ_a e θ_d	52
Tabela 7. Resultados percentuais obtidos nos Itens de 11 a 14 e no Item 16 do Q2.....	59

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
2 REFERENCIAL TEÓRICO	14
2.1 Formação inicial x desenvolvimento profissional	14
2.1.1 Histórico e contexto atual do ensino de matemática no Brasil.....	14
2.1.2 A importância da formação continuada do professor de matemática.....	16
2.2 Resolução de problemas como metodologia alternativa de ensino de matemática	21
2.2.1 Conceitos pedagógicos relacionados à resolução de problemas.....	21
2.2.2 Natureza dos problemas matemáticos.....	24
2.2.3 Princípios para a resolução de problemas.....	26
2.3 Equações Literais do 1º grau	30
2.3.1 Conceito, importância e aplicabilidade do tema.....	30
2.3.2 Métodos de solução.....	32
2.4 O Modelo de Rasch	33
2.4.1 A Teoria de Resposta ao Item (TRI) e princípios do Modelo de Rasch.....	33
2.4.2 Modelo de Rasch dicotômico.....	35
3 METODOLOGIA	41
3.1 Tipo de estudo.....	41
3.2 Dados e instrumentos da pesquisa.....	41
3.3 Elaboração dos questionários.....	42
3.4 Estimativas dos parâmetros e cálculo das probabilidades pelo modelo de Rasch.	44
3.5 Análise estatística dos dados.....	45
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES	46
4.1 Dificuldade dos itens.....	46
4.2 Habilidade dos ID θ s.....	51
4.3 Análise dos gráficos P versus - D.....	53
4.4 Avaliação do MD e desempenho dos entrevistados.....	58
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	61
REFERÊNCIAS	62
APÊNDICE A	73

1 INTRODUÇÃO

A busca por metodologias alternativas que tornem mais significativos os processos de ensino e aprendizagem de Matemática são cada vez mais discutidas no Brasil e no mundo. A Matemática ensinada através de Novas Tecnologias, de Jogos e Materiais Concretos, da Interdisciplinaridade, da Etnomatemática e da História da Matemática são algumas das tendências pedagógicas atuais.

Neste contexto, a tendência pedagógica Resolução de Problemas vem se destacando como um tema atual de pesquisa na busca por situações didáticas que desenvolvam no aluno a concepção de um dado conceito matemático, aplicado a situações práticas cotidianas, em detrimento de um ensino tradicional que não alia teoria à prática.

As chamadas Equações Literais (expressões matemáticas que possuem, além da variável em questão, coeficientes representados de forma genérica por letras) se inserem como um subtema central da Resolução de Problemas, uma vez que o professor pode usá-las para discutir e modelar fenômenos e situações em diversas áreas do conhecimento através das relações entre as quantidades envolvidas.

Aliada a essa temática, diversos programas de formação continuada têm sido desenvolvidos para garantir o desenvolvimento profissional do professor de matemática e prepará-lo para lidar com este cenário atual. Assim, cada vez mais são estudadas ferramentas para avaliar processos educativos com vistas à tomada de decisão na busca por um ensino e aprendizagem de maior qualidade. No âmbito da Educação Matemática, modelos probabilísticos da Teoria de Resposta ao Item (TRI), como é o caso dos modelos de Rasch, são cada vez mais utilizados pelos principais pesquisadores da área em todo o mundo para este fim. Esses modelos são aplicados na análise de testes e questionários que são desenvolvidos para avaliar algum desses processos.

Os modelos de Rasch tornam-se interessantes uma vez que permitem diagnósticos individuais em detrimento de análises que levam em conta apenas estatísticas grupais e descritivas dos dados¹. Outro ponto diferencial desses modelos é que a possibilidade de um indivíduo retornar uma resposta positiva a um dado item de um teste em questão é representada numericamente através de uma probabilidade (P), dada em função de parâmetros, como a habilidade deste indivíduo e a dificuldade deste item, colocadas em uma mesma escala métrica de valores.

Como exemplo de aplicação em Educação Matemática, Warwick² utilizou a análise de Rasch para explorar a eficácia de um questionário desenvolvido para auxiliar o pessoal docente universitário na identificação dos alunos ingressantes na universidade, dentre os que mais precisavam de uma tutoria em matemática.

Já Haines e Crouch³ discutiram o desenvolvimento de um teste piloto com potencial aplicação para avaliar o nível de habilidade de alunos universitários para lidar com processos que envolvam modelagem matemática, relacionando os resultados obtidos com o estilo de ensino adotado pelas instituições aos quais pertenciam, aplicando a análise de Rasch.

Edwards e Alcock⁴ usaram Rasch para identificar respostas incomuns de alunos de graduação a itens de um teste de proficiência em sequências numéricas (por exemplo, quando a habilidade de um indivíduo era estimada como alta, mas esse errava as questões consideradas mais fáceis).

Ryan e Williams⁵, através de uma avaliação personalizada, usaram uma análise de forma semelhante, mas com o objetivo de fornecer um *feedback* a professores estagiários formandos.

Gravemeijer e outros autores⁶ usaram o modelo de Rasch para avaliar a evolução da capacidade/habilidade algébrica de alunos de ensino médio ao longo do ano letivo e verificou que o método é eficaz para que se possa detectar mudanças no nível de proficiência dos alunos após as intervenções propostas.

Neste trabalho, o modelo de Rasch foi utilizado para analisar as relações entre formação inicial e proficiência de uma amostra de professores de matemática de escolas de educação básica das cidades de Petrolina-PE, Juazeiro-BA e cidades próximas, participantes do Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio (PAPMEM) para lidar com Equações Literais. Para tanto foi aplicado um questionário com perguntas significativas e independentes umas das outras abordando situações da formação profissional, prática docente e conhecimento do conteúdo. As respostas a este questionário foram analisadas antes e depois da disponibilização de um manual didático (produzido na fase de revisão da literatura) aos participantes da pesquisa, para sanar possíveis dificuldades com o tema. A discussão dos resultados obtidos pôde ser discutida quantitativamente e qualitativamente⁷ com ênfase na melhoria do ensino-aprendizagem de matemática na nossa região.

Com o modelo de Rasch foi possível detectar quais habilidades estão menos desenvolvidas e quais itens se mostraram mais difíceis aos entrevistados.

Os resultados iniciais se mostraram bastante preocupantes uma vez que cerca de 90% dos entrevistados não responderam positivamente aos itens do questionário que discutiam o conhecimento, uso e aplicação das Equações Literais do 1º Grau. Por outro lado, verificou-se que ações simples de capacitação e formação continuada, como foi o caso da aplicação de um manual didático, aumentou em aproximadamente 75% o nível de proficiência dos professores.

A estrutura escrita desse trabalho está dividida em capítulos, do seguinte modo: Capítulo 1, introdução, no Capítulo 2 é apresentada a fundamentação teórica da pesquisa (com o foco em artigos recentes publicados em revistas indexadas na área de Educação Matemática com qualificação CAPES). O Capítulo 3 descreve a metodologia utilizada para se atingir os objetivos propostos. No Capítulo 4 foram apresentados os resultados e discussões da pesquisa, enquanto as considerações finais foram descritas no Capítulo 5.

De forma geral, a pesquisa mostra a importância da formação continuada para o desenvolvimento profissional do professor com vistas à melhoria do ensino e aprendizagem de matemática.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Formação inicial x desenvolvimento profissional

2.1.1 Histórico e contexto atual do ensino de matemática no Brasil

Antes de discutir sobre o contexto atual do ensino da Matemática no Brasil, é importante entender como ocorreu o desenvolvimento dessa ciência no nosso país ao longo da história.

No período Colonial e no Império há pouco a se registrar sobre a implantação da Matemática no sistema educacional brasileiro, uma vez que o ensino era tradicional, modelado no sistema português de educação, onde se dava pouca atenção ao desenvolvimento da pesquisa⁸.

É importante destacar que naquela época não havia universidades nem imprensa no país⁹. Foi apenas com a vinda da família real para o país no ano de 1808 que a imprensa tomou forma no Brasil e vários estabelecimentos culturais foram inaugurados. Neste mesmo ano, logo após a chegada de Dom João VI, foi fundada a primeira escola superior do país, a Escola de Medicina da Bahia¹⁰.

Em 1810, foi criada a Academia Real Militar da Costa no Rio de Janeiro, que veio a se transformar na Escola Central em 1858 e na Escola Politécnica em 1974. Na sequência, foram criadas as faculdades de Direito em Olinda e em São Paulo (pela Lei Imperial de 11 de Agosto de 1827) e várias outras escolas isoladas¹¹.

Com o advento da República, foi notória uma forte influência francesa, particularmente do positivismo (corrente filosófica defensora de que o conhecimento científico é a única forma da razão das coisas acontecerem e existirem).

Pouco se fez em pesquisa no Brasil até o final do século XIX. Em se tratando de pesquisa em Educação Matemática, não foi diferente. Apenas no início do século XX, livre da influência do positivismo de Comte, com Otto de Alencar Silva (primeiro defensor da necessidade de renovação dos estudos matemáticos em nosso país) e com seus sucessores Teodoro Ramos, Amoroso Costa e Lélío Gama (todos da Escola Politécnica do Rio de Janeiro) que a pesquisa no campo da Matemática e de outras ciências exatas começou a se desenvolver no país⁸. No ano de 1928, Teodoro Ramos transferiu-se para a Escola Politécnica de São Paulo, iniciando a fase paulista do desenvolvimento da Matemática¹¹.

No ano de 1933, foi criada a Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo e logo em seguida a Universidade do Distrito Federal, transformada em Universidade do Brasil em 1937. Nessas instituições, iniciou-se a formação dos primeiros pesquisadores modernos de Matemática no Brasil¹².

Após a Segunda Guerra Mundial, houve um grande desenvolvimento no ensino¹³ e na pesquisa científica, com a criação do Conselho Nacional de Pesquisas em 1955 e seu Instituto de Matemática Pura e Aplicada/IMPA e a realização dos Colóquios Brasileiros de Matemática a partir de 1957, em Poços de Caldas. Desde então, a pesquisa Matemática no Brasil vem crescendo consideravelmente e hoje tem destaque internacional. Segundo D'Ambrosio¹⁴, *o movimento da matemática moderna teve enorme importância na identificação de novas lideranças na educação matemática e na aproximação dos pesquisadores com os educadores*.

Nesse contexto, o processo de ensino e aprendizagem da matemática se mostra atualmente como um campo de pesquisa bastante amplo e complexo¹⁵. São inúmeros os agentes e as variáveis envolvidas e suas interdependências.

Como exemplo da complexidade desse tema, podemos destacar ações que objetivam o desenvolvimento do raciocínio lógico, dedutivo e crítico do aluno, a sua inclusão no meio social, a realização de seus projetos pessoais¹⁶ e profissionais e as perspectivas de retorno do conhecimento adquirido por ele à sociedade em forma de melhorias¹⁷.

De forma a organizar e buscar melhorias na prática da Educação Matemática, o estudo desse grande número de agentes e variáveis tem se dividido em especialidades, tais como a formação de professores¹⁸, Filosofia e Psicologia da educação¹⁹, estrutura organizacional da escola, revisão dos currículos e dos conteúdos²⁰, aprendizagem e conhecimento e novas tendências metodológicas de ensino²¹.

Embora este trabalho apresente um estudo mais focado na formação e qualificação profissional de professores de matemática, estas especialidades estão intimamente relacionadas entre si e devem ser levadas em consideração na análise e discussão de resultados das práticas docentes.

Com o intuito de nortear o ensino de Matemática da Educação Básica, em 1997 o MEC por meio da Secretaria de Educação Fundamental, criou os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)¹⁷, um documento que traz orientações fundamentais sobre a importância do estudo dessa área do conhecimento para a formação do aluno em nível fundamental e médio. Conforme os PCN o conhecimento matemático é essencial para o desenvolvimento do

raciocínio lógico e quantitativo, da capacidade de generalizar fórmulas e conceitos, assim como o pensamento crítico do estudante.

Uma característica marcante desse documento é a conscientização de que a educação matemática deve ser vivenciada como um recurso para a formação do cidadão, de modo que ele se torne apto a ingressar no mercado de trabalho, ainda que não seja especificamente na área de Matemática. Contudo, o que se observa na prática é que essa ciência serve de subsídio para a formação, compreensão e desenvolvimento de conceitos em diversas áreas da ciência, como por exemplo, nas Engenharias, nas Ciências da Computação, na Economia, na Contabilidade, na Física, na Química, nas Ciências da Saúde, nas Ciências Sociais, entre outras.

2.1.2 A importância da formação continuada do professor de matemática

Atualmente a pesquisa em educação matemática foca grande parte das suas investigações na formação inicial e continuada de professores²², bem como nas dificuldades encontradas pelos alunos e pelos próprios professores no processo de ensino e aprendizagem²³. Isso faz com que esse cenário seja uma fonte de pesquisa constante na busca de soluções e melhorias na prática docente da matemática em nosso país²².

É notável que, à medida que o discente não consegue entender a matemática que a escola ensina, a probabilidade de reprovação nesta disciplina se torna imensa¹⁹. São também comuns os casos em que o aluno é aprovado, mas não consegue fazer relações ou colocar em prática o conhecimento adquirido em sala de aula²⁴.

Com isso, o objetivo do processo de ensino-aprendizagem não é alcançado: o educando continua sem saber para quê e o porquê da Matemática em sua vida cotidiana e não consegue desenvolver um pensamento crítico e visualizar e (ou) fazer relações com o mundo a sua volta e utilizá-la em prol de melhorias à sociedade²⁵.

São muitos os agentes e as variáveis envolvidas no processo de ensino-aprendizagem da matemática. A relação professor-aluno neste processo e a forma com que a prática em sala de aula deve ocorrer, para que os objetivos sejam alcançados são bem definidos por Fiorentini e Miorim^{26, 27} quando destacam que se deve dar ao aluno o direito de aprender. Esse aprender não pode ser um ato mecânico e recorrente com possibilidade de se fazer algo sem saber e porque se faz²⁸. Muito menos um *õaprenderõ* que se esvazia em brincadeiras²⁹, mas um aprender significativo³⁰ do qual o aluno participe raciocinando, compreendendo, reelaborando

o saber historicamente produzido²² e superando, assim, sua visão ingênua, fragmentada e parcial da realidade.

É de extrema importância destacar que o professor, como um dos principais agentes envolvidos, ao perceber que não está conseguindo alcançar resultados satisfatórios no processo de ensino aprendizagem, pode investigar quais os problemas que culminaram no insucesso (de quem? do aluno? do ensino? do próprio professor?) e repensar o seu fazer pedagógico³¹ para trazer o aprender significativo do aluno à tona em prol da melhoria no ensino.

Um excelente ponto de partida é buscar, aliar novos elementos profissionais³² que possam ser capazes de contribuir para modificar o quadro de defasagem em que a educação brasileira se encontra (mais particularmente, a Educação Matemática)³³.

De acordo com Perez³⁴, o professor não pode se considerar um ser profissionalmente acabado³⁵. A profissão de professor, assim como qualquer outra, requer uma formação continuada³⁶ ao longo de toda a carreira.

O que se quer discutir neste capítulo é que a formação acadêmica inicial em nível de graduação é um suporte fundamental para se buscar mudanças significativas no ensino e aprendizagem de matemática³⁷. Mas é com a formação continuada que o professor pode alcançar um desenvolvimento profissional necessário à interpretação de problemas educacionais e agir sobre eles nos mais diversos aspectos²³. É importante destacar que o desenvolvimento profissional é de inteira responsabilidade do professor e não se faz obrigatório na vida do profissional matemático (como um título de graduado que ele obrigatoriamente deve buscar para lecionar).

Esse autor também chama a atenção quanto à importância dos professores buscarem uma formação continuada e novos conhecimentos pedagógicos para que possam usar ferramentas adequadas para adaptar as mudanças constantes no meio e na sociedade à sala de aula³⁸. É o que se pode chamar explicitamente de desenvolvimento profissional do professor, caracterizado por uma ação dinâmica e evolutiva do papel docente, que engloba processos que melhorem o conhecimento profissional, as habilidades e as atitudes.

Mas essa não é uma tarefa fácil. É muito comum se deparar com professores de matemática se queixando de que não têm motivação, prazer e (ou) conhecimento necessário para aliar a teoria à prática dos conteúdos matemáticos do currículo uma vez que tiveram uma formação inicial que os estimulavam a ensinar a reprodução de operações puramente matemáticas sem fazer interpretações e relações com o mundo real³⁹.

Para tentar mudar essa situação, é imprescindível que o professor atual reconheça que se faz necessário preencher essa lacuna na formação inicial e a trate como o primeiro passo de um longo processo para se buscar o desenvolvimento profissional através de uma formação continuada⁴⁰. Essas atitudes inerentes a um bom professor podem ser alcançadas quando este assume o papel de eterno aprendiz⁴¹.

Por sua vez, Melo⁴² reforça essa perspectiva quando afirma que *o professor deve construir em seus alunos a capacidade de aprender e de relacionar a teoria à prática em cada disciplina do currículo*.

Em contrapartida o que se pergunta é como essa situação será revertida, uma vez que o profissional teve seu curso de licenciatura pautado na desvinculação da teoria à prática? Se desejamos que o docente trabalhe um currículo flexível (mas que teve uma formação inicial inadequada, com pouca participação ativa enquanto estudante), como obter um profissional com esse perfil⁴³? Partindo desse tema de estudo, diversos trabalhos confirmam a realidade dos cursos de licenciatura onde a ênfase é dada à teoria em detrimento da prática, onde se observa um distanciamento evidente entre o currículo e as propostas de práticas docentes^{44, 45}. Estas pesquisas também defendem que as disciplinas de didática da matemática deveriam estar mais interligadas com as diversas outras disciplinas do currículo, tornando-as mais práticas, eficazes e significativas.

Como já dizia D'Ambrosio⁴⁶ em meados da década de 1980, para que essa situação seja modificada se faz necessário uma mudança efetiva e profunda de concepção do sistema educacional brasileiro de forma a rever os conteúdos e as próprias táticas de ensino na busca pela solução de problemas reais.

Imediatamente antes de se buscar uma reformulação no currículo das licenciaturas em nosso país, é notável a necessidade eminente de uma formação continuada para suprir as necessidades da formação básica quanto à junção entre teoria e prática de conteúdos.

Na **Tabela 1**, é mostrada uma tendência comparativa entre as ações do professor que busca apenas a formação básica (inicial) acadêmica e as ações daquele que busca uma formação continuada²². Com essa discussão, é notável verificar que a Educação Matemática não é um modelo estático de educação: é inteiramente dinâmico e passível de mudanças e adaptações ao longo do tempo³⁰.

Como consequência do desenvolvimento profissional, o docente adquire novas e importantes competências inerentes à sua ação reflexiva³² e que farão parte da sua prática docente a partir de então. Essas competências estão esquematizadas na **Fig. 1**.

A perspectiva é de que o Ensino da Matemática seja cada vez mais trabalhado como um processo de pesquisa educativa, estimulando os alunos a conhecer pesquisando, experimentando⁴⁷. Uma proposta de intervenção no processo de ensino-aprendizagem tradicional, baseada em procedimentos mecânicos³⁰, deve vir intimamente ligada a significados que façam com que o aluno associe o conteúdo trabalhado ao reconhecimento de problemas reais⁴⁸ e à busca e seleção de informações com ênfase na tomada de decisões. Estas competências resumem os objetivos que a Educação Matemática quer alcançar na sociedade²³.

A Matemática em análise pode trazer à tona a reflexão e a crítica dos alunos sobre o quê e o porquê de estarem estudando determinado conteúdo²⁵. Isso representaria uma oportunidade de se fazer uma leitura consciente do meio que os rodeia, além de ajudar a desmistificar o conceito de que a Matemática é uma disciplina apenas conteudista³⁸ e que enfatiza a memorização de fórmulas e padrões teóricos, sem aplicações. No entanto é importante frisar que muitos profissionais não buscam capacitações por meio de cursos de formação continuada, porque não recebem incentivos governamentais, e seus baixos salários são insuficientes para custear despesas dessa natureza.

Tabela 1. Quadro comparativo profissional: Formação Inicial x Desenvolvimento Profissional⁴⁹.

Formação Inicial	Desenvolvimento Profissional
Frequenta cursos.	Frequenta cursos, mas também participa de projetos, trocas de experiências, leituras, reflexões...
O professor é imaturo, sem experiência ou tem pouca experiência.	Amadurecido, já vivenciou experiências dentro e fora da escola.
Ocorre de fora para dentro cabendo ao professor assimilar os conhecimentos e a informação que lhe são transmitidos.	Temos o movimento de dentro para fora, cabendo ao professor as decisões fundamentais relativamente às questões que quer considerar, aos projetos que quer empreender e ao modo como os quer executar.
Atende-se àquilo em que o professor é carente (em termos de habilidades).	Dá-se especial atenção às suas potencialidades (desenvolve habilidades já existentes).
Tende a ser vista de modo compartimentado, por assuntos ou por disciplinas e valoriza a promoção da individualidade de cada professor.	Implica o professor como um todo nos seus aspectos cognitivos, afetivos e relacionais.
Parte da teoria.	Considera a teoria e a prática interligadas.
Aplica receitas em situações conhecidas e predeterminadas.	Desempenha um papel exigente e complexo mobilizando saberes e competências de diversos domínios.
O professor é visto como objeto.	O professor deixa de ser objeto para passar a ser sujeito da formação.

Assim, a área de Educação Matemática caracteriza-se pelas atividades fundamentalmente plurais e interdisciplinares⁵⁰ cujos objetivos são desenvolver, avaliar e noticiar métodos inovadores para o ensino da Matemática, bem como, elaborar e programar mudanças curriculares⁵¹. Além disso, a implantação de novas tendências de Educação Matemática nas escolas contribui para a formação inicial e continuada de professores, auxiliando os docentes no desenvolvimento das aulas⁵².



Figura 1. Representação esquemática das competências adquiridas pelo professor quando este se desenvolve profissionalmente⁴⁹.

Entre as diversas tendências metodológicas em Educação Matemática, atualmente se destacam a Resolução de Problemas⁴⁷, a Modelagem Matemática⁵³, o uso de Materiais Concretos⁵⁴, Jogos Matemáticos⁵⁵, a História da Matemática⁵⁴, a Etnomatemática^{14, 56}, as Novas Tecnologias⁵⁷ e a Interdisciplinaridade⁵⁰. Todas essas tendências são importantes para enriquecer o método de ensino do professor e o aprendizado do aluno em meio aos desafios impostos pela matemática em virtude dos seus cálculos e aplicações.

Todas as tendências matemáticas juntas formam um conjunto de recursos metodológicos, criados, desenvolvidos e adaptados por pesquisadores da área para facilitar o processo de ensino-aprendizagem dessa disciplina que é tão questionada pelos alunos²⁵. Quando o educador utiliza algumas das novas tendências do ensino da matemática como técnica de ensino, consegue dinamizar as aulas, tornando-as mais prazerosas¹⁵, tanto no que se

refere à aprendizagem dos alunos, quanto na forma de ensinar do professor. Quando o aluno consegue entender o que está sendo explicado, a relação professor-aluno melhora²⁹.

Essa evolução no ensino de matemática, de forma prática, acontece a partir do momento em que o professor se adapta⁵⁸ às demandas atuais do processo de ensino e aprendizagem no seu próprio ambiente de trabalho. O professor necessita estar disponível a buscar novos conhecimentos⁵⁹, pesquisar e propor mudanças de acordo com as necessidades locais⁶⁰.

Segundo Maluf⁶¹, os docentes estão percebendo que aos poucos o ensino tradicional²³ de matemática não supre as necessidades de aprendizagem do aluno, diante de um mercado de trabalho que requer indivíduos cada vez mais críticos¹⁷. Com isso, buscam se informar e enriquecer suas experiências para entender novas metodologias e como utilizá-las para auxiliar na construção do aprendizado.

Quem trabalha na educação básica deve saber que se pode sempre desenvolver a motricidade, a atenção⁶² e a imaginação de um aluno quando a aula se torna atrativa.

2.2 Resolução de problemas como metodologia alternativa de ensino de matemática

2.2.1 Conceitos pedagógicos relacionados à Resolução de Problemas

A Resolução de Problemas é um tema atual⁶³ de estudo entre os pesquisadores em educação, mais precisamente no meio acadêmico da Educação Matemática.

Pode-se dizer que o real motivo de se aprender Matemática é que essa ação dará subsídios para se resolverem diversos tipos de problemas em inúmeras áreas da ciência⁶⁴.

Tentar resolver problemas pode despertar a curiosidade⁶⁵ e o gosto pela matemática⁶⁶ além de exercitar a mente e o sentimento de prazer e dever cumprido pela descoberta. Devido à sua notável importância, a Resolução de Problemas se tornou uma tendência pedagógica, ou metodologia alternativa de ensino usual no ensino e no aprendizado de Matemática⁶⁷.

O uso da Resolução de Problemas como tendência pedagógica surgiu com George Polya⁶⁸ com a publicação do livro *How to solve it* em 1945 (lançado no Brasil em 1978 com a tradução *A arte de resolver problemas*). Sua influência positiva para o ensino de matemática levou à disseminação dessa proposta pedagógica nos Estados Unidos na década de 1960 e no restante do mundo a partir de 1970⁶⁹.

A sua principal defesa era que a Resolução de Problemas poderia ser interpretada como um processo organizado e deveria seguir determinados passos progressivos, a saber: compreender, planejar, executar e revisar.

A partir da década de 1980, essa metodologia ganhou força e conquistou outros pesquisadores pelo mundo, como Alan Schoenfeld, Frank Lester e Charles Randall⁷⁰, que ajudaram a disseminar a importância dessa tendência para o ensino de matemática.

A partir de então, se iniciou a busca por situações didáticas que desenvolvessem no aluno a concepção de um dado conceito matemático antes mesmo do conteúdo ser apresentado formalmente. Em outras palavras, metodologias alternativas de ensino, como é o caso do uso da Resolução de Problemas, devem mostrar ferramentas que façam com que a construção do conhecimento possa ser desenvolvida pela compreensão do próprio estudante⁷¹.

É necessário destacar aqui que a compreensão deve ser a principal meta a ser atingida com o uso de metodologias alternativas de ensino. À medida que a compreensão do aluno se aprofunda, a capacidade de identificar e resolver outros diversos tipos de problemas usando matemática aumenta significativamente⁷².

Muitas vezes o que falta para alcançar esse objetivo é justamente aplicar situações práticas cotidianas que tornem o ensino mais significativo⁴⁸. O ensino interdisciplinar é outro grande desafio para todos os agentes envolvidos no processo de ensino-aprendizagem de matemática⁷³. O professor precisa ter em mente que problemas que envolvam aplicações ao dia-a-dia podem significar um grande passo para motivar o aluno na busca por soluções.

Mas a execução do processo não se dá de forma tão simples como parece ser. Frequentemente, muitos obstáculos⁷⁴ aparecem no desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem de matemática. As dificuldades de interpretação de texto⁷⁵, de localização de dados indispensáveis à resolução do problema e de buscar estratégias eficazes de resolução são alguns deles.

É muito comum o aluno assimilar os algoritmos (contínhas) matemáticos necessários para se realizar, por exemplo, uma soma, uma subtração, uma multiplicação ou uma divisão de forma tradicional⁷¹ e não conseguir solucionar problemas que envolvam um ou mais desses algoritmos. Quando o problema matemático é colocado de forma contextualizada⁷⁶ o que parece é que o estudante não consegue modelar, associar a situação usando conceitos que já aprendeu.

É muito difícil fazer com que o aluno se torne independente, no sentido de tentar e poder solucionar um problema e não ficar preso aos conceitos apresentados pelo professor⁷⁶.

Nessas condições, o papel do professor de Matemática⁷⁷ atual não é apenas a apresentação de conceitos em sala de aula. Deparando-se com esse tipo de problema, o professor deve buscar situações didáticas que facilitem a interpretação⁶⁵, nesse contexto, a formação continuada⁶⁵ se mostra extremamente eficiente, no sentido de que prepara o profissional para lidar com essas situações. Entretanto o professor precisa de apoio para concretização dessa tarefa, como por exemplo, condições de trabalho favoráveis, melhor remuneração, mais valorização, dentre outros.

Para sistematizar a Resolução de Problemas como significativa metodologia alternativa de ensino, deve-se saber que essa proposta se baseia na aplicação da Matemática ao mundo real⁷⁹. Nesta concepção de ensino, o educador matemático deve unir teoria e prática de diversas áreas emergentes do conhecimento⁷⁸, equacionar e solucionar problemas que vão além do conhecimento matemático.

Por isso, a necessidade notável do docente de pesquisar constantemente sob relações matemáticas que explicam o mundo em diversas áreas da ciência. O professor deve se comportar como um profissional dinâmico que tanto domina o conteúdo matemático, quanto ler e interpreta textos muito bem, adapta e cria situações para aplicação direta a seus alunos baseado nas experiências adquiridas em pesquisas e cursos⁸⁰ em detrimento de um profissional estático.

É importante deixar claro que na metodologia Resolução de Problemas não se pode interpretar que o ensino de Matemática se dá apenas em função da matemática necessária⁸¹ para solucionar um dado problema.

Como descrito anteriormente, a força da Resolução de Problemas está no fato de que o professor necessitará de um amplo repertório de conhecimentos⁸², sem se restringir às particularidades técnicas e aos conceitos matemáticos. Essa prática enriquece as possibilidades de crescimento profissional e intelectual do professor de matemática. Um primeiro passo, e não mais importante que a própria resolução do problema, é saber estabelecer e apresentar as relações necessárias⁸³ a um bom entendimento da situação-problema.

No entanto, a Resolução de Problemas não deve ser interpretada apenas como forma de estimar se os alunos estão dominando uma técnica ou um conceito matemático. Os alunos também sempre enfrentam e enfrentarão problemas reais em suas vidas⁸⁴, uns conhecidos, outros não. Por isso deve-se focar também nessa abordagem e prepará-los para situações reais do dia-a-dia que possam se deparar⁸³.

A escola que não planeja preparar seus alunos para a resolução de problemas reais em detrimento de um ensino puramente matemático pode privá-los de exercitar o pensamento matemático e conseqüentemente do exercício de uma cidadania cognitiva, se referindo ao papel da educação como servidora da sociedade no sentido moral, crítico e cognitivo⁸⁵. Nesse sentido, pode-se afirmar que o real sentido da proposta é oferecer uma matemática para todos⁸⁶. Isso também não significa que todos irão aprender matemática da mesma forma. Ou que se ensinará à maioria e se nivelará por baixo. O que se espera realmente é que todos tenham a possibilidade de vivenciar situações matemáticas na escola que possam ser aplicáveis na vida cotidiana⁸⁷.

Quando os problemas são trabalhados de forma puramente matemática, trabalhando apenas os procedimentos padrões, com exercícios repetitivos, previstos por alunos e pelo professor, não provocam no aluno o interesse nem a capacidade pela compreensão⁸⁸.

Esses tipos de problemas matemáticos são conhecidos como problemas puramente matemáticos ou sem contextualização e serão discutidos na próxima seção em comparação com a forma correta de se trabalhar com a Resolução de Problemas: é o que será discutido a seguir como problemas contextualizados⁸⁹.

2.2.2 Natureza dos problemas matemáticos

Os problemas matemáticos podem ser apresentados de forma puramente matemática ou de forma contextualizada⁷³. Como discutido anteriormente, tradicionalmente os problemas matemáticos são apresentados de forma não contextualizada⁷¹ quando não se pode tirar nenhum significado prático ou real na armação, no desenvolvimento, na manipulação e (ou) na solução do problema em questão.

Nesses tipos de problemas, os alunos são colocados para seguir regras e operações numéricas e não há uma preocupação do professor em mostrar-lhes a inserção desses padrões numéricos em um contexto de aplicação. Os estudantes resolvem os exercícios com base no que aprenderam de forma mecânica sem entender direito o que está, porque e para que está fazendo⁹⁰. O mesmo problema seria muito mais significativo para o aprendizado do aluno se fosse apresentado de forma contextualizada⁷¹.

É bem comum nesses casos que o aluno saiba resolver uma questão (até mesmo em pouco tempo, devido à habilidade com matemática) sem que se envolva ou a interprete corretamente.

Na maioria das vezes, os problemas são introduzidos após a abordagem de um dado conteúdo ou regra matemática e todos os dados necessários para a solução estão explícitos no enunciado⁶⁶. Além disso, as soluções são bastante simples e fora da realidade. Nesses casos, há sempre procedimentos padrões/usuais para se obter uma resposta que já está pronta⁷⁷ e esperada pelo professor que por sua vez se adequa a situação. Não se busca interpretações nas entrelinhas do problema.

O desenvolvimento de um trabalho continuado com base em problemas puramente matemáticos pode fazer com que o aluno adquira uma relação de dependência e memorização³⁸ de conhecimentos.

Por outro lado, existem os problemas ditos contextualizados⁴⁷. Nesse novo contexto, os problemas são trabalhados de forma diferente do tradicional⁹⁰. As questões podem ser desenvolvidas pelo professor (com experiência suficiente para tal) e colocadas em discussão com os alunos para desmitificar o usual.

Tais questões podem vir em pequenos enunciados (dando ao aluno a sensação de que são de fácil resolução) com o objetivo de fazer com que o estudante busque entender e interpretar a solução em outras fontes, em outras áreas do conhecimento⁸⁴ utilizando uma análise mais detalhada. Problemas dessa natureza são exemplos de uma matemática discutida de forma significativa aos alunos, além de fazê-los pensar criticamente sobre as informações que cada situação-problema pode trazer de forma implícita, com o apoio do professor.

Além do mais, esse tipo de problema pode ser trabalhado em grupo⁹¹, minimizando o receio de não conseguir solucionar o que foi proposto, aumentando a possibilidade de construção de alternativas de resolução adequadas e de conflitos sócio-cognitivos (conflitos que surgem quando dois ou mais indivíduos conflitam suas diferentes percepções sobre algo)⁸⁸.

No contexto da Resolução de Problemas, a meta almejada com a solução do conflito de idéias⁹² é conduzir os alunos ao conhecimento progressivo e comum da situação em questão para que consigam, a partir de certo ponto, seguir em frente com seus próprios meios^{93, 94}. Ou seja, o papel do professor é incitar o aluno⁹² a tentar resolver os problemas propostos.

De forma resumida, um problema contextualizado tem o objetivo de fazer com que o aluno desenvolva a capacidade de tentar entender, interpretar, buscar, supor, testar e provar situações reais⁹⁵ através de relações matemáticas equivalentes que modelam determinada

situação real⁹⁶. Essa é uma alternativa totalmente oposta às apresentadas pelos problemas puramente matemáticos.

Nos problemas contextualizados, o discente é convidado a superar obstáculos⁷⁴ próprios de um problema real enquanto nos fechados o aluno é um mero reproduzidor de uma coleção de operações matemáticas⁹⁷.

No primeiro caso, o docente não possui os recursos pedagógicos necessários ao domínio da situação, já no segundo o professor se vê na necessidade de buscar novos conhecimentos para se familiarizar com o problema em questão e com a nova forma de ensino⁹³.

Naturalmente, o professor enriquece o seu lado intelectual e profissional ao mesmo tempo em que torna significativo o próprio processo de ensino-aprendizagem⁹⁶.

O que se observa é que o senso comum entre os pesquisadores da área diz que se fazem necessários quatro tipos de conhecimento para que se tenha sucesso na resolução de um problema:

(i) habilidade nos procedimentos e temas matemáticos em questão⁹³;

(ii) métodos, estratégias de solução⁹² como, por exemplo: esboçar esquemas;

(iii) capacidade de interpretar o problema em questão na medida em que a solução vai sendo desenvolvida, com conteúdos matemáticos vistos e saber relacionar as variáveis envolvidas;

(iv) Testar a solução proposta, verificando possibilidades de soluções alternativas e (ou) um melhor detalhamento da que foi proposta⁹⁴.

Diante da importância dessa natureza de problema matemático para o sucesso da intervenção com Resolução de Problemas, a seguir são apresentadas algumas técnicas resumidas em etapas que podem ser adotadas pelos professores (e que pode ser estendido aos alunos) no sentido de orientar os discentes quanto ao processo de análise, síntese e formalidade da busca por soluções contextualizadas⁸¹.

2.2.3 Princípios para a resolução de problemas

Antes de qualquer coisa, é imprescindível ler o problema⁹² e se certificar de que o entendeu. Tentar se perguntar: em qual contexto⁸¹ está inserido o problema apresentado? Qual é a variável, incógnita em questão? Quais são os dados e informações explícitos e implícitos no problema? Quais as relações⁸³ que se pode fazer entre a incógnita e os dados apresentados? Quais são as quantidades dadas e pedidas e quais as relações entre elas?

As respostas a essas perguntas podem ser colocadas como cabeçalho na tentativa de solução do problema (no papel ou no quadro) e pode ser identificada como a primeira etapa da resolução de um problema, que é o entendimento da questão. Outra tarefa desta primeira etapa, definidas as variáveis em questão, é identificá-las simbolicamente⁹⁸, geralmente utilizando letras do alfabeto (a, b, c, ... , x, y, z). Muitas vezes, para identificar⁹⁸ facilmente a incógnita (ou incógnitas), à medida que a solução seja desenvolvida, é comum representá-la(s) por sua(s) letra(s) inicial(is), como por exemplo, usar a letra x para representar a variável x e a letra y para representar a variável y em alguma relação matemática que envolva estas duas medidas. Em algumas situações problema, as letras podem representar várias incógnitas em questão.

Em outros casos, uma letra representa⁹⁹ a única incógnita do problema, enquanto outras letras podem ser usadas apenas como representantes de medidas já conhecidas. Essas letras não são substituídas pelos valores inicialmente propostos para que se possa ter uma idéia da generalização¹⁰⁰ da situação e como a variável desconhecida se relaciona com as variáveis conhecidas⁹⁹. Dessa forma, interpretações mais gerais sobre o problema podem ser tomadas. É o que acontece no caso das equações chamadas de Literais.

Após essa identificação, pode-se partir para uma segunda etapa, caracterizada pelo momento onde se busca determinar as analogias¹⁰¹ entre o que é pedido e o que foi dado no problema. É o que se pode chamar de planejamento prévio para a solução. Se após uma leitura inicial for verificado que a execução dessa etapa não será realizada rapidamente (por algum motivo, desconhecimento do contexto do problema ou até mesmo do conteúdo em questão), algumas subetapas^{94, 102} podem ser anexadas a essa etapa com o objetivo de sanar a dificuldade na interpretação do problema, tais como:

i) ler e pesquisar conteúdos relacionados ao tema e que envolvam as variáveis em questão (dadas e pedidas) e tentar verificar se as relações aparecem;

ii) utilizar-se do conhecimento prévio⁹⁶ sobre os dados apresentados e procurar relacionar o problema em questão com problemas semelhantes ou afins (ou mais simples) que se tem conhecimento. Os meios, ferramentas, relações que se utilizou para resolver o problema semelhante podem servir como base¹⁰³ para a solução do problema em questão;

iii) procurar detectar padrões (não como meio para resolução, mas como finalidade). Problemas matemáticos contextualizados⁹³ geralmente são solucionados observando-se, analisando qual o modelo que rege as ações à medida que estas são executadas. Por exemplo, a expressão que define a soma dos ângulos internos de um polígono regular de n lados pode

ser demonstrada a partir dessa idéia. Pode-se partir de casos particulares para detectar o caso geral. É o que se chama na matemática de Princípio da Indução Finita ou Indução Matemática e é usado para provar afirmações que são dadas em função de números naturais n^{104} . A depender do problema, se pode detectar padrões numéricos e (ou) algébricos e (ou) geométricos¹⁰⁴ que regem determinada situação real;

Muitas vezes, os dados necessários para resolver um problema estão implícitos (õescondidos) ou não constam no enunciado e requerem que o leitor conheça/domine/busque outros conteúdos para identificá-lo e assim consiga fazer as relações necessárias^{94, 102}. Por exemplo, o volume (V) de uma caixa d'água retangular (forma geométrica de um paralelepípedo retângulo) sem tampa é dado em função de três variáveis, a saber, o comprimento (c), a largura (l) e a altura (comumente representada pela letra h). Em linguagem matemática: $V=f(c,l,h)= c.l.h$.

Se o problema pede para que se reescreva o volume do reservatório em função apenas de duas das três variáveis (por exemplo, em função da largura e da altura), dado que a área superficial de material utilizado para construí-lo é de 26 m^2 , é necessário que, primeiro, se saiba que o reservatório dado é representado por uma forma geométrica espacial conhecida.

A representação geométrica⁹⁹ da situação é sempre bem-vinda; segundo, saber o que é uma área superficial de um sólido geométrico espacial; terceiro, se conheça a regra matemática que define o cálculo da área superficial dessa figura geométrica. Nesse caso, uma planificação (representação esquemática) (**Fig. 2**) da figura pode facilitar o cálculo:

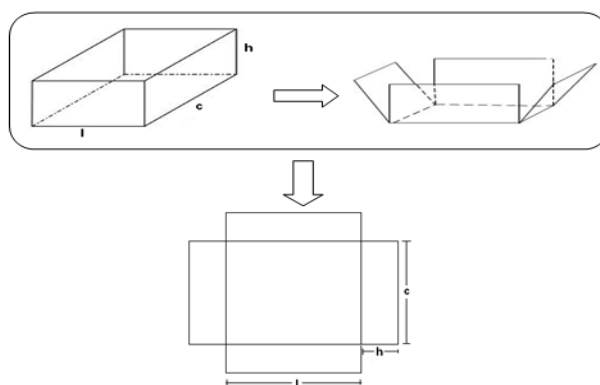


Figura 2. Representação planificada das faces do reservatório.

$$26 = 2.(l.h) + 2.(c.h) + l.c = 2lh + 2ch + lc \quad (\text{Eq. 1})$$

Área superficial do reservatório
Soma das áreas das faces do reservatório

Observe que se pode fazer uma relação entre a área superficial e o volume $V = c.l.h$ do reservatório, visto que tanto a área quanto o volume são variáveis dependentes das mesmas variáveis independentes (comprimento, largura e altura). Isolando o comprimento (c) em função das outras variáveis na Equação 1 obtemos:

$$\begin{aligned} 2lh + 2ch + lc &= 26 \\ 2lh + c(2h + l) &= 26 \\ c &= (26 - 2lh)/(2h + l) \end{aligned}$$

(Eq. 2)

Agora se substituirmos o valor de c obtido na Equação 2 na fórmula do volume, para transformarmos $V(c,l,h)$ em uma função apenas de duas variáveis, $V(l, h)$.

De qualquer forma, o que se nota é que objetivos menores⁷⁹ (específicos) e progressivos devem ser traçados para conseguir alcançar o objetivo geral (solução do problema). À medida que as submetas são alcançadas, o problema vai sendo solucionado.

Após essas duas primeiras etapas trabalhadas detalhadamente, uma terceira etapa pode ser entendida como definir um planejamento adequado para solucionar o problema. Uma sugestão é descrevê-lo (escrever, colocar no papel o passo a passo utilizado) junto à resolução, o mais detalhado possível^{94, 102}. O objetivo dessa etapa é que as interpretações e passagens matemáticas utilizadas na resolução possam ser lembradas, editadas e usadas em outro momento pelo próprio autor ou até mesmo por outros leitores interessados.

A quarta e última etapa que pode ser utilizada para se resolver uma situação-problema é a revisão de todas as etapas que levaram à solução em busca de erros, redundâncias, melhorias no formalismo matemático e no planejamento⁹⁴. Outro motivo para se revisar o que foi feito é a possibilidade de se familiarizar com o assunto prático em questão e com o método de solução que poderá ser útil em outros problemas relacionados.

2.3 Equações Literais do 1º Grau

2.3.1 Conceito, importância e aplicabilidade do tema

Equações literais de uma variável real de grau um (ou simplesmente, Equações Literais do 1º Grau) são as equações (expressões ou fórmulas) do 1º grau que possuem, além da variável (ou incógnita) em questão, coeficientes¹⁰⁵ (ou parâmetros) representados de forma genérica¹⁰⁶ por letras em um dos membros ou em ambos, e, por isso recebem o nome de Literais. Esse processo de resolução de uma dada fórmula para uma dada letra que representa a variável, considerando as outras letras como representantes de constantes (valores conhecidos) é chamado de resolução de Equações Literais¹⁰⁵.

Em uma linguagem mais simbólica, elas podem ser entendidas também como receitas matemáticas para se encontrar o valor numérico de uma variável em função de quantidade(s) dada(s). A letra que representa a variável em questão quase sempre significa algum tipo de quantidade do mundo real¹⁰⁷ tais como volume, temperatura, pressão, quantidade de juros, um investimento ganho, etc. Esta variável possui uma relação estabelecida com outras quantidades que também são atribuídas letras (ou nomes) na receita.

Se os valores de todas as quantidades envolvidas forem conhecidos, exceto a de uma delas, podemos lançar esses valores na equação (que também pode ser entendida como a lei de formação do problema) e encontrar o valor da quantidade indeterminada em função das quantidades dadas¹⁰⁶.

Essas equações têm sua grande importância quando usadas para generalizar¹⁰⁰ e modelar matematicamente¹⁰⁷ diversos fenômenos e situações em todas as áreas do conhecimento. Uma vez modelado, as informações sobre um dado fenômeno podem ser obtidas através da solução da equação que o representa. Além disso, os alunos podem checar diversas informações que estão implícitas na situação pela análise das relações entre as quantidades envolvidas e entender completamente o problema de forma lógica e crítica, o que seria difícil de obter apenas com quantidades dadas numericamente.

Dessa forma, as Equações Literais podem ser entendidas como fórmulas-padrão que explicam algo e caracterizam algum fenômeno. Por exemplo, em geometria, se quisermos calcular o perímetro (P) de um quadrado em função dos seus lados (l) usamos a expressão

literal $P=4l$. O importante de se mencionar aqui é que muitas vezes, na prática, estamos preocupados em saber a dimensão do lado l , dado um valor de P .

Por exemplo, quando se quer construir um terreno em forma de um quadrado com maior lado possível respeitando os recursos financeiros disponíveis (geralmente os recursos financeiros são escassos) para cercar/murar todo o terreno é óbvio que se deve verificar o preço do material por unidade de perímetro e determinar qual o maior perímetro que se pode obter com a quantia em dinheiro que se tem em mãos. Com o valor de P definido pode-se calcular o valor de l que resolve o problema. Só que para tal, teríamos antes que explicitar l em função de P , pela expressão $l=P/4$.

Daí a flexibilidade e a eficácia de se trabalhar com Equações Literais, visto que sempre podemos escolher uma das letras que representam as grandezas envolvidas como variável e as outras restantes como constantes a determinar (valores que serão dados para encontrarmos o valor numérico da variável em questão) para se realizar análises pontuais.

Por exemplo, a equação $s = s_0 + vt$ ^{108,109} modela a situação que descreve a posição final de um móvel em função do tempo em movimento uniforme (MU)¹¹⁰. Nesse caso, a letra s representa a posição final do móvel, s_0 representa a posição inicial, v representa a velocidade (constante) do móvel durante o percurso e t o tempo¹¹¹ necessário para o móvel percorrer a distância de s_0 a s . Observe que nesse caso, a posição inicial e a velocidade constante do móvel devem ser quantidades conhecidas no problema. Com algumas manipulações algébricas podemos explicitar o valor de t em função das outras grandezas, e assim, teremos $t = \frac{s - s_0}{v}$.

Com a equação nesse novo formato, além de calcularmos o tempo necessário para se percorrer determinado deslocamento ou trajetória, podemos afirmar que nessa lei, a variável t é diretamente proporcional à variação de espaço $(s - s_0)$ percorrido, isto é, quanto maior o deslocamento, maior o tempo gasto para percorrê-lo. Além do mais, podemos observar que o tempo é inversamente proporcional a v , isto é, quanto maior a velocidade menor o tempo gasto pelo móvel para realizar o deslocamento de s_0 a s .

Tanto no exemplo do cálculo do lado do quadrado, quanto no cálculo do tempo neste último exemplo, podemos perceber as informações que estão implícitas no problema e que podem ser colocadas à tona pelo professor em sala de aula no momento da explicação.

Pode-se notar também que essas conclusões e interpretações só foram possíveis a partir do momento em que se conseguiu explicitar uma variável em função das outras. O

aluno também só chegará a essas conclusões por si só a partir do momento em que aprender os procedimentos necessários para isolar a variável em questão. Por isso, não menos importante do que o professor conceituar uma Equação Literal e fazer com que o estudante entenda o problema é fazer com que ele adquira a capacidade de buscar os passos (meios) para isolar a variável em questão e solucionar o problema.

Nesse sentido, podem aparecer no decorrer da resolução, situações que necessitem, por exemplo, de um balanceamento da equação, do uso da propriedade distributiva, das operações com frações, entre outros algebrismos matemáticos. Na próxima seção serão discutidas algumas etapas que podem ser utilizadas pelos docentes (e posteriormente pelos alunos) para solucionar problemas envolvendo Equações Literais do 1º Grau.

2.3.2 Métodos de solução

Geralmente, pode-se solucionar uma situação problema envolvendo uma Equação Literal do 1º Grau utilizando-se cinco passos^{76, 94}(não necessariamente todos, nem necessariamente nessa ordem), a saber:

i) Ler o problema atentamente. Rer o problema para identificar o que ele pede para ser solucionado¹¹². Identificar a variável (ou variáveis) em questão;

ii) Escolher uma letra para representar a variável desconhecida no problema (em geral, usa-se a letra x);

iii) Traduzir o texto do problema para a linguagem algébrica em forma de equação matemática equivalente. Em qualquer interpretação do problema que remeta/envolva a variável em questão, deve-se ter o cuidado de sempre usar a mesma letra para representar a mesma variável;

iv) Resolver a questão utilizando as regras adequadas e encontrar a solução pedida.

iv-1: Observar se na equação existem expressões que estão entre parênteses. Se existirem, desmembrá-las utilizando a propriedade distributiva da multiplicação;

iv-2: Verificar se a equação envolve frações. Neste caso, a orientação é determinar o mínimo múltiplo comum (mmc) entre todos os denominadores de todos os termos (em ambos os membros da equação) e usar operações com frações para reescrever a equação sem denominadores. Neste passo, a orientação iv-1 pode ser requisitada novamente;

iv-3: Passar todos os termos que envolvam a incógnita em questão para um dos lados (membros) da igualdade e os que não a contêm, para o outro lado. Para isso, aplicar a regra da

adição: os termos que mudam de membro mudam também de operação (mudam o sinal) no novo membro para que a equação permaneça balanceada e inalterada;

iv-4: Efetuar cálculos com o objetivo de simplificar as expressões resultantes em ambos os membros da equação;

iv-5: Determinar o valor da incógnita aplicando a propriedade da divisão no conjunto dos números reais: passe o valor que multiplica a incógnita em um dos membros da equação como divisor do outro membro da equação;

iv-6: Simplificar a expressão encontrada (quando possível) e checar as relações entre as quantidades envolvidas;

v) Revisar a solução encontrada e confirmar a resposta.

É importante destacar que o professor deve ter total autonomia para escolher os passos que julgar convenientes, a fim de alcançar em cada caso, a solução de forma com que os alunos a compreendam.

2.4 O Modelo de Rasch

2.4.1 A Teoria de Resposta ao Item e princípios do modelo de Rasch

A Teoria de Resposta ao Item (TRI)¹¹³ é um conjunto de modelos estatísticos usada em testes de conhecimento e amplamente empregada e aceita em avaliações educacionais em todo o mundo¹¹⁴.

A TRI surgiu da necessidade de superar as restrições da Teoria Clássica dos Testes¹¹³ onde a exposição de resultados se baseia somente por meio de percentuais de acertos de um teste e as análises e interpretações estão sempre associadas ao todo da prova e ao grupo de indivíduos envolvidos (interpretações globais). A TRI muda o foco das atenções, analisando cada item do teste e cada indivíduo participante¹¹⁵.

No Brasil o seu uso foi introduzido na década de 1990 no Sistema de Avaliação do Ensino Básico (SAEB) e em seguida no Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos (ENCCEJA) em 2002¹¹⁴.

Mais recentemente, a TRI tem sido utilizada no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) que substituiu o processo seletivo vestibular como critério para admissão de alunos nas universidades federais e o interesse pelo seu uso em avaliações educacionais específicas vem crescendo entre educadores e gestores em todo o país.

O princípio fundamental dos modelos da TRI é o de que quando uma pessoa é colocada a responder um item de um teste ou questionário, ela tem uma dada probabilidade de respondê-lo corretamente/positivamente (o que seria ideal responder, de acordo com os objetivos da pesquisa).

O modelo de Rasch dicotômico (utilizado na pesquisa)^{116, 117} é um dos modelos mais utilizados e aceitos na TRI. As vantagens de se utilizar este modelo probabilístico estão no fato dele apresentar um número mínimo de parâmetros e em uma mesma escala métrica de valores, facilmente estimados e interpretados. Além disso, o modelo de Rasch é bem aceito na literatura e amplamente aplicado em testes educacionais e psicológicos, com uma teoria bem desenvolvida. Estatísticas da aplicação do modelo aos dados experimentais informam possíveis problemas que podem ser facilmente resolvidos com o aumento do número de indivíduos analisados ou alterando a descrição, ou acrescentando itens ao questionário inicialmente proposto.

Sua principal característica está no fato de que a probabilidade de um indivíduo responder positivamente a um item específico de um teste/questionário é função tanto da dificuldade do item quanto da habilidade ou capacidade do indivíduo em respondê-lo, diferente de outros modelos na TRI, que levam em conta outros parâmetros como, por exemplo, a possibilidade de uma pessoa responder o item ao acaso¹¹⁶.

Dessa forma, é possível detectar os itens com maior ou menor probabilidade de receberem respostas positivas por um grupo de indivíduos e detectar individualmente os membros com maior ou menor habilidade de responder positivamente a um item em questão.

Neste contexto, quanto maior a habilidade de um indivíduo, maior é a sua probabilidade de responder aos itens com dificuldades específicas. Em outras palavras, além de retornar informações sobre o grupo de indivíduos em estudo, o modelo garante a possibilidade direta de se fazer análises qualitativas e propor intervenções pontuais (individuais) baseadas nos resultados quantitativos obtidos em detrimento de um estudo apenas descritivo que restringe a discussão dos resultados apenas para uma análise de grupo¹¹⁸.

No modelo de Rasch, a descrição e a quantidade dos itens de um teste são definidas de forma semi-empírica (inicialmente determinados pelo próprio pesquisador, a partir de um estudo prévio ou pela própria experiência do pesquisador no assunto) a partir dos objetivos que se deseja alcançar⁶.

Ao modelar as respostas dos indivíduos aos itens através do modelo de Rasch, é possível confirmar através de parâmetros estatísticos do próprio modelo (como o Índice de Separação ou Confiabilidade dos Itens e o Índice de Separação ou Confiabilidade das Habilidades das Pessoas entrevistadas) se a quantidade de itens elaborados foi suficiente para se ter um questionário com itens em nível crescente de dificuldade (prerrogativa para aplicação do modelo de Rasch) ou discriminantes, desde itens mais fáceis a itens mais difíceis passando por itens de dificuldade intermediária.

Quando esses parâmetros não retornam resultados satisfatórios, geralmente o pesquisador deve reiniciar o processo de análise reavaliando o questionário elaborado inicialmente (aumentando o número de itens e (ou) editando-os) ou aumentando o número de indivíduos participantes com o objetivo de obter um teste com itens confiáveis para a análise de Rasch, ou seja, uma boa adequação dos resultados experimentais à predição teórica.

Outra premissa do modelo é que a probabilidade de responder positivamente um item não deve ter dependência com as respostas dadas a outras perguntas do teste (onde a resposta a uma pergunta é motivada por uma resposta anterior)¹¹⁹. Por isso, o pesquisador deve planejar os itens de forma a respeitar esse princípio.

É importante deixar claro que a utilização das palavras *habilidade* e *capacidade* para descrever como uma determinada pessoa se comportou em um teste, se restringe a uma consideração formal da própria teoria *TRI* encontrada na literatura, sem qualquer análise de origem semântica ou psicológica do uso comum da expressão. Aqui, tais expressões se referem à compreensão do indivíduo ao estudo em questão que é estimada durante a análise de Rasch em comparação com os outros indivíduos do grupo.

2.4.2 Modelo de Rasch dicotômico

O modelo de Rasch dicotômico é baseado na análise quantitativa de um teste com itens que retornem respostas do tipo sim ou não, certo ou errado, concordo ou discordo, positivo ou negativo, onde são estimados dois parâmetros em uma mesma escala métrica de valores: a dificuldade de cada item e a habilidade (capacidade ou proficiência) de cada indivíduo em respondê-los positivamente. Para se estimar esses parâmetros, as respostas positivas são codificadas atribuindo-se o valor 1 (um) e às respostas negativas atribuídas o valor 0 (zero).

O modelo matemático é descrito da seguinte forma: Considere D_i o parâmetro que expressa as dificuldades dos itens $i=1, 2, 3, \dots, n$ e θ_j o parâmetro que expressa as habilidades dos indivíduos $j=1, 2, 3, \dots, m$. Dada uma combinação particular de i e j , (i, j) o modelo de Rasch retorna a probabilidade do indivíduo j responder satisfatoriamente (corretamente) o item i , aplicando a Equação 3.

$$P(x_{ij} = 1 / D_i, \theta_j) = \frac{e^{(\theta_j - D_i)}}{1 + e^{(\theta_j - D_i)}} \quad (\text{Eq. 3})$$

Nessa equação é importante observar que $0 < P(x_{ij} = 1 / D_i, \theta_j) < 1$ já que $e^{(\theta_j - D_i)} < 1 + e^{(\theta_j - D_i)}$ e que e é o número de Euler, que é a base dos logaritmos naturais.

Desenvolvendo a Equação 3 e considerando $P(x_{ij} = 1 / D_i, \theta_j) = P$, $\theta_j = \theta$ e $D_i = D$, obtemos:

$$P = \frac{e^{\theta - D}}{1 + e^{\theta - D}} = \left(\frac{1}{1 + e^{\theta - D}} \right) \cdot (e^{\theta - D}) \quad (\text{Eq. 4})$$

$$\text{Sabendo que } P = \frac{e^{\theta - D}}{1 + e^{\theta - D}} \text{ temos que } 1 - P = 1 - \frac{e^{\theta - D}}{1 + e^{\theta - D}} = \frac{1 + e^{\theta - D} - e^{\theta - D}}{1 + e^{\theta - D}} \Rightarrow$$

$$1 - P = \frac{1}{1 + e^{\theta - D}} \quad (\text{Eq. 5})$$

Substituindo esta última igualdade na Eq. 4 temos:

$$P = [(1 - P) \cdot (e^{\theta - D})] \Rightarrow$$

$$\frac{P}{1 - P} = e^{\theta - D} \quad (\text{Eq. 6})$$

Para encontramos a chance de sucesso em função apenas da habilidade do indivíduo e da dificuldade D do item, aplicamos logaritmo natural em ambos os membros da equação 6, já que a igualdade permanece inalterada.

$$\ln\left(\frac{P}{1 - P}\right) = \ln e^{\theta - D} \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{P}{1 - P}\right) = \theta - D \quad (\text{Eq. 7})$$

Na Equação 7, o termo $\ln\left(\frac{P}{1-P}\right)$ é chamado de **logit de P**, também conhecido como o

log da chance (*log-odds*, em inglês) de um indivíduo responder com sucesso um item. A chance de sucesso (*odds*) é definida implicitamente na Equação 7 como sendo a razão entre a probabilidade de sucesso P e a probabilidade de fracasso $1 - P$.

Quando a probabilidade é dada nesse novo formato é possível fazer comparações diretas entre diferentes valores de habilidade e dificuldades dos itens. Em outras palavras, o modelo de Rasch se torna interessante porque tanto θ quanto D são colocadas em uma mesma escala (*logits*) assumindo valores no intervalo de $(-\hat{O}, \hat{O})$. Itens mais difíceis ou indivíduos mais habilidosos recebem valores logits (ou *log-odds*) maiores e positivos, enquanto itens muito fáceis ou indivíduos menos hábeis recebem valores menores e negativos.

Como consequência, a distância entre a habilidade de uma pessoa e a dificuldade de um item ($\theta - D$) ao longo do eixo horizontal é uma medida de quão bem um item é adequado a uma pessoa. Para uma dada distância fixa, $\theta - D$, deve haver uma probabilidade P fixa de se responder o item com sucesso. Por exemplo, para $\theta - D = 1$, tem-se pela equação 3, $P = 0,73$ (**Fig. 3**). Geralmente, essas descrições do modelo são ilustradas por meio do gráfico P versus $\theta - D$ (**Fig. 3**) e/ou pelas Curvas Características dos Itens (ou ICC, do inglês *Item Characteristic Curve*), P versus $\theta - D$, para cada item i , conhecidas as respectivas dificuldades D_i (**Fig. 4**). Na ICC, a dificuldade do item corresponde ao valor de $\theta - D$ quando $P = 0,5$. Itens com maior dificuldade se localizam deslocados à direita (para maiores valores de $\theta - D$) com relação a itens estimados como sendo de menor dificuldade.

Pela Equação 3, verifica-se que essas curvas são caracterizadas por um comportamento não linear, obedecendo a uma sigmoide (gráfico em forma de ∞).

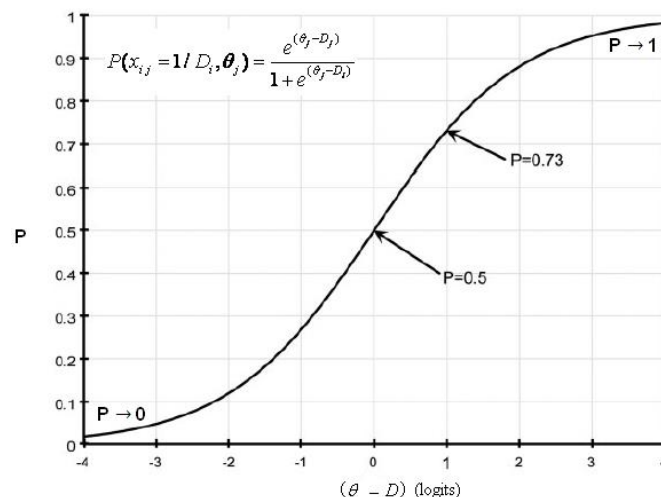


Figura 3. Representação gráfica de P versus $\theta - D$.

O modelo informa que a probabilidade de se responder corretamente a um item depende tanto da habilidade (θ) do examinado quanto da dificuldade (D) desse item. No modelo de Rasch dicotômico, o indivíduo só consegue responder corretamente a um item em questão a partir do momento em que sua habilidade for maior ou igual à dificuldade deste item ($\theta \geq D \Rightarrow P \geq 0,5$, pois $\frac{P}{1-P} \geq 1$).

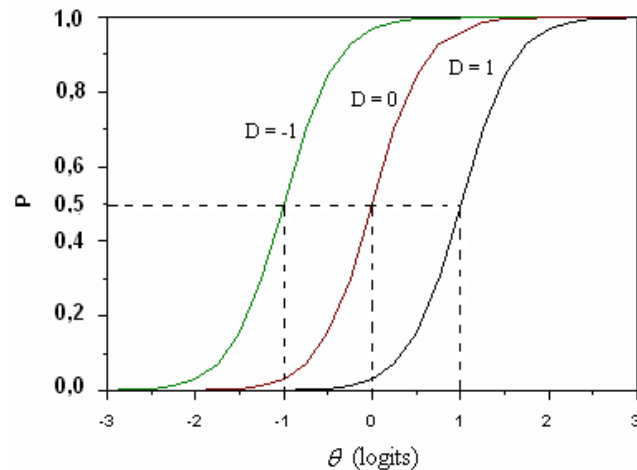


Figura 4. Curvas características dos itens (CCI).

Em outras palavras, o indivíduo com habilidade θ dará uma resposta positiva ao item com dificuldade D quando sua probabilidade $P(D, \theta)$ for maior ou igual a 50%, fazendo $\theta = D$ na Equação 3, tem-se $P = \frac{e^0}{1+e^0} = 0,5$. Ou ainda, fazendo $P = \frac{e^{\theta-D}}{1+e^{\theta-D}} \geq 0,5$ na mesma equação temos: $\frac{e^{\theta-D}}{1+e^{\theta-D}} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 2e^{\theta-D} \geq 1+e^{\theta-D} \Rightarrow e^{\theta-D} \geq 1 \Rightarrow e^{\theta-D} \geq e^0 \Rightarrow \theta - D \geq 0 \Rightarrow \theta \geq D$, ou seja, a probabilidade de sucesso P é maior ou igual a 0,5 quando a habilidade do indivíduo é maior ou igual a dificuldade do item D. Analogamente $P < 0,5$ quando $\theta < D$.

Neste sentido, dentro de cada grupo de indivíduos, é possível detectar quais deles (subgrupos) se encontram em um pior patamar, ou seja $\theta \ll D$ ($P \approx 0$) e quais foram melhores avaliados, $\theta \gg D$ ($P \approx 1$). Sendo o significado de \ll (muito menor) e \gg (muito maior).

Traduzindo as notações matemáticas do parágrafo anterior para uma linguagem de fácil entendimento, o que se interpreta é que além de identificar quais entrevistados não responderam a um item em específico, é possível identificar dentro desse grupo quais entrevistados estão mais limitados para respondê-lo. Da mesma forma, além de verificar quem responde positivamente a um item, é possível diagnosticar o subgrupo de entrevistados com maior habilidade.

Esse é um diferencial do modelo de Rasch nas análises de testes educacionais e de proficiência uma vez que requerem cada vez mais um diagnóstico individual em detrimento de uma análise restrita às características grupais (como ocorre em uma análise por estatística descritiva), com vistas à proposição de intervenções mais pontuais e mais eficientes.

Um ponto muito importante a ser tratado na análise de Rasch é que os níveis de habilidade de cada examinado θ_j e de dificuldade de cada item D_i na escala logits são desconhecidos e tratados como parâmetros do modelo e precisam ser estimados. No total são $n+m$ parâmetros a serem estimados pelo modelo, onde n é o número de itens e m é o número de indivíduos examinados. Isso significa que para cada combinação (i,j) estima-se θ_j e D_i específicos. O que se conhece são apenas as respostas (codificadas como 0 ou 1) dos entrevistados aos itens que compõem o questionário. Por isso, quanto maior for o número de itens (n) do teste e (ou) de indivíduos examinados (m), mais complexos e mais trabalhosos se tornam os cálculos de estimação desses $n+m$ parâmetros.

O modelo de Rasch dicotômico usa o método estatístico de estimação de parâmetros por máxima verossimilhança¹²⁰, considerando-os como uma amostra advinda de uma distribuição normal padrão. Este método utiliza os valores de θ_j e D_i que maximizam a função de probabilidade $P(D, \theta)$ como sendo as estimativas para estes parâmetros.

Esse é um processo essencialmente de otimização, visto que não há solução analítica para o sistema. Para solucionar o problema, usa-se algum método numérico/iterativo de estimação de raízes de sistemas de equações não-lineares¹²¹ (Newton-Raphson, Escore de Fisher, etc.). Esses métodos numéricos exigem uma aproximação inicial (chute inicial) para a estimação das raízes (parâmetros θ_j e D_i).

O modelo de Rasch usa $\theta_{j, inicial} = \ln\left(\frac{P}{1-P}\right)$ como chute inicial para se estimar a habilidade de cada indivíduo. A partir da Equação 5, $\theta_{j, inicial}$ corresponde à habilidade quando $D=0$. No cálculo de $\theta_{j, inicial}$, P corresponde à razão entre o número de acertos do indivíduo j e o número total de itens n do questionário, ou seja, $(P = \frac{n^\circ \text{ de acertos}}{n})$.

Seguindo a mesma idéia, $D_{i, inicial} = \ln\left(\frac{1-P}{P}\right)$ é dado como chute inicial para a dificuldade de cada item (D). A partir da Equação 5, $D_{i, inicial}$ é a dificuldade do item quando $\theta=0$. No cálculo de $D_{i, inicial}$, P corresponde à razão entre o número de indivíduos que

responderam positivamente ao item i e o número total de entrevistados m , ou seja, $(P = \frac{n^\circ \text{ de indivíduos que acertou ao item } i}{n})$.

3 METODOLOGIA

3.1 Tipo de estudo

O estudo consiste em uma pesquisa experimental, de campo, aplicada, de cunho quantitativo, com caráter exploratório.

Trata-se de um estudo que emprega variáveis controladas na busca de resultados claros, objetivos e precisos, com finalidade de fornecer novos conhecimentos para a solução de problemas de ordem prática¹²².

Os resultados obtidos com as experimentações serão traduzidos para a linguagem gráfica e tabular e (ou) analisados com o auxílio de técnicas de estatística descritiva e inferencial e da TRI. A discussão dos resultados, bem como o aprofundamento e aperfeiçoamento das técnicas desenvolvidas neste trabalho estão condicionadas a essa organização dos dados.

3.2 Dados e instrumentos da pesquisa

A coleta dos dados do presente trabalho foi obtida por meio de uma seleção racional, a partir dos professores participantes (selecionados por análise curricular entre 250 professores inscritos) do Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio - PAPMEM, oferecido pela Sociedade Brasileira de Matemática, na semana de 13 a 17 de janeiro de 2014, na UNIVASF Campus Juazeiro. Essa seleção intencional foi feita dessa forma, pois os participantes do PAPMEM apresentam as características estabelecidas nos objetivos e nas hipóteses desse trabalho, de modo que podemos obter as informações desejadas e previstas.

Os cento e oito (N=108) participantes foram numerados e identificados como IDØ no programa estatístico Minitab 14 e uma amostra de cinquenta e quatro IDØ foi escolhida ao acaso a partir do comando *õrandom dataö* (dados aleatórios). Desses IDØ, quarenta e seis (n=46) concordaram em participar da pesquisa e responderam efetivamente aos questionários propostos. Todos os 108 IDØ são professores que trabalham em escolas de ensino fundamental e médio, nas cidades de Petrolina-PE, Juazeiro-BA e cidades próximas.

A partir dos resultados amostrais é possível avaliar parâmetros estatísticos do grupo de professores participantes do PAPMEM e estimar qualitativamente sobre a atual situação dos

professores de matemática dessa região quanto à formação, ao conhecimento e ao uso do conteúdo de Equações Literais, obter conclusões e propor intervenções.

Para se obter os dados necessários ao que a pesquisa propôs, foram aplicados dois questionários.

No primeiro, denominado de Questionário 1 (Q1), a aplicação se deu no dia 13/01/2014, de forma coletiva, padronizada e no mesmo ambiente onde ocorria o treinamento do PAPMEM. Os entrevistados tiveram 60 minutos para responder ao questionário com itens numerados de 1 a 10 (descritos na Seção 3.3), de forma individual e sem o auxílio de nenhuma fonte de pesquisa, para que as respostas aos itens fossem as mais fidedignas possíveis e representassem o real conhecimento e habilidade dos entrevistados (ou IDØs) em lidar com o conteúdo de Equações Literais. O objetivo do Q1 foi avaliar o conhecimento desses professores com o conteúdo em questão.

Já o segundo, denominado de Questionário 2 (Q2), foi enviado por email no dia 13/01/2014 aos mesmos 46 IDØs que responderam ao Q1 junto com um Manual Didático (MD) produzido durante o período de revisão da literatura intitulado "Equações Literais e suas Aplicações" elaborado como material de apoio para suprir possíveis lacunas de conceitos, conhecimento, uso e aplicações do tema (Apêndice A). O Q2 foi composto de itens numerados de 6 a 17 (descritos na Seção 3.3). Os participantes tiveram até o dia 17/01/2014 para enviar o Q2 respondido. O objetivo desse segundo questionário foi avaliar a evolução na proficiência dos entrevistados para lidar com o tema em questão após terem recebido o treinamento com o MD. As questões de 11 a 17 dizem respeito à avaliação do MD pelos entrevistados.

Todos os participantes assinaram um termo de consentimento livre e esclarecido antes de responder aos instrumentos da pesquisa.

3.3 Elaboração dos questionários

O Q1 (Tabela 2) foi composto por dez itens, elaborados de forma semi-empírica, a partir de um estudo preliminar na literatura com ênfase nas Equações Literais de 1º Grau e nos pressupostos e na importância da formação continuada de professores para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem de matemática.

Neste primeiro questionário foram abordados conceitos da formação básica dos indivíduos analisados em nível de graduação, do conhecimento técnico e da experiência

profissional dos indivíduos que pudessem explicar o nível de proficiência/habilidade dos entrevistados quanto ao uso e ao conhecimento das Equações Literais do 1º grau.

Durante a pesquisa bibliográfica para elaboração do questionário, buscou-se levar em conta a discriminação dos itens e de forma com que as respostas fossem a cópia mais fiel possível do que o entrevistado vivencia ou vivenciou na sua atuação acadêmica e profissional, sem a possibilidade dos itens serem respondidos ao acaso (itens independentes um dos outros), uma das premissas do modelo de Rasch dicotômico.

Tabela 2: Descrição dos itens utilizados no Q1.

<i>Item</i>	<i>Descrição/justificativa</i>	<i>Referências</i>
1. É licenciado em Matemática?	Existem dois tipos de profissionais que ministram aulas de matemática nas escolas de educação básica: os que são licenciados/bacharéis em Matemática e os que são formados em outras áreas do conhecimento. Espera-se que o fato do entrevistado não ter visto esse conteúdo na graduação esteja ligado à sua formação em outra área. Espera-se que a maioria dos entrevistados seja formada em matemática.	123
2. Você estudou Equações Literais de 1º e 2º graus em seu curso de graduação?	Provavelmente, a maioria dos entrevistados estudou esse assunto (ou algum relacionado) na graduação.	123, 124
3. Você trabalha (já trabalhou) com Equações Literais de 1º grau nas turmas de sua responsabilidade, descrevendo-as e resolvendo-as?	Verificar se realmente o professor trabalha esse conteúdo em sala de aula. Verificando as respostas dadas aos itens de 6 a 10 (conhecimento, aplicação e importância do conteúdo), pode-se detectar se os entrevistados realmente ensinam esse conteúdo, se estes informarem que ensinam.	125
4. Você trabalha (já trabalhou) com Equações Literais de 2º grau nas turmas de sua responsabilidade, descrevendo-as e resolvendo-as?	Verificar se realmente o professor trabalha esse conteúdo em sala de aula.	125
5. O livro que você trabalha em sala de aula aborda explicitamente o estudo de equações com coeficientes literais como um conteúdo a ser estudado?	Saber se esse conteúdo é encontrado nos livros didáticos utilizados pelos professores. O fato dos livros didáticos não apresentarem esse conteúdo também pode estar relacionado com possíveis respostas negativas aos próximos itens do questionário.	126, 127, 128
6. Neste momento da pesquisa você saberia definir com suas palavras o que é uma Equação Literal? Se sim, defina.	O fato do entrevistado saber definir o tema em questão é um passo importante para que ele possa responder os próximos itens de forma positiva.	6, 129
7. Dê dois exemplos quaisquer (diferentes) de Equações Literais do 1º grau identificando a incógnita em questão.	A apresentação de exemplos garante que o entrevistado tem conhecimento técnico prático do conteúdo em questão ao invés de dizer simplesmente se ensina ou não o conteúdo ou de definir o tema.	129
8. Descreva e equacione uma situação problema (elaborar uma questão aplicada) que para ser solucionada necessite da resolução de uma equação literal do 1º grau.	Apresentar e equacionar uma situação problema requer mais habilidade do entrevistado do que simplesmente apresentar um exemplo de equação literal sem significação ou aplicação. Na maioria das vezes, a elaboração de uma situação-problema requer não só conhecimentos do tema, mas também de outras áreas do conhecimento para que o conteúdo ganhe sentido crítico.	129, 130
9. Resolva a questão elaborada no item anterior. Sempre que julgar necessário, explique os passos utilizados no desenvolvimento da solução.	Verificar se os professores entrevistados solucionam corretamente a situação-problema proposta no item anterior. Verificar se estes utilizam as operações matemáticas algébricas adequadas para solucionar a situação problema. Solucionar corretamente indica outra qualidade do entrevistado em detrimento apenas de elaborá-la.	129, 131
10. Qual a importância do estudo das Equações Literais no currículo de matemática para a formação do estudante do Ensino Médio?		131, 132, 133, 134

Em outras palavras, as descrições dos itens devem ser elaboradas de forma com que uma resposta positiva a um dado item não possa ser influenciada pelo enunciado de outro item

deste questionário. De forma geral, os itens devem ser planejados para que não haja a possibilidade dos entrevistados encontrarem informações no próprio questionário que sirvam de base para respostas a outros itens.

O Q2 foi analisado levando-se em conta os itens de 6 a 10 do Q1, acrescidos dos itens de 11 a 17 (Tabela 3). Os itens de 1 a 5 não foram considerados, pois as respostas a estes itens são invariantes, uma vez que evidenciavam dados da formação do entrevistado informados no Q1.

Tabela 3. Descrição dos itens de 11 a 17 utilizados no Q2.

11. O material didático sobre Equações Literais do 1° grau enviado o ajudou a desmistificar o conceito e a importância das Equações Literais do 1° grau?
12. Você tem conhecimento de outro material didático que trate de Eq. Literais do 1° grau explicitamente?
13. No geral, a linguagem utilizada no material está adequada para o público alvo (alunos de graduação/professores)?
14. O material dá a oportunidade de o professor adaptá-lo a uma linguagem mais específica para repassar aos alunos do ensino médio?
15. De zero a dez, qual a sua nota para a proposta do material didático produzido sobre Equações Literais do 1° grau?
16. Você usaria este material didático como uma fonte alternativa de apoio didático nas suas aulas de matemática?
17. Fique à vontade para expor sugestões/críticas ao material didático produzido.

Neste segundo questionário buscou-se verificar, em comparação com as respostas dadas no Q1, se houve evolução dos entrevistados quanto ao conhecimento e aplicações das equações literais. As questões de 11 a 17 foram adicionadas nesse segundo momento para que os professores participantes pudessem avaliar o MD produzido.

3.4 Estimativas dos parâmetros e cálculo das probabilidades pelo modelo de Rasch

A análise quantitativa dos dados coletados via Modelo de Rasch dicotômico foi realizada com o programa estatístico jMetrik 3.0¹³⁵, um *software* livre desenvolvido na *Curry School of Education* da Universidade da Virginia (EUA), específico para análises de dados pela Teoria de Resposta ao Item (TRI). No software, a estimativa dos parâmetros por máxima verossimilhança é realizada utilizando-se o algoritmo iterativo de Newton-Raphson, com o máximo de 150 iterações ou critério de convergência de 0,005.

O jMetrik retorna os valores estimados dos parâmetros de habilidade dos indivíduos examinados e da dificuldade dos itens, bem como das estatísticas de qualidade do teste (confiabilidade, índice de separação). Com a estimativa dos parâmetros em mãos, as probabilidades $P(D,)$ de cada indivíduo j com habilidade responder positivamente a um

dado item i com dificuldade D foram calculadas a partir da implementação da Equação 3 (modelo de Rasch dicotômico) em uma rotina criada em uma planilha do Excel.

3.5 Análise estatística dos dados

A análise estatística dos dados foi realizada com o auxílio do programa estatístico *Minitab 14*. Os resultados amostrais foram interpretados através de técnicas estatísticas descritivas usuais. Resultados populacionais também foram estimados através de técnicas de inferência estatística com o objetivo de visualizar a previsão dos valores de habilidade se o Q1 e o Q2 fossem aplicados para uma quantidade muito maior de IDØ de mesma característica (participantes do PAPMEM).

Quanto às análises descritivas da amostra ($n=46$) foram estimados os seguintes valores amostrais, a média ($\bar{\theta}$) e o desvio padrão da média ($s_{\bar{\theta}}$) e de posse desses valores foi possível fazer uma análise inferencial, ou seja, estimar a média populacional ($n > 46$), caso o Q1 e o Q2 fosse aplicado a todos os participantes do PAPMEM, por exemplo.

Essa média populacional de habilidade foi estimada em termos de intervalos de confiança $(\bar{\theta} - t_{(\frac{\alpha}{2}, n-1)} \frac{s_{\bar{\theta}}}{\sqrt{n}}; \bar{\theta} + t_{(\frac{\alpha}{2}, n-1)} \frac{s_{\bar{\theta}}}{\sqrt{n}})$, cujos valores são obtidos a partir de uma tabela com distribuição *t de Student*. De modo que a esses intervalos estão associados um erro $t_{(\frac{\alpha}{2}, n-1)} \frac{s_{\bar{\theta}}}{\sqrt{n}}$ abaixo ou acima da média amostral (sendo $\alpha=0.05$, o nível de significância do teste) e $n-1$ a magnitude dos graus de liberdade) e ainda esses intervalos são obtidos com 95% de confiança^{136, 137}.

E para confirmar se realmente houve evolução significativa nas médias de habilidade θ dos IDØ, de antes da aplicação do MD (a) para depois da aplicação do MD (d), foi realizado um teste de teste de comparação de duas médias, com 95 % de confiança cujas variâncias das médias populacionais (diferentes e desconhecidas) foram obtidas por meio de um teste *t de Student* para as duas médias, denominado teste de hipóteses.

Nesse teste a hipótese nula ($H_0: a = d$), considera que as médias do Q1 são iguais as do Q2, e que, portanto não há evolução após a aplicação do MD. Já a hipótese ($H_1: a \neq d$) considera que as médias do Q1 e do Q2 são diferentes, mostrando que há indício de evolução após a aplicação do MD.

A verificação desse teste é feita tomando como base um α -valor, um índice estatístico, de modo que se obtivermos um p -valor $< \alpha$, rejeitamos a hipótese nula, ou seja, aceitamos a afirmação de que as médias de habilidades dos ID ϕ s são significativamente diferentes (hipótese H_1).

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 Dificuldades dos itens

Pelo modelo de Rasch, a amplitude dos *scores* de D é o primeiro indício (mas não comprova) de que os itens escolhidos para compor o questionário apresentam-se em diferentes níveis de dificuldade. Essa análise inicial se faz necessária uma vez que a elaboração de um questionário com itens com grau crescente de dificuldade é uma prerrogativa para as análises subsequentes.

A Análise de Rasch permite essa investigação através do índice de separação dos itens, um parâmetro estatístico adimensional que avalia a hierarquia dos itens de um questionário a partir da análise dos dados experimentais¹³⁸. Valores maiores do que 3 confirmam a hierarquia dos itens¹³⁸. No questionário Q1 (antes da aplicação do MD) este índice foi estimado em 4,15 indicando que o número de itens escolhidos para compor o questionário foi suficiente para proporcionar uma excelente propagação de dificuldades entre os itens^{138, 139}.

Em adição, este resultado também confirma que o estudo detalhado realizado na fase de revisão da literatura se mostrou adequado para se produzir um questionário significativo à análise de Rasch. Na prática, o teste produzido se mostrou apropriado porque a análise retornou que este era composto por alguns itens estimados como fáceis, alguns como difíceis e por outros que estavam em uma escala intermediária entre eles. Este primeiro resultado se mostra de extrema importância para o presente estudo, uma vez que um valor adequado de índice de separação dos itens do teste garante que os dados experimentais estão bem ajustados ao modelo proposto, evitando que se tenha que planejar um novo teste (revisar a descrição e (ou) aumentar a quantidade dos itens).

Os itens de 1 a 5 são os mesmos do Q1 e do Q2 e por não serem passíveis de respostas variantes (informações da formação profissional) não são comparados de um teste ao outro, embora tenham sido estimados normalmente pelo modelo por se mostrarem extremamente importantes para explicar os valores de logits estimados para as questões posteriores.

Na **Tabela 4** são apresentados os valores estimados de dificuldade dos itens antes (D_a) e depois (D_d) da aplicação do MD. Pode-se observar que no Q1, dos dez itens do questionário aplicado, o Item 1 (*É licenciado em Matemática?*) foi estimado como o *score* mais negativo (-6,71 logits), enquanto o Item 9 (*Resolva a questão elaborada no item anterior*) recebeu o *score* mais positivo (3,56 logits), seguido do Item 8 (*Descreva e equacione uma situação problema que envolva uma equação literal do 1º grau*) e do Item 10 (*Qual a importância do estudo das Equações Literais no currículo de matemática para a formação do estudante do Ensino Médio?*), ambos com *score* 2,60 logits.

Tabela 4. Estimativa dos *scores* de dificuldades dos itens do questionário pelo modelo de Rasch dicotômico: antes (D_a) e depois (D_d) da aplicação do MD.

<i>Item</i>	D_a	D_d
1. É licenciado em Matemática?	-6,71	-3,32
2. Você estudou Equações Literais de 1º e 2º graus em seu curso de graduação?	-2,14	0,66
3. Você trabalha (já trabalhou) com Equações Literais de 1º grau nas turmas de sua responsabilidade, descrevendo-as e resolvendo-as?	-0,94	1,39
4. Você trabalha (já trabalhou) com Equações Literais de 2º grau nas turmas de sua responsabilidade, descrevendo-as e resolvendo-as?	-0,36	1,83
5. O livro que você trabalha em sala de aula aborda explicitamente o estudo de equações com coeficientes literais como um conteúdo a ser estudado?	0,24	2,35
6. Neste momento da pesquisa você saberia definir com suas palavras o que é uma Equação Literal?	0,69	-0,48
7. Dê dois exemplos quaisquer (diferentes) de equações literais do 1º grau identificando a incógnita em questão.	0,46	-1,17
8. Descreva e equacione uma situação problema que para ser solucionada necessite da resolução de uma equação literal do 1º grau.	2,60	0,10
9. Resolva a questão elaborada no item anterior. Sempre que julgar necessário, explique os passos utilizados no desenvolvimento da solução.	3,56	-1,70
10. Para você, qual a importância do estudo das Equações Literais no currículo de matemática para a formação do estudante do Ensino Médio?	2,60	0,33

Esse resultado mostra que o Item 1 se mostrou o mais fácil de ser respondido positivamente pelos entrevistados. No contexto deste item, o termo *mais fácil* significa dizer que a grande maioria dos professores possui licenciatura em matemática. Como discutido na metodologia, a escolha deste item para compor o questionário foi considerada importante para o estudo uma vez que respostas negativas quanto ao conhecimento e ao uso de Equações Literais pudessem estar ligadas ao fato do entrevistado atuar como professor de matemática e possuir outra formação acadêmica.

Dos resultados experimentais, observou-se que toda a amostra dos 46 professores que participaram da pesquisa possuía licenciatura em matemática, o que explica o *score* muito negativo para o item e a lacuna de 4,57 pontos na escala logits para a estimação do próximo item (-6,71 \rightarrow -2,14) em ordem crescente de dificuldade, em comparação com a sequência de *scores* apresentados para os outros itens do Q1.

Em seguida, o Item 2 recebeu uma pontuação de -2,14 logits. Neste quesito, 46 % dos entrevistados responderam *“Não”* e 54 % informaram *“Sim”* quando perguntados se estudaram Eq. Literais de 1° e 2° Grau no curso de graduação. Embora tenha sido um dos itens que mais recebeu respostas positivas, praticamente metade dos professores afirmou que não teve o contato com o conteúdo em sua formação básica.

O que pode explicar o fato de 68 % dos IDØs afirmarem nunca terem trabalhado o conteúdo em sala de aula, em resposta ao Item 3 e ao fato de 74 % dos IDØs não trabalharem com equações literais para desenvolver o conteúdo de equações polinomiais de grau dois, em resposta ao Item 4. Este foi alocado no Q1 por se relacionar diretamente com o conteúdo matemático em pesquisa. Essa é uma indicação de que a maioria dos professores trabalha as equações de 1° e 2° grau de forma puramente matemática ou com problemas que retornam soluções particulares que dificultam a percepção do aluno quanto ao uso para explicar, modelar e generalizar situações práticas.

Essas respostas negativas também podem estar intimamente ligadas ao fato de 80 % dos entrevistados terem afirmado que os livros didáticos adotados não trabalham explicitamente com esse tipo de equação.

Motta e outros autores¹⁴⁰ em sua obra *“O livro didático em questão”* discute essa situação quando fala que estudos apontam que muitos profissionais levam em conta apenas o livro didático como fonte de consulta para preparar as aulas. A obra também ressalta que dessa forma o livro didático é usado como modelo-padrão, a autoridade única do processo de ensino e aprendizagem. Teoricamente o livro deveria ser utilizado como instrumento auxiliar e a busca por outras fontes metodológicas de pesquisa também deveriam naturalmente fazer parte da atividade pedagógica do professor, o que não ocorre na prática. Baseado nesta discussão, o que se pode inferir é que se o livro não apresenta conteúdos de forma significativa, há uma grande possibilidade do professor reproduzi-los aos alunos como são apresentados¹⁴⁰.

Outros fatores preponderantes para que isso ocorra são a carência ou a falta de outros livros didáticos, da busca por desenvolvimento profissional e a alta carga-horária de trabalho desses profissionais.

De forma geral, a amplitude dos valores de dificuldade dos itens diminuiu de 10,27 para 5,67 do Q1 para o Q2, uma indicação de que os itens do Q2 se tornaram menos discriminantes do que inicialmente, sem a interferência do MD (no Q1).

Intuitivamente, era de esperar este resultado já que foi detectado que todos os entrevistados eram formados em matemática e por isso, ao ter contato com o MD, assimilariam o conteúdo de Equações Literais do 1º Grau facilmente, em comparação com um grupo de IDØ que não tivessem conhecimento técnico em matemática. Esse resultado é o primeiro indício de que os entrevistados ficaram mais preparados para lidar com Equações Literais do 1º grau, evidenciando a eficácia do material didático.

A partir desses valores, esse comportamento pode ser confirmado a partir dos gráficos $P \times D_i$, que descrevem as curvas características dos itens (CCI) (**Fig. 5**). Nas CCI, cada ponto representa um grupo de indivíduos do experimento que possuem um mesmo valor característico de habilidade, alocados a partir do ajuste aos dados experimentais com a aplicação do modelo. A linha contínua representa o ajuste dos dados a partir da Equação 3, dadas as dificuldades dos itens. As dificuldades (D_i) também podem ser visualizadas neste gráfico como sendo os valores de D_i nos pontos de inflexão das CCI.

Observa-se que no Q2 as CCI se deslocaram horizontalmente para uma região mais restrita e se tornaram mais próximas umas das outras em comparação com as CCI obtidas no Q1.

Ainda na **Fig. 5**, observa-se que no Q2 algumas CCI se deslocaram para à direita com relação às suas posições iniciais no Q1, o que poderia levar a uma interpretação errônea de que estes itens se tornaram mais difíceis aos IDØ, mesmo após terem estudado o MD. Do mesmo modo, o deslocamento de alguma CCI para à esquerda poderia indicar que o item se tornou mais fácil.

O que deve ser interpretado é que esses itens não se tornaram mais difíceis ou mais fáceis, e sim que os *scores* de D_i convergiram para uma região intermediária de valores na escala logits (**Fig. 6**) em comparação com os valores de D_i dados no Q1, para representar que no Q2 o grupo de questões se mostraram niveladas aos professores participantes e não mais em um nível crescente de dificuldade. Na **Fig. 6** é notável que no Q1 as questões de 1 a 10 estão distribuídas em ordem crescente de dificuldade, desde itens muito fáceis aos mais

difíceis, passando por questões de dificuldade intermediária, ao passo que no Q2 há uma quebra na hierarquia de dificuldade, os itens ocupam uma mesma região do gráfico, deixando evidente que já não existem itens muito fáceis e nem muito difíceis de serem respondidos.

Nessas condições, um indivíduo que consegue responder positivamente a um dos itens do questionário também tem grande probabilidade de responder satisfatoriamente os demais itens. Isso pode ser atribuído ao fato dos ID ϕ s possivelmente terem se tornado mais capacitados (assumindo maiores valores de θ_a) para lidar com Equações Literais do 1 $^\circ$ Grau uma vez que se prepararam para o Q2 estudando o MD. Essa possibilidade é confirmada a partir dos dados quantitativos de habilidade dos ID ϕ s obtidos a partir da análise de Rasch (discutidos na seção 4.2).

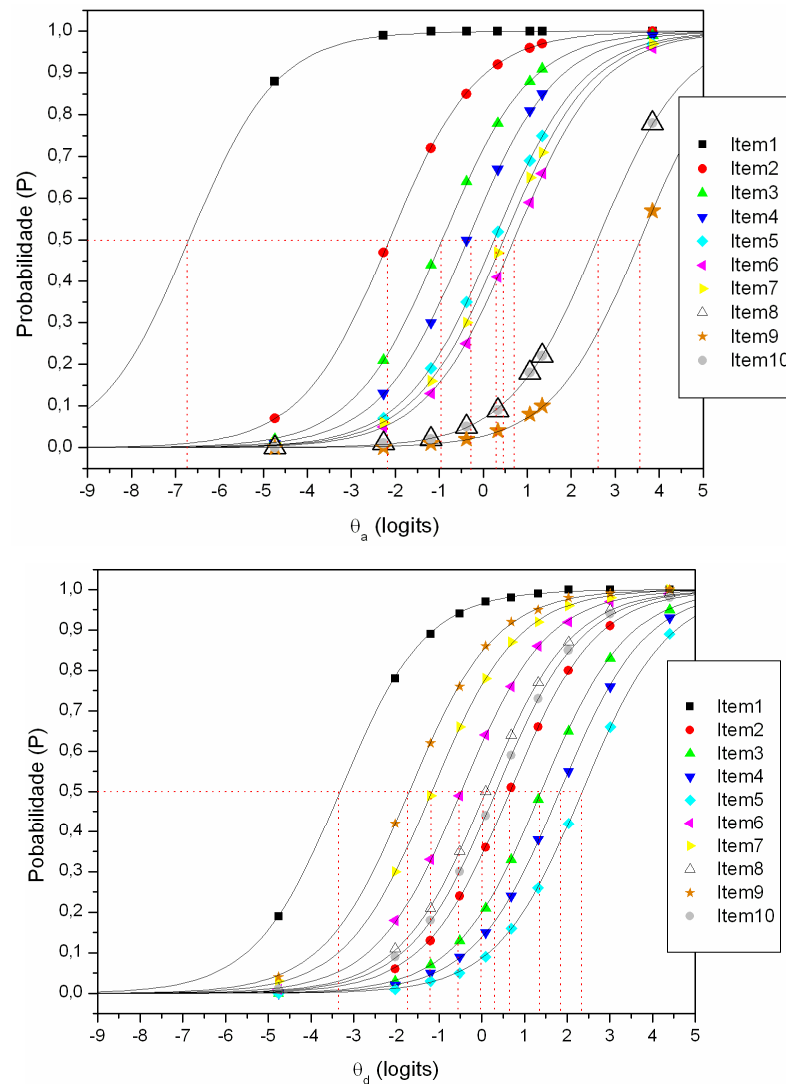


Figura 5. Curvas características dos itens (CCI) obtidas no Q1 (acima) e no Q2 (abaixo).

No gráfico acima (θ_a) é possível observar que existe um ponto relativo a Curva Característica do item 1 que existe um ponto na calda inferior da sigmoide, que poderia levar

a conclusão que o ID era formado em Matemática e após a aplicação do MD deixou de ser. Podemos interpretar esse fatodo seguinte modo, o desempenho desse ID no Q2 foi tão baixo que o mesmo comportou-se como uma pessoa que não possui formação em Matemática.

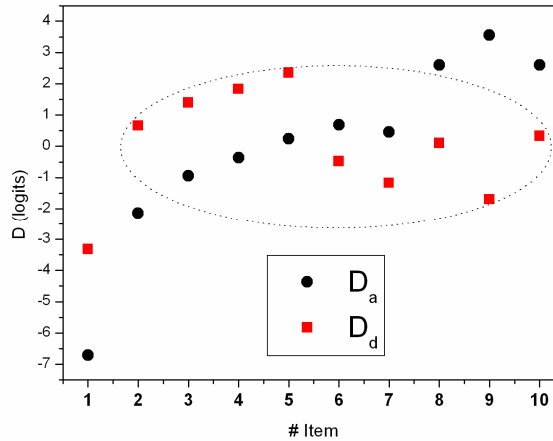


Figura 6. Comparação das estimativas das dificuldades dos itens de 1 a 10 (Q1 e Q2).

4.2 Habilidades dos IDø

Dando continuidade a discussão dos resultados, na **Tabela 5** são apresentados os valores de habilidades dos IDø antes e depois da aplicação do MD. Os valores teóricos são os *scores* de estimados pelo modelo de Rasch, de acordo com a possível quantidade de respostas positivas que um ID possa retornar aos dez itens do questionário. Já os valores experimentais representam as estimativas de habilidade observadas na prática.

Tabela 5. Scores de habilidades antes (a , no Q1) e depois (d , no Q2) do MD em função da quantidade de respostas positivas aos itens do questionário, calculados pelo Modelo de Rasch.

Respostas positivas	a		d	
	Teórico	experimental	teórico	Experimental
0	-7,59	-	-4,76	-
1	-4,74	*	-3,19	*
2	-2,27	*	-2,03	*
3	-1,19	*	-1,20	*
4	-0,38	*	-0,52	*
5	0,33	*	0,09	*
6	1,06	*	0,69	*
7	1,84	-	1,32	*
8	2,72	-	2,03	*
9	3,85	*	3,01	*
10	5,32	-	4,40	*

- *scores* teóricos não observados no experimento;

* *scores* teóricos observados no experimento.

Na análise do Q1, é possível observar que os IDø responderam positivamente a pelo menos um item do questionário. Em contrapartida, não houve IDø que obtiveram êxito em

sete, oito ou em todos os itens propostos, em um primeiro indício de que no geral, algumas questões do Q1 se mostraram em um nível de dificuldade maior do que a habilidade dos entrevistados. Já no Q2 houve uma evolução quanto a esse quesito, uma vez que os IDø obtiveram de dois a dez acertos no Q2. Essa análise ainda é preliminar para afirmar que houve uma evolução no nível de habilidade desses IDø, uma vez que sequer informa a quantidade de IDø que responderam positivamente n itens ($n= 1, 2, 3, \dots, 10$) no Q1 e Q2.

Comparando os histogramas de frequência dos valores de θ_a e θ_d (**Fig. 7**), observa-se que a distribuição de habilidades deixou de se comportar como uma distribuição assimétrica à esquerda e passou a se comportar de forma simétrica em relação à média.

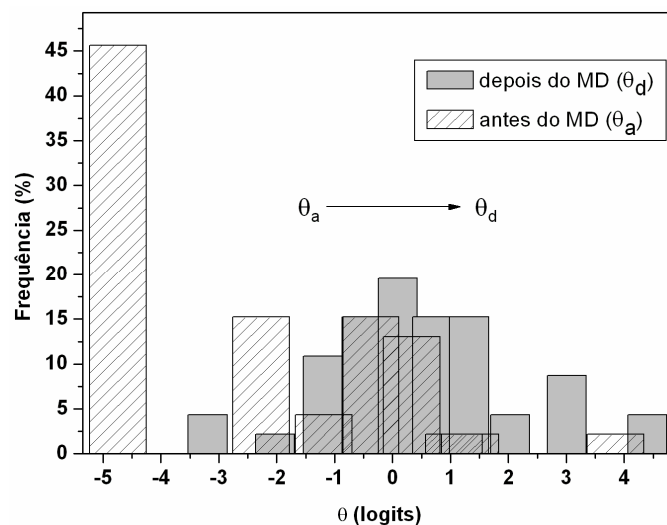


Figura 7. Histogramas de frequências (%) dos valores de θ dos IDø obtidos experimentalmente antes e depois da aplicação do MD.

É notável que a média amostral das habilidades dos entrevistados se deslocou para maiores valores na escala logits após a aplicação do MD.

Em adição, outras estatísticas descritivas de θ_a e θ_d foram comparadas (**Tabela 6**) para reforçar o indício de que a média de valores de θ evoluiu expressivamente.

Para se ter uma análise mais ampla da situação, estimou-se os resultados de habilidade para a condição do teste ser aplicado a um número bem maior de IDø de mesma característica (participantes do PAPMEM).

Tabela 6. Estatísticas descritivas dos dados amostrais para θ_a e θ_d .

Estatística descritiva	a	d
Média	-2,44	0,47
Desvio padrão da média	0,35	0,24
1º quartil Q_1	-4,74	-0,52
Mediana	-2,27	0,09
3º quartil Q_3	-0,38	1,32
Mínimo	-4,74	-3,19
Máximo	3,85	4,4
Amplitude	8,59	7,59

Pelo método de estimativa de parâmetros utilizado, é sabido que as duas populações de valores de habilidade (μ_a e μ_d) eram normalmente distribuídas, com 95% de confiança. Essa condição é prerrogativa para se fazer inferências estatísticas desse parâmetro.

A média populacional de μ_a foi estimada no intervalo de (-3,15; -1,73) enquanto a média populacional de μ_d foi estimada em (-0,14; 0,95).

Para confirmar se o aumento da média de μ foi significativo estatisticamente ao ponto de afirmarmos que a média da habilidade dos professores é diferente após a aplicação do manual, foi realizado o teste de comparação de duas médias, com variâncias das médias populacionais diferentes e desconhecidas. Por meio do teste de hipóteses, verificou-se um p-valor = 0,000, como foi obtido o p-valor < α ($\alpha = 0,05$), rejeitou-se a hipótese nula (H_0), que afirma que as médias das habilidades são iguais ($\mu_a = \mu_d$), antes e depois da aplicação do MD, ou seja, aceitou-se a afirmação ($H_1: \mu_a \neq \mu_d$) de que as médias de habilidades dos IDØs são significativamente diferentes e que realmente houve uma evolução nesse quesito. Esse resultado confirma a eficácia do manual didático, uma vez que, após sua aplicação, as habilidades dos professores cresceram na escala logits.

Isso significa, que se um maior número de professores com a mesma característica amostral respondesse ao Q1, teríamos também professores com níveis muito baixos de habilidade com o tema em questão. Com o estudo do manual didático, seria detectado no Q2 que os docentes se tornariam mais habilidosos com o tema.

4.3 Análise dos gráficos *P versus D*

Uma restrição nas análises anteriores (gráficos CCI e histogramas de habilidades) é que, embora retornem informações de que as dificuldades dos itens se tornaram mais niveladas e de que houve uma evolução nas habilidades dos IDØs após o MD, esses gráficos não informam a quantidade de IDØs contidos em cada ponto experimental. Atrelada a essa restrição, tem-se o fato de termos que verificar se a evolução nos valores de μ , do Q1 para o Q2, foi suficiente para que os IDØs conseguissem responder a um dado item com dificuldade D .

Essas informações, que são importantes para se avaliar a evolução na proficiência dos entrevistados, podem ser adquiridas a partir de uma análise do balanceamento entre o aumento no nível de habilidade e o deslocamento dos níveis de dificuldade para uma região intermediária de valores logits, do Q1 para o Q2. Essa análise pode ser obtida a partir dos

gráficos experimentais P versus $\theta - D$ (onde cada ponto representa ID ϕ s agrupados com mesmo valor P) aliados a gráficos auxiliares como o de porcentagem dos ID ϕ s com probabilidade P de responder corretamente a um item (**Fig. 8** a **Fig. 13**).

Na **Fig. 8**, são dados os resultados obtidos a partir das respostas ao Item 6 (que pergunta se o ID sabe definir uma Eq. Literal do 1 $^\circ$ Grau). Analisando o balanço $\theta - D$, antes e depois do MD, observa-se que há um deslocamento dessa diferença para valores mais positivos de logits, com conseqüente aumento da probabilidade P dos ID ϕ s responderem corretamente ao item, como discutido na fundamentação teórica (seção 2.4.2). Nota-se que no Q1 a maioria dos pontos experimentais se concentrava na região onde $P < 0,5$ enquanto no Q2, a posição desses pontos foi deslocada para a região onde $P > 0,5$. Os dados quantitativos obtidos a partir dos gráficos de porcentagem de ID ϕ s que adquiriram um dado valor P confirmam a previsão de que os professores adquiriram mais conhecimentos com a aplicação do MD.

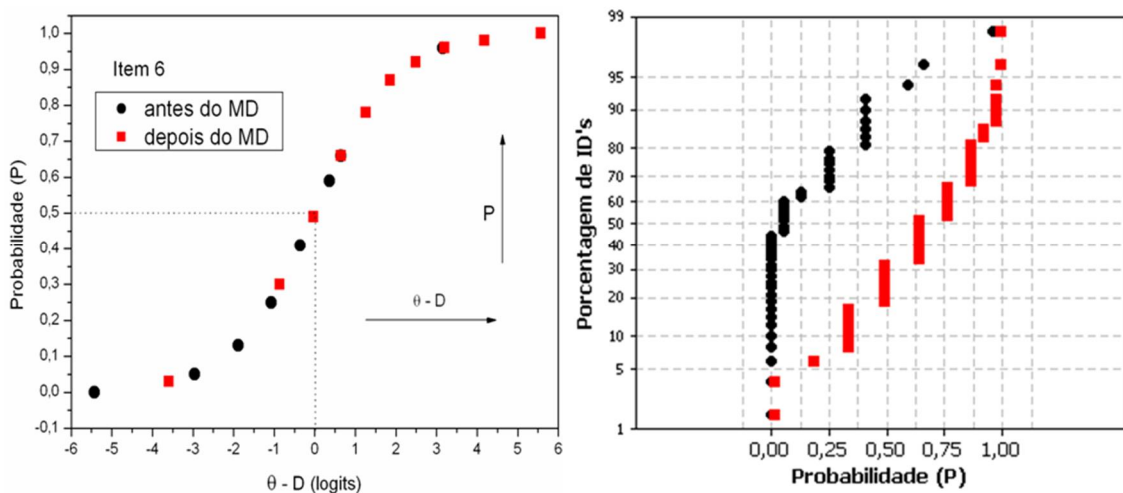


Figura 8. Gráfico $P \times -d$ (à esquerda) e porcentagem de ID ϕ s (à direita) que responderam positivamente ao **Item 6** ($P > 0,5$).

Antes, aproximadamente 95 % dos entrevistados não sabiam definir uma Equação Literal do 1 $^\circ$ Grau, visto que para esses ID ϕ s o balanço $\theta - D$ era negativo. Nesse grupo característico, cerca de 60 % do total de ID ϕ s obtiveram probabilidades muito baixas de respostas positivas ($P < 0,13$) indicando que estes necessitavam de uma intervenção, a partir de uma discussão significativa à respeito do tema, para que conseguissem assimilar e interpretar o conceito. Nessa fase da pesquisa, dos 46 ID ϕ s participantes, apenas dois ID ϕ s responderam positivamente ao item.

Após a aplicação do MD, foi possível notar uma grande evolução na proficiência desses ID ϕ s, quando aproximadamente 70 % responderam positivamente ao item. Dos 30 %

que não deram respostas positivas ao item nesta fase, apenas dois IDø permanecem com níveis de $P = 0$, por não terem respondido este item do questionário (respostas em branco foram codificadas como "NÃO").

Esse resultado se mostrou importante porque a assimilação do conceito é o primeiro passo para que o professor adquira confiança para desmistificar o uso, a aplicação e a importância das Equações Literais para a formação de seus alunos.

Já no Item 7 (quando se pediu que o entrevistado desse dois exemplos quaisquer de Eq. Literais do 1º Grau), os resultados foram semelhantes. Na **Fig. 09**, pode-se verificar que antes do MD um número maior que 90 % dos IDø não sabiam dar exemplos dessas equações, mesmo que puramente matemáticos, sem significação prática (apenas os IDø 17, 24 e 29 obtiveram êxito). Esse resultado foi revertido a partir do momento em que os IDø assimilaram o conceito e tiveram o contato com expressões matemáticas que remetiam a essas expressões após terem estudado o MD.

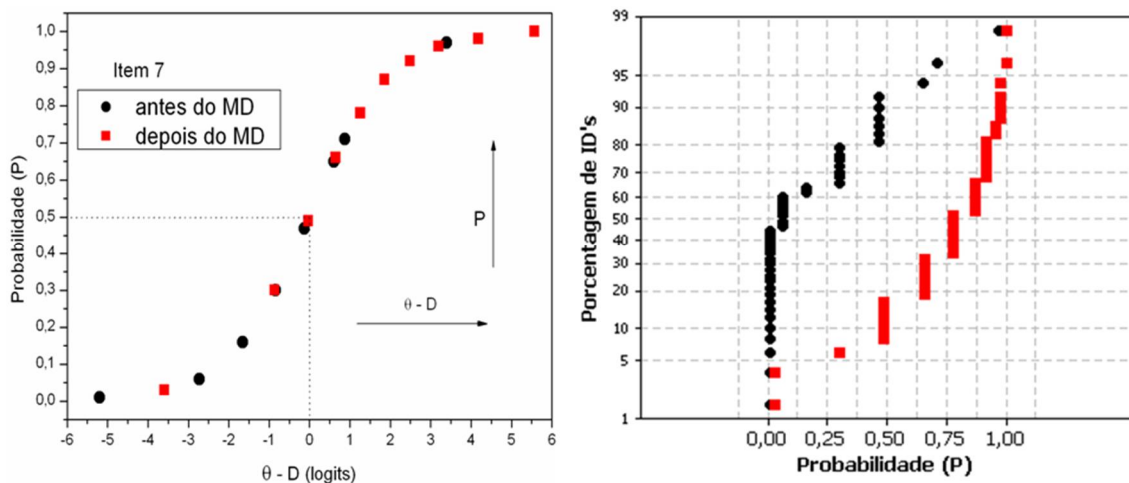


Figura 9. Gráfico $P \times -d$ (à esquerda) e porcentagem de IDø (à direita) que responderam positivamente ao **Item 7** ($P > 0,5$).

Cerca de 90 % dos IDø conseguiram expor os exemplos pedidos. Após a intervenção, apenas oito indivíduos (IDø 32, 45, 55, 65, 69, 81, 90 e 105) não assimilaram a discussão do MD e não responderam satisfatoriamente ao item. É interessante observar que mesmo com um balanço $\theta - D$ negativo, cinco desses IDø se diferem dos outros dois restantes, por serem caracterizados com um $P = 0,49$, um valor de P muito próximo do limiar ($P=0,5$) que garante uma resposta positiva ao item. Em outras palavras, as habilidades desses indivíduos se aproximaram bastante do nível de dificuldade do item, mas não chegaram a ser iguais. Esse comportamento pode ser explicado pelas respostas dadas por esses IDø quando retornaram

como exemplos, equações de 1º grau com coeficientes numéricos (que remetem ao caso da solução particular de uma Eq. Literal) ao invés de coeficientes genéricos representados por letras. Nesse sentido, uma pequena intervenção específica pode ser planejada para esses cinco ID's, com o objetivo de fazer com que estes adquiram a porção de habilidade que falta para que atinjam o limiar de probabilidade e consigam responder satisfatoriamente ao item.

Na **Fig. 10**, são discutidas as respostas dadas ao Item 8 (que convidava o entrevistado a descrever e equacionar uma situação problema que necessitasse do tema para ser solucionada). Os resultados iniciais para este quesito se mostraram ainda mais insatisfatórios do que os últimos dois resultados já que apenas um entre os quarenta e seis ID's atingiu os objetivos do item.

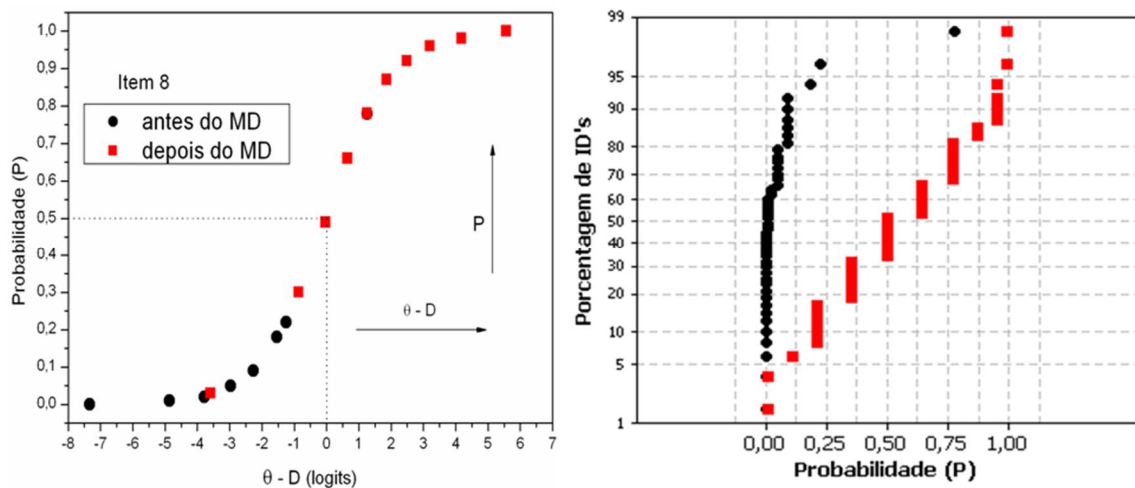


Figura 10. Gráfico $P \times \theta - d$ (à esquerda) e porcentagem de ID's (à direita) que responderam positivamente ao **Item 8** ($P > 0,5$).

Essa é uma indicação de que descrever e equacionar uma situação prática requer uma habilidade maior do grupo de indivíduos analisados do que aquela necessária para expor a definição ou um exemplo puramente matemático. Dos três ID's que souberam dar os exemplos de equações no item anterior, apenas o ID 17 soube descrever e equacionar um problema com Equações Literais do 1º Grau.

Mais negativos ainda foram os resultados quanto às respostas ao Item 9, que pedia que o ID solucionasse a questão elaborada no item anterior. Observa-se no gráfico (**Fig. 11**) que antes do MD, as diferenças $\theta - D$ se concentraram em uma faixa muito negativa de logits, indicando que os ID's tinham uma habilidade muito menor do que a dificuldade deste item.

Em outras palavras, com exceção do ID 17, todos os entrevistados foram classificados com uma probabilidade quase nula ($P \approx 0$) de responderem positivamente ao item. Vinte e

seis dos quarenta e seis ID's da pesquisa, como é o caso do ID 69, tiveram um balanço $\theta - D$ estimado em aproximadamente -8,5 logits. Esse resultado extremamente negativo está relacionado ao fato da grande maioria dos entrevistados não terem conseguido descrever e expressar a situação problema no item anterior, atrelado ao fato de alguns ID's saberem montar a questão, mas não terem habilidade para solucioná-la corretamente.

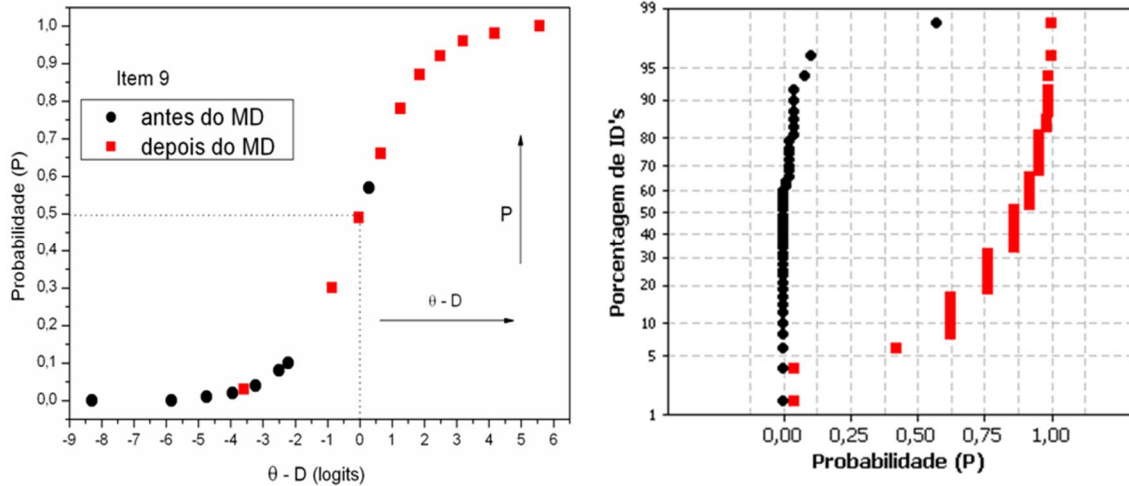


Figura 11. Gráfico $P \times \theta - d$ (à esquerda) e porcentagem de ID's (à direita) que responderam positivamente ao **Item 9** ($P > 0,5$).

Com a aplicação do MD, obteve-se um resultado animador ao verificar que praticamente todos os ID's conseguiram alcançar os objetivos propostos no item a partir do momento que conseguiram solucionar corretamente a situação problema dada no Item anterior.

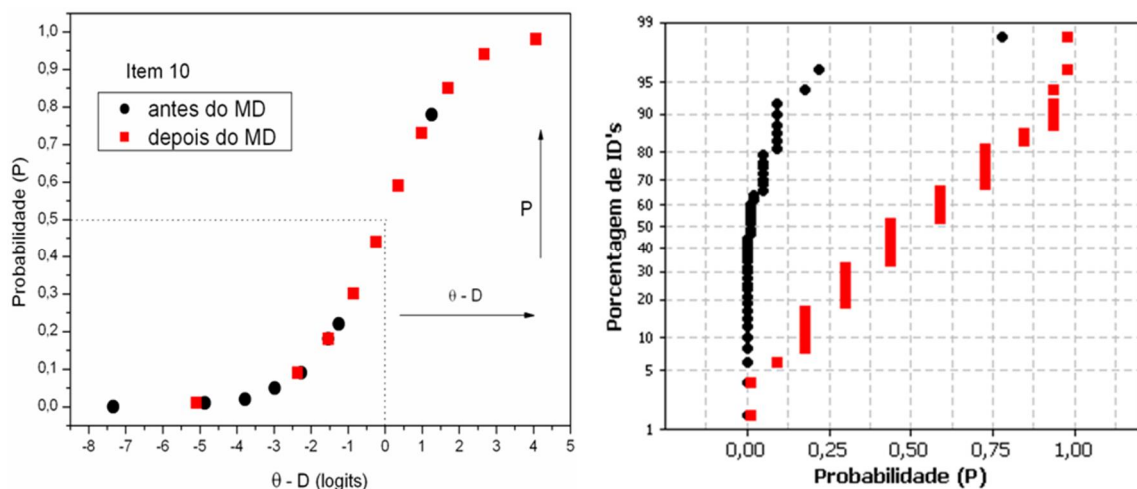


Figura 12. Gráfico $P \times \theta - d$ (à esquerda) e porcentagem de ID's (à direita) que responderam positivamente ao **Item 10** ($P > 0,5$).

Já no Item 10, (**Fig.12**) que pergunta a importância do tema para o aluno, é possível avaliar que apesar dos IDØs conhecerem o conceito e saberem dar exemplos, propor situações-problemas e solucioná-las após o MD, ainda continuaram com a dificuldade de se expressar (externar o que entendem em uma linguagem escrita) quanto à importância do tema para a formação do estudante em nível médio. Observa-se que cerca de 60 % dos IDØs não atingiram êxito nesse quesito mesmo após a aplicação do MD.

4.4 Avaliação do MD e desempenho dos entrevistados

Algumas conclusões importantes com relação ao Q2 podem ser anexadas aos resultados anteriores. Após a aplicação do MD, a análise de Rasch retornou que o livro didático ainda é o maior entrave para a atuação do professor de matemática em se tratando de Equações Literais. Observou-se que o Item 5 (**Tabela 4**) retornou um valor de dificuldade de 2,35 na escala logits, o maior entre todos os itens do Q2. O que se pode discutir é que após intervenções pedagógicas que qualificam e reciclam professores quanto a um conteúdo ou uma nova metodologia em específico, os livros didáticos em circulação podem não apresentar essas novas temáticas de ensino e aprendizagem de matemática que tanto são discutidas e defendidas atualmente na busca por um ensino mais significativo aos alunos.

Na pesquisa de campo, 96% dos entrevistados afirmaram desconhecer outro material didático que tratasse explicitamente de Equações Literais do 1º Grau (Item 12, **Tabela 7**). Essa situação pode dificultar a continuidade da prática docente, uma vez que o conhecimento adquirido pelo professor em uma capacitação é passível de revisões e adaptações quando julgadas necessárias pelo próprio professor que, por sua vez, não dispõe de material didático suficiente e adequado para evoluir em tal processo.

Esse resultado confirmou a nossa hipótese inicial de que os professores necessitavam de um material didático que fosse anexado ao livro didático em uso que tratasse de Equações Literais do 1º Grau de forma consistente quanto ao propósito de qualificá-los para a prática docente, ajudando a desmistificar os conceitos e as formalidades, a importância, o uso correto e significativo, exemplos e aplicações do tema. Ações essas confirmadas pelos 96 % dos IDØs quando responderam que o MD os ajudou a desmistificar o conceito e a importância das Equações Literais do 1º grau (Item 11, **Tabela 7**).

A linguagem utilizada no material foi também planejada inicialmente para que o professor interpretasse com facilidade a proposta, de modo que possa adaptá-la quando julgar conveniente à situação didática.

No Item 15 do Q2, perguntou-se *De zero a dez, qual a sua nota para a proposta do material didático produzido sobre Equações Literais do 1º grau*. Neste quesito, o MD produzido foi bem avaliado pelos professores, que retornaram uma nota média amostral de $9,01 \pm 1,01$ ($n=46$) para o material.

Tabela 7. Resultados percentuais obtidos nos Itens de 11 a 14 e no Item 16 do Q2.

Item	Sim	Não
11. O material didático sobre Eq. Literais do 1º grau enviado o ajudou a desmistificar o conceito e a importância das Equações Literais do 1º grau?	96%	4%
12. Você tem conhecimento de outro material didático que trate de Eq. Literais do 1º grau explicitamente?	4%	96%
13. No geral, a linguagem utilizada no material está adequada para o público alvo (alunos de graduação/professores)?	100%	0%
14. O material dá a oportunidade de o professor adaptá-lo a uma linguagem mais específica para repassar aos alunos do ensino médio?	100%	0%
16. Você usaria este material didático como uma fonte alternativa de apoio didático nas suas aulas de matemática?	98%	2%

Estes resultados indicam que o MD foi adequado para suprir as dificuldades e as necessidades dos professores entrevistados com as Equações Literais do 1º Grau, como planejado e desejado na fase de produção técnica desse material.

A estimativa para a nota média populacional foi calculada no intervalo de (8,71; 9,31), com 95% de confiança. Este é um forte indício de que o MD também poderia ser aplicado com êxito a maiores populações de professores (como seria o caso do uso do MD pelos professores da rede estadual de ensino de Petrolina-PE, por exemplo) para preencher possíveis lacunas do conteúdo em questão, que não foram supridas na formação inicial. Esse tipo de intervenção, eficiente e de baixo custo, pode-se levar em conta com vistas à melhoria do ensino e da aprendizagem de Matemática na nossa região.

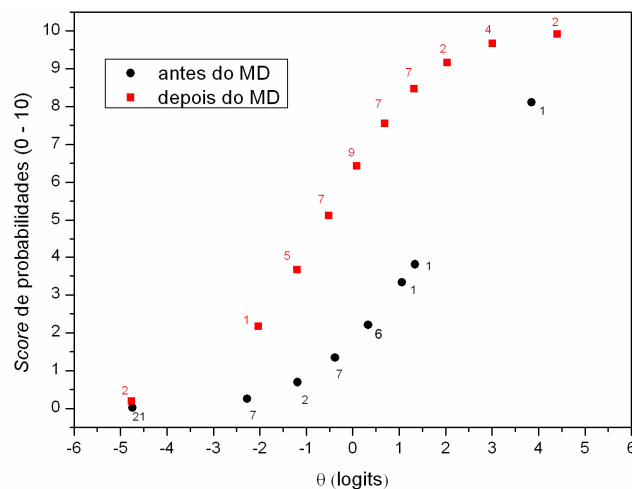


Figura 13. Score total de probabilidades normalizado dos ID's com relação às respostas dadas aos itens de 6 a 10, antes e depois da aplicação do Manual Didático (Q1 e Q2, respectivamente). Os scores foram normalizados em uma escala de 0 a 10.

Na continuidade da pesquisa, a **Fig. 13** mostra o *score* total de probabilidade dos IDø (soma das probabilidades de respostas positivas que um ID retornou aos itens) relacionado aos itens de respostas variantes (itens de 6 a 10 no Q1 e Q2) que discutiam o conhecimento, uso e aplicação do tema. Esse *score* é dado como função de .

Esse *score*¹³⁹ pode ser interpretado como a nota obtida pelos indivíduos da amostra em resposta aos últimos cinco itens do questionário aplicado numa escala normalizada de valores de 0 (zero) a 10 (dez). Os valores próximos aos pontos experimentais indicam o número de indivíduos que obtiveram uma dada nota (ou soma de probabilidades).

A nota média obtida pelo grupo de professores avaliados foi centrada em $0,903 \pm 1,469$ antes do MD e em $6,599 \pm 2,420$ após a intervenção, confirmando que houve uma expressiva evolução na proficiência dos professores para lidar com Equações Literais do 1º Grau, superando barreiras que impediam tal desenvolvimento como, por exemplo, as lacunas na formação inicial e a indisponibilidade de material didático.

Resultados ainda mais expressivos podem ser alcançados se o professor, a partir de então, adquirir um maior nível de familiarização com o tema, buscando outras fontes, propondo edições, inclusões, adaptações e melhoramentos ao MD e as colocarem em prática com seus alunos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados do Q1 indicaram que o fato dos entrevistados terem respondido negativamente aos itens relacionados ao conhecimento, aplicação e importância (Itens de 7 a 10) das Equações Literais do 1º Grau no currículo de matemática no ensino médio não está relacionado à formação acadêmica do professor em outra área do conhecimento, mas ao fato da maioria dos IDØs terem respondido negativamente aos itens que discutiam tópicos da formação inicial e do conhecimento de materiais didáticos que tratassem do tema aliado ao fato dos entrevistados sequer conhecerem o conceito de equações literais (Item 6).

Esse é uma forte indicação de que a deficiência para lidar com este conteúdo relativamente simples e de enorme importância para a formação do estudante em nível médio pode estar relacionada com falhas na formação inicial (graduação) do professor de matemática, onde não houve a capacitação para o tema ou esta foi insuficiente.

De qualquer forma os resultados iniciais se mostraram bastante preocupantes uma vez que o conteúdo em questão se mostra como um assunto de nível relativamente fácil para um profissional matemático em detrimento de outros conteúdos de maior complexidade. Esses resultados acendem o alerta de que investigações sobre outros conteúdos devem ser realizadas com os professores da nossa região com vistas à qualificação profissional e melhoria do ensino-aprendizagem de matemática.

Por outro lado, verificou-se que ações simples de capacitação e formação continuada, como foi o caso da elaboração do Manual Didático, podem ajudar a reverter esse quadro. Isso mostra a importância de se buscar políticas de formação continuada com vistas ao desenvolvimento profissional do professor de matemática na região do Vale do São Francisco.

REFERÊNCIAS

1. CALLINGHAM, R., BOND, T. Research in mathematics education and Rasch measurement. **Mathematic Education Research Journal**, n.18, p. 1610, 2006.
2. WARWICK, J.. Assessing the efficacy of a Student Expectations questionnaire. **Teaching Mathematics and Its Applications**, v.31, p. 106-117, 2012.
3. HAINES, C.; CROUCH, R.. Recognizing constructs within mathematical modelling. **Teaching Mathematics and its Applications**, v.20, n.3, p. 129-138, 2001.
4. EDWARDS, A.; ALCOCK, L.. Using Rasch analysis to identify uncharacteristic responses to undergraduate assessments. **Teaching Mathematics and Its Applications**, v.29, p. 165-175, 2010.
5. RYAN, J., WILLIAMS, J. Mathsmaps for diagnostic assessment with pre-service teachers: Stories of mathematical knowledge. **Mathematics Education Research**, v.9, p. 956109, 2007.
6. VAN STIPHOUT, I.; DRIJVERS, P.; GRAVEMEIJER, K.. The Development of Students' Algebraic Proficiency. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v.8, n. 2-3, 2014.
7. ARAÚJO, P. C.; IGLIORI, S. B. C. Complementaridade: pesquisa qualitativa e quantitativa na educação matemática. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**. São Paulo, v.1, n.1, p. 113-122, 2012.
8. SILVA, C. P. Sobre a história da matemática no Brasil após o período colonial. **Revista Brasileira de História da Ciência**. Rio de Janeiro, v.1, n.16, p. 21-44, 1996.
9. MIORIM, Maria Ângela. **Introdução à História da Educação Matemática**. São Paulo: Atual, 1998.
10. SOARES, Maria Susana Arrosa (Org.). **A Educação Superior no Brasil**. 1. ed. Brasília: Capes, 2002.
11. D'AMBROSIO, U. **Uma história concisa da matemática no Brasil**. 2. ed. Petrópolis/RJ: Vozes, 2011.
12. D'AMBRÓSIO, U. História da matemática no Brasil: uma visão panorâmica até 1950. **Saber y Tiempo**, vol. 2, n° 8, p. 7-37, 1999.
13. FERREIRA, V. L.; PASSOS, L. F. A disciplina Complementos de Matemática no curso de pedagogia (1939-1961): o pedagogo como professor de matemática. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v.16, n.1, p. 75-93, 2014.
14. D'AMBRÓSIO, Ubiratam. **Educação matemática: da teoria à prática**. 23 ed. Campinas-SP, PAPIRUS, 2012.

15. OLIVEIRA, G. M.; OLIVEIRA A. T. C. C. A matemática na formação inicial de professores dos anos iniciais: reflexões a partir de uma análise de teses e dissertações defendidas entre 2005 e 2010 no Brasil. **EM TEIA ó Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**. Recife-PE, vol. 4, n. 1, 2013.
16. MACHADO, N. J. **Educação: projetos e valores**. 5 ed. São Paulo, Escrituras, 2004.
17. BRASIL. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais: **Matemática**. Rio de Janeiro: DP&A, 2000.
18. SANTOS, S. R. M.; COSTA, P. M. D. Sobre a didática e as didáticas específicas: o que está em questão na formação docente? **Revista de Educação, Ciências e Matemática**. Rio de Janeiro-RJ, v.3 n.2, 2013.
19. CRUZ, F. M. L.; MONTEIRO, C. E. F. Processos formativos de avaliação da aprendizagem de matemática segundo licenciandos e professores formadores. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**. São Paulo, v.6, n.2, p.85-109, 2013.
20. DINIZ, R. S.A Matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental: as professoras, suas concepções e práticas. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**. Rio de Janeiro-RJ, v.3 n.2, 2013.
21. FERNANDES, N. L. R.; PEDROSA, R.S. Ser professor iniciante: um estudo sobre a constituição da docência de professores de Matemática. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**. Rio de Janeiro-RJ, v.3 n.2, 2013.
22. BORTOLETTO, A.; CARVALHO, W. L. P. Uma proposta de formação continuada de professores de ciências e matemática na interface do agir comunicativo e das questões sociocientíficas. **Amazônia - Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**. Belém-PA v.9, n.17, p.141-160, 2012.
23. FIORENTINI, D. A Pesquisa e as Práticas de Formação de Professores de Matemática em face das Políticas Públicas no Brasil. **Bolema**. Rio Claro-SP, v.21, p. 43-70, 2008.
24. RESENDE, G.; MESQUITA, M. G. B. Principais dificuldades percebidas no processo ensino-aprendizagem de matemática em escolas do município de Divinópolis, MG. **EM TEIA ó Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**. Recife-PE, vol. 3, n. 3, 2012.
25. MORETTO, Vasco Pedro. **Prova: um momento privilegiado de estudo não um acerto de contas**. 2. ed. Rio de Janeiro, RJ: DP & A, 2002.
26. FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3.ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2009. (Coleção Formação de Professores).
27. FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino de matemática. **Boletim da Sociedade Brasileira de Educação Matemática**. São Paulo: SBEM-SP, n.7, p. 1-3, 1990.

28. CAVALCANTI, G. M. D.; NASCIMENTO, L. C. Expectativas e percepções de professores de Matemática e Ciências sobre o programa Projovem campo - saberes da terra. **EM TEIA ó Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**. Recife-PE, vol. 4, n. 3, 2013.
29. LOPES, A. L.; FERREIRA, A. C. As atitudes em relação à matemática: um estudo com alunos de 6º e 9º anos do Ensino Fundamental de escolas públicas da cidade de Mariana ó MG (sede). **Revista da Educação Matemática da UFOP**. Ouro Preto-MG, v.1, 2011.
30. PIVATTO, B.; SCHUHMACHER, E. Conceitos de teoria da aprendizagem significativa sob a ótica dos mapas conceituais a partir do ensino de Geometria. **REVEMAT**. Florianópolis-SC, v. 8, n. 2, p. 194-221, 2013.
31. SILVA, H. Uma Caracterização do Centro de Educação Matemática ó CEM (1984ó1997) como uma Comunidade de Prática de Formação Continuada de Professores de Matemática. **Bolema**. Rio Claro-SP, v. 23, n. 35A, p. 185 - 218, 2010.
32. TONINI, A. M. Percepção discente sobre a Licenciatura em Matemática na modalidade a distância. **REVEMAT**. Florianópolis-SC, v. 8, n. 2, p. 162-176, 2013.
33. TEIXEIRA, A. C.; SANTOS, C. A. B. Indicativos emergentes das questões do SARESP 2010 para o 9º ano do Ensino Fundamental em relação à mobilização de conhecimentos matemáticos. **REVEMAT**. Florianópolis-SC, v.8, ed. especial, p. 153-174, 2013.
34. PEREZ, G. Prática reflexiva do professor de matemática. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (org). **Educação matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004.
35. BRUM, W. P.; SCHUMACHER, E. A Engenharia Didática como campo metodológico para o planejamento de aula de Matemática: análise de uma experiência didática para o estudo de geometria esférica. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**. São Paulo, v.6, n.2, 60-84, 2013.
36. VIALI, L.; CURY, H. C. Professores de Matemática em Formação Continuada: uma análise de erros em conteúdos de probabilidade. **EM TEIA ó Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**. Recife-PE, vol.1, n.1, 2011.
37. SILVA, R. C. Professores que vão ensinar Matemática nos anos iniciais: Educação Matemática nos cursos de pedagogia. **REVEMAT**. Florianópolis-SC, v. 8, n. 2, p. 117-133, 2013.
38. SEIDEL, D. J. ; ROSA, M. Percebendo o professor de Matemática online usando tecnologias durante a cyberformação. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**. São Paulo, v.6, n.2, 110-143, 2013.
39. OLIVEIRA, A. T. E. A formação do professor e a formação do professor que ensina matemática. **Evidência**, Araxá, v. 7, n. 7, p. 187-216, 2011.

40. GARCIA, C. M. A formação de professores: novas perspectivas baseadas na investigação sobre o pensamento do professor. In: NÓVOA, Antônio. (Org.). **Os professores e sua formação**. Lisboa: Dom Quixote, 1992. p.51-76.
41. DIAS, E. R. **Formação continuada de professores de matemática: um foco no ensino dos números inteiros relativos**. 2004. 112f. Dissertação (Mestrado em educação). Universidade de Uberaba.
42. MELO, G. N. Formação inicial de professores para a educação básica: uma revisão radical. São Paulo, **Perspectivas**. Vol.14, n1. 2000.
43. PRADA, L. E. A. Formação de Docentes em Serviço. In: **Formação participativa de docentes em serviço**. Taubaté, SP: Cabral Editora Universitária, 1997. p. 87-103.
44. BRZEZINSKI, Iria; GARRIDO, Elsa. Análise dos trabalhos do GT Formação de Professores: o que revelam as pesquisas do período 1992-1998. **Revista Brasileira de Educação**. São Paulo: Autores Associados, n.18, p.82-100, 2001.
45. BULOS, A. M. M. **Professores Generalistas e a Matemática nas séries iniciais: uma reflexão**. 2006. Dissertação (Mestrado em ensino, filosofia e história das ciências) Universidade Federal da Bahia.
46. D'AMBROSIO, U. **Da Realidade a Ação: Reflexões sobre Educação Matemática**. Campinas: Sannus, 1986.
47. AGNE, L. S. Relações entre concepções sobre a natureza do conhecimento matemático, propostas didáticas e concepções de ensino em dissertações em Educação Matemática do PPGEDUCEM da PUCRS. **REVEMAT**. Florianópolis-SC, v. 8, n. 2, p. 117-134, 2013.
48. ZAMPA, R. L. G.; VIEIRA, C. F. M. A Geometria na Matemática das séries iniciais do Ensino Fundamental. **Revista da Educação Matemática da UFOP**. Ouro Preto-MG, v.1, 2011.
49. TURRIONI, A. M. S. **O Laboratório de Educação Matemática na Formação de Professores**. Rio Claro, 2004. Dissertação de Mestrado, Unesp.
50. MIRANDA, P. R.; GAZIRE, E. S. Saúde e números: uma proposta Interdisciplinar de ensino de Matemática para o Proeja. **Revista da Educação Matemática da UFOP**. Ouro Preto-MG, v.1, 2011.
51. VILLELA, L. M. A.; PAIVA, A. M. S. Gestão da Formação de Professores de Matemática: A Experiência da Universidade Severino Sombra. **Pesquisas e Práticas em Educação Matemática**. Vassouras-RJ, v.1, n.1, p. 49-63, 2007.
52. MENDES, I. A. **Tendências Metodológicas no Ensino de Matemática**. Belém: EdUFPA, 2008.
53. VARGAS, D. E. C.; SILVA, G. A. Um estudo de caso sobre aprendizagem de funções com o software winplot e Planilha eletrônica em um curso técnico em informática. **Revista da Educação Matemática da UFOP**. Ouro Preto-MG, v.1, 2011.

54. RABAIOLLI, L. L.; STROHSCHOEN, A. A. G. A formação de professores dos anos iniciais do ensino fundamental e o ensino da geometria. **REVEMAT**. Florianópolis-SC, v. 8, n. 2, p. 63-78, 2013.
55. MENEZES, R. O.; BRAGA, R. M. Modelagem Matemática na inserção de tecnologias da informação para o ensino de Geometria Analítica. **EM TEIA ó Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**. Recife-PE, vol. 4, n.1, 2013.
56. FARIA, J. E. S. Etonomatemática e Educação do Campo: e agora, José? **EM TEIA ó Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**. Recife-PE, vol. 4, n. 3, 2013.
57. PEREIRA, M. K. S. A utilização de softwares matemáticos nos ensinos Fundamental e Médio. **Revista da Educação Matemática da UFOP**. Ouro Preto-MG, v.1, 2011.
58. OLIVEIRA, A. T. C. C. Saberes e Práticas formadoras para o ensino de Matemática na Escola Básica. **EM TEIA ó Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**. Recife-PE, vol.2, n.3, 2011.
59. SOUZA, N. M.; ESTEVES, A. K.; SILVA, R. G. Conhecimentos de graduandos para o ensino de matemática: experiências e possibilidades de integração na formação inicial. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 16, n.1, 2014.
60. LDB - Leis de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996. D.O.U. de 23 de dezembro de 1996. disponível em <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm> acesso em 31 julho de 2014.
61. MALUF, A. C. M. Brincar: prazer e aprendizado. **Revista Criança do Professor de Educação Infantil**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2003.
62. MIRANDA, P. R.; REIS, S. L. O processo de Ensino-aprendizagem com o uso de novas tecnologias o uso de softwares no ensino: aliado ou vilão? **Revista da Educação Matemática da UFOP**. Ouro Preto-MG, v.1, 2011.
63. ZUFFI, E. M.; ONUCHIC, L. R. O Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas e os Processos Cognitivos Superiores. **UNIÓN ó Revista Iberoamericana de Educação Matemática**. San Cristobal de La Laguna-Espanha, n 11, p.79-97, 2007.
64. RAYMUNDO, M. F. S. M. Aplicações Matemáticas na Área da Saúde. **Pesquisas e Práticas em Educação Matemática**. Vassouras-RJ, v.1, n.1, p. 67-70, 2007.
65. FIGUEIRA, S. T. S. Professores em cena: entre conversas e modos de aprender a ensinar. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**. Rio de Janeiro-RJ, v.3 n.2, 2013.
66. DUTRA, D. S. A.; VIANA, M. C. V. Resolução de Problemas Matemáticos em ambientes virtuais de aprendizagem para a aprendizagem matemática na EAD. **Revista da Educação Matemática da UFOP**. Ouro Preto-MG, v.1, 2011.

67. LEÃO, A. S. G.; BISOGNIN, V. Construção do conceito de função no ensino fundamental por meio da metodologia de resolução de problemas. **Educação Matemática em Revista ó RS**. Canoas-RS, v.1, n.10, p.27-35, 2009.
68. Só Matemática. **George Polya**. Disponível em <<http://www.somatematica.com.br/biograf/polya.php>> Acesso em 24 de julho de 2014.
69. ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In Bicudo, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999.
70. MILANI, W. N. **A Resolução de problemas como ferramenta para a aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas no ensino médio**. 2011, 127f. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática.
71. SILVA, A. V.; COSTA, L. F. M. A resolução de problemas como metodologia de ensino da Matemática: o caso dos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental da Escola Estadual oSão José Operário. **REVEMAT**. Florianópolis-SC, v. 8, n. 2, p. 134-152, 2013.
72. SILVA, F. A. F.; SANTIAGO, M. L. S.; SANTOS, M. C. Análise de itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM que envolvem o conceito de números racionais à luz dos seus significados e representações. **REVEMAT**. Florianópolis-SC, v. 8, ed. esp., p. 190-208, 2013.
73. SANTOS, F. P.; VIANA, M. C. V. Interdisciplinaridade e Contextualização no currículo de Matemática de um curso de Ensino Médio integrado ao Técnico. **Revista da Educação Matemática da UFOP**. Ouro Preto-MG, v.1, 2011.
74. CORRADI, D. K. S. Investigações Matemáticas. **Revista da Educação Matemática da UFOP**. Ouro Preto-MG, v.1, 2011.
75. BELINE, W.; CYRINO, M. C. C. T. A escrita como estratégia pedagógica no ensino de Matemática e Estatística com formandas do curso de pedagogia: Analisando a produção escrita de Laura. **Educação Matemática em Revista ó RS**. Canoas-RS, v.1, n.10, p.9 -17, 2009.
76. ABREU, R. L. O processo de aprendizagem da matemática na educação básica: raízes de suas dificuldades e mecanismos para sua superação. **Cadernos do IME - Série Matemática**. v.16, 2004.
77. VELOSO, D. S.; FERREIRA, A. C. Uma reflexão sobre as dificuldades dos alunos que se iniciam no estudo da álgebra. **Revista da Educação Matemática da UFOP**. Ouro Preto-MG, v.1, 2011.
78. CURI, E.; SANTOS, C. A. B. Algumas reflexões sobre o tratamento de conteúdos do ensino básico em um curso de Licenciatura em Matemática. **EM TEIA ó Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**. Recife-PE, vol. 2, n. 2, 2011.

79. DOBARRO, V. R.; BRITO, M. R. Um estudo sobre a habilidade matemática na solução de problemas de Geometria. **RENCIMA**, v.1,n.1, p. 34-46, 2010.
80. QUEIROZ, G.; CATARINO, G. F. C. A formação inicial de professores de Física a partir da prática de projetos. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**. Rio de Janeiro-RJ, v.2 n.2, 2012.
81. POMMER, W. M. equações diofantinas lineares: um viés históricoepistemológico como recurso para introduzir diferentes estratégias de resolução de problemas. **REnCiMa**, v.3,n.1, p. 28-43, 2012.
82. CHEVALLARD, Y. Sobre a Teoria da Transposição Didática: Algumas Considerações introdutórias. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**. Rio de Janeiro-RJ, v.3 n.2, 2013.
83. FERNANDES, V. M. J.; CURI, E. Algumas reflexões sobre a formação inicial de professores para ensinar Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. **REnCiMa**, v.3, n.1, p. 44-53, 2012.
84. FERREIRA, D. H. L.; JACOBINI, O. R. Modelagem Matemática e Ambiente de Trabalho: uma combinação pedagógica voltada para a aprendizagem. **REnCiMa**, v.1,n.1, p. 9-26, 2010.
85. Portal de Cidadania Social. **A Cidadania na estratégia de desenvolvimento do capital social**. Disponível em <http://cidadania-social.fc.ul.pt/alfredacruz/index.php?option=com_content&task=view&id=32&Itemid=54>. Acesso em 24 de julho de 2014.
86. MANDARINO, M. C. F.; COELHO, F. R. F. L. A Provinha Brasil de Matemática: reflexões com base numa aplicação piloto. **EM TEIA ó Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**. Recife-PE, vol.2, n.3, 2011
87. TAMBARUSSI, C. M.; KLÜBER, T. E. Focos da pesquisa stricto sensu em Modelagem Matemática na Educação Matemática brasileira: considerações e reflexões. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v.16, n.1, p. 209-225, 2014.
88. MEDEIROS, K. M. O Contrato Didático e a Resolução de Problemas Matemáticos em Sala de Aula. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 9/10, p. 32-39, 2001.
89. MARANHÃO, M. C. S.; MACHADO, S. D. A. Capacidades algébricas fundamentais para professores. **REVEMAT**. Florianópolis-SC, v. 8, ed. esp., p. 50-63, 2013.
90. BRUM, L. D.; CURY, H. N. Análise de erros em soluções de questões de Álgebra: uma pesquisa com alunos do Ensino Fundamental. **REnCiMa**, v.4,n.1, p. 45-62, 2013.
91. CAMARGOS, C. B. R. Matemática e Música: um projeto de modelagem sob uma perspectiva do pensamento analógico. **Revista da Educação Matemática da UFOP**. Ouro Preto-MG, v.1, 2011.

92. FERREIRA, R. B.; ALLEVATO, N. S. G. O Ensino de Funções através da Resolução de Problemas na Educação de Jovens e Adultos. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**. São Paulo, v.1, n.2, p. 198-210, 2012.
93. MASTROIANNI, M. T. M. R.; OLIVIERIA, G. P. Resolução de problemas nas aulas de matemática dos anos iniciais do ensino fundamental: a influência das concepções dos professores na prática observada. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**. São Paulo, v.2, n.2, p. 18-27, 2013.
94. DANTE, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas de matemática**. 12. ed. São Paulo: Ática, 2007.
95. SILVA, A. M.; LINS, R. C. Sobre a dinâmica da produção de significados para a Matemática. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**. São Paulo, v.6, n.2, 2013.
96. SANTOS, C. A. B.; CURI, E. Proposta Curricular de Matemática: Uma Análise da Relação Institucional esperada para as noções de área e perímetro. **REnCiMa**. v.1, n.1, p. 27-33, 2010.
97. JORDÃO, A. L. I.; BIANCHINI, B. L. Um estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de Sistemas Lineares 3×3 no 2º ano do Ensino Médio. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**. São Paulo, v.1, n.1, p. 5-17, 2012.
98. BUENO, R. W. S. A Construção histórica do conceito de função. **Educação Matemática em Revista ó RS**. Canoas-RS, v.1, n.10, p.37-47, 2009.
99. PAULA, C. C. P.; LOPES, JURACELIO, F. L.; OLIVEIRA, D. P. A. Resoluções de Equação do 2º grau: método do passado com a tecnologia do presente. **Revista da Educação Matemática da UFOP**. Ouro Preto-MG, v.1, 2011.
100. VALE, I. Padrões em contextos figurativos: um caminho para a generalização em matemática. **REVEMAT**. Florianópolis-SC, v. 8, ed. esp., p. 64-81, 2013.
101. FERREIRA, F. A.; SANTOS, C. A. B. Uma reflexão teórica acerca do papel dos registros de representação semiótica em atividades de demonstrações matemáticas em Geometria Euclidiana. **REVEMAT**. Florianópolis-SC, v. 8, ed. esp., p. 177-193, 2013.
102. STEWART, J. **Cálculo**. Vol. 1. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.
103. BUENO, S.; PIRES, C. M. C. O currículo enculturador de matemática na EJA. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 2, n.1, p. 14-26, 2014.
104. HEFEZ, Abramo. **Elementos de aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011. 176 p.
105. PARENTE, G. **Aprendendo Matemática: 7º ano do ensino fundamental**. ed. renovada, São Paulo: FTD, 2007.
106. DANTE, L. R. **Tudo é Matemática: 8º ano do ensino fundamental**. 3 ed. São Paulo: Ática, 2009.

107. BASSANEZI, R. C.. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.** São Paulo, SP: Contexto, 2002. 389 p.
108. HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física.** 9 ed.v. 1 Rio de Janeiro: LTC, 2012.
109. SEARS, Francis Weston et al; **Física 1.** 12 ed. São Paulo: Addison-Wesley, 2008. 329p.
110. NUSSENZVEIG, H. M..**Curso de física básica.** São Paulo: Edgard Blücher, ed.4, v.1, 2002.
111. HEWITT, Paul G. **Física conceitual.** 9. ed. Porto Alegre: Bookman, 2002, 685 p.
- 112.PAVANELLO, M. R.; LOPES, S. E.; ARAÚJO, N. S. R. Leitura e interpretação de enunciados de problemas escolares de matemática por alunos do ensino fundamental regular e educação de jovens e adultos (EJA). **Educar em Revista**, Curitiba, Brasil, n. Especial 1/2011, p. 125-140, 2011.
113. BAKER, F. B.; KIM, S. H. Item Response Theory: Parameter Estimation Techniques. 2edn. New York: Marcel Dekker, 2004.
114. ANDRADE,D. F. ; KARINO,C. A. **Teoria de Resposta ao Item.** Nota Técnica do Ministério da Educação. 2012. Disponível em<http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/nota_tecnica/2011/nota_tecnica_tri_enem_18012012.pdf>Acesso em 20 fevereiro de 2014.
115. KLEIN, R. Utilização da Teoria da Resposta ao Item no Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica ó Saeb. **Meta-Avaliação**, Rio de Janeiro, v.1, n.2, p. 125-140, 2009.
116. RASCH, G.. **Probabilistic Models for Some Intelligence and Attainment Tests** (1960) Expanded Edition (1980) with Foreword and Afterword by B.D. Wright, the University of Chicago Press, Chicago.Copenhagen, Danish Institute for Educational Research, 1980.
117. Fourth Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1961, Berkeley-California, Proceedings, 4: 321-334. RASCH, G., 1961. **On general laws and the meaning of measurement in psychology**, Berkeley, University of California.
118. TAVARES. C.Z.. Teoria da resposta ao item: uma análise crítica dos pressupostos epistemológicos. **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, v. 24, n. 54, p. 56-76, 2013.
119. FISCHER, G.; MOLENAAR, I.. Rasch models: **foundations, recent developments and applications.** New York: Springer, 1995.
120. MYUNG, J. Tutorial on maximum likelihood estimation. **Journal of Mathematical Psychology**, v. 47, n.1, p. 90-100. 2003.

121. P. J. GREEN. Iteratively Reweighted Least Squares for Maximum Likelihood Estimation, and some Robust and Resistant Alternatives. **Journal of the Royal Statistical Society**. Series B (Methodological), v. 46, n.2, p. 149-192.1984.
122. GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2010.
123. MOREIRA, P. C; DAVID, M. M. M. S. **A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. (Coleção Tendências em Educação Matemática).
124. ARAMAN, E. M. O.; BATISTA, I. L. Contribuições da História da Matemática para a Construção dos Saberes do Professor de Matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 27, n. 45, p. 1-30, 2013.
125. BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais 3º e 4º ciclos (5ª a 8ª séries)** ó Brasília: MEC/SEF, 1998.
126. SILVA JUNIOR, C. G.. O livro didático de matemática e o tempo. **Revista de Iniciação Científica da FFC**, v. 7, n. 1, p.13-21, 2007.
127. DANTE, L. R.. Livro didático de matemática: uso ou abuso? **Em Aberto**, Brasília, ano 16, n.69, jan./mar. 1996.
128. MOTTA, V. R; FREITAG, B.; COSTA, W. F..**O livro didático em questão**. 3. ed. São Paulo: Cortez, 1997.
129. RIBEIRO, A. J.. Equação e conhecimento matemático para o ensino: relações e potencialidades para a Educação Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 42b, 2012.
130. SANTOS, C. A.; VALEIRAS, N.. Currículo interdisciplinar para licenciatura em ciências da natureza. **Revista Brasileira de Ensino Física**. São Paulo, v. 36, n. 2, junho, 2014.
131. XVI ENDIPE - Encontro Nacional de Didática e Práticas de Ensino - UNICAMP - Campinas ó 2012. XAVIER, C. R. S. **Os saberes matemáticos do professor pedagogo: reflexões sobre a formação inicial e a formação continuada**. 2012.
132. LLANTADA, M.; **Pueblo y Educación**: La Habana. p. 46,1986.
133. BACHELARD, G.; **A formação do espírito científico**. Ed., Controponto: Rio de Janeiro, p.27, 1996.
134. BARBEIRO, E. C. C.. **A aprendizagem das equações do 1º grau a uma incógnita: uma análise dos erros e dificuldades de alunos do 7º ano de Escolaridade**. 2012. 94f. Mestrado em Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e Secundário. Universidade de Lisboa ó Portugal.
135. MAYER, J. P. jMetrik 3.0. Disponível em<<http://www.itemanalysis.com/>> Acesso em: 13 de agosto de 2014.

136. W. S. Gosset, *Biometrika* 6, 1 (1908).
137. R. A. Fisher, *Metron* 5, 90 (1925).
138. FISHER, W.P. Rating scale instrument quality criteria. **Rasch Measurement Trans.**, 21(1), 1095, 2007.
139. AZIZ, A. A., Insights into Engineering Education Learning Outcomeø Assessment with Rasch Model. **Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology**, 6(19), 3520-3526, 2013.
140. FREITAG, B.; MOTA, V. R.; COSTA, W. F. **O livro didático em questão**. 3. ed. São Paulo: Cortez, 1997.

APÊNDICE A 6 MANUAL DIDÁTICO DE EQUAÇÕES LITERAIS DO 1º GRAU



Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional



Equações Literais

e suas Aplicações
Manual Didático - versão 01



2014

Universidade Federal do Vale do São Francisco ó UNIVASF

Coordenação do PROFMAT - UNIVASF

Prof. Dr. Severino Cirino de Lima Neto

Prof. Me. Evando Santos Araújo

Impresso no Brasil ó Tiragem: 100 exemplares

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional / UNIVASF

Av. Antonio Carlos Magalhães, 510, Santo Antônio

CEP: 48.902-300, Juazeiro ó BA - Brasil.

CEP. 48.902-300

E-mail: profmat@univasf.edu.br

Tel.: (74) 2102-7649

**MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL/ UNIVASF**

MANUAL DIDÁTICO

1.

**Equações Literais e suas
Aplicações**

Autores:

Manoel Pereira da Silva Filho
Prof. Evando Santos Araújo (orientador)

EMENTA

Orientação e discussão dos conceitos e aplicações de Equações Literais do 1º grau.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✓ Desmistificar o conceito e a importância de Equações Literais para a formação do aluno em nível médio;
- ✓ Situar-se no processo de ensino e aprendizagem das Equações Literais;
- ✓ Solucionar problemas que envolvam Equações Literais;
- ✓ Conhecer práticas pedagógicas alternativas com possibilidade de inserção no ambiente escolar.

APRESENTAÇÃO

Este Manual Didático é destinado aos profissionais que ministram aulas de matemática no Ensino Básico e têm como objetivo desmistificar o uso de Equações Literais em sala de aula. Serão abordados temas como o significado de Equação Literal, as características e a importância de ensinar esse tipo de equação aos alunos, bem como um tutorial para auxiliar o professor na solução de problemas, usando os passos algébricos corretos. Ao final, serão apresentados diversos usos e aplicações através de exemplos e exercícios propostos.

Note que em cada exemplo e exercício proposto, é explicitado o uso/aplicação da Equação Literal em questão. Essa forma de apresentação das questões, visa auxiliar o professor na busca por maiores informações implícitas à situação problema e que podem enriquecer a didática do conteúdo em questão. Além disso, esse método ajuda o aluno a perceber as aplicabilidades e a importância desse estudo para a sua formação.

Boa aula!

Manoel Filho
Evando Araújo

1. O QUE SÃO EQUAÇÕES LITERAIS?

As Equações Literais de uma variável real são equações (expressões ou fórmulas) que possuem, além da variável (ou incógnita) em questão, coeficientes (ou parâmetros) representados de forma genérica por letras, e, por isso recebem o nome de Literais.

Esse processo de resolução de uma dada fórmula para uma dada letra que representa a variável, considerando as outras letras como representantes de constantes (valores conhecidos) é chamado de *Resolução de Equações Literais*.

Em uma linguagem mais simbólica, elas podem ser entendidas também como receitas matemáticas para se encontrar o valor numérico de uma variável em função de quantidade(s) dada(s). A letra que representa a variável em questão quase sempre significa algum tipo de quantidade do mundo real tais como volume, temperatura, pressão, quantidade de juros, um investimento ganho, etc. Esta variável possui uma relação estabelecida com outras quantidades que também são atribuídas letras (ou nomes) na receita.

O fato é: se soubermos os valores de todas as quantidades envolvidas exceto a de uma delas, podemos lançar esses valores na equação (que também pode ser entendida como a lei

de formação do problema) e encontrar o valor da quantidade indeterminada em função das quantidades dadas.

Dessa forma, as Equações Literais podem ser entendidas como fórmulas-padrão que explicam algo e caracterizam algum fenômeno. Por exemplo, em geometria, se quisermos calcular o perímetro (P) de um quadrado em função dos seus lados (l) usamos a expressão literal $P=4l$. O importante de se mencionar aqui é que muitas vezes, na prática, estamos preocupados em saber a dimensão do lado l , dado um valor de P .

Por exemplo, quando se quer construir um terreno em forma de um quadrado com maior lado possível respeitando os recursos financeiros disponíveis (geralmente os recursos financeiros são escassos) para cercar/murar todo o terreno é óbvio que se deve verificar o preço do material por unidade de perímetro e determinar qual o maior perímetro que se pode obter com a quantia em dinheiro que se tem em mãos. Com o valor de P definido pode-se calcular o valor de l que resolve o problema. Só que para tal, teríamos antes que explicitar l em função de P , pela expressão $l=P/4$.

Daí a flexibilidade e a eficácia de se trabalhar com Equações Literais, visto que sempre podemos escolher uma das letras que representam as grandezas envolvidas como variável e as outras restantes como constantes a determinar (valores que serão dados para encontrarmos o valor numérico da variável em questão).

Essas equações têm sua grande importância quando usadas para generalizar e modelar matematicamente diversos fenômenos e situações em todas as áreas do conhecimento. Uma vez modelado, as informações sobre um dado fenômeno podem ser obtidas através da solução da equação que o representa. Além disso, os alunos podem checar diversas informações que estão implícitas na situação pela análise das relações entre as quantidades envolvidas e entender completamente o problema de forma lógica e crítica, o que seria difícil de se obter apenas com quantidades dadas numericamente.

Por exemplo, a equação $s = s_0 + vt$ modela a situação que descreve a posição final de um móvel em função do tempo em movimento uniforme (MU). Nesse caso a letra s representa a posição final do móvel, a letra s_0 representa sua posição inicial, v a velocidade (constante) e t o tempo. Observe que nesse caso, a posição inicial e a velocidade constante do móvel devem ser quantidades conhecidas no problema. Com algumas manipulações algébricas podemos explicitar o valor de t em função das outras grandezas, e assim, teremos $t = \frac{s - s_0}{v}$. Com a equação nesse novo formato, além de calcularmos o tempo

necessário para se percorrer determinado deslocamento ou trajetória, podemos afirmar que nessa lei, a variável t é diretamente proporcional à variação de espaço $(s - s_0)$ percorrido, isto é, quanto maior o deslocamento, maior o tempo gasto para percorrê-lo. Além disso, podemos observar que o tempo é inversamente proporcional a v , isto é, quanto maior a velocidade menor o tempo gasto no deslocamento $(s - s_0)$ do móvel.

Tanto no exemplo do cálculo do lado do quadrado quanto no cálculo do tempo neste último exemplo, podemos perceber as informações que estão implícitas no problema e que podem ser colocadas à tona pelo professor em sala de aula no momento da explicação.

Note também que essas conclusões e interpretações só foram possíveis a partir do momento em que se conseguiu explicitar uma variável em função das outras. O seu aluno também só chegará a essas conclusões por si só, a partir do momento em que aprender os procedimentos necessários para isolar a variável em questão. Por isso, não menos importante do que conceituar uma Equação Literal é saber os passos para isolar a variável em questão e solucionar o problema.

Os algebrismos necessários para se chegar à solução de uma Equação Literal geralmente se resumem em cinco passos, descritos a seguir.

2. SOLUCIONANDO UMA EQUAÇÃO LITERAL

Com o objetivo de facilitar a resolução de uma equação literal, apresentamos a seguir uma proposta de passo a passo. Os passos não precisam seguir necessariamente a ordem apresentada. É importante destacar que o professor tem total autonomia para escolher os passos que julgar convenientes, a fim de alcançar em cada caso, a solução de forma com que os alunos a compreendam.

Nesse sentido, podem aparecer no decorrer da solução, situações que necessitem, por exemplo, de um balanceamento da equação, do uso da propriedade distributiva, das operações com frações, dentre outros algebrismos matemáticos.

Segue a proposta de passo a passo para resolução de Equações Literais:

Passo 1. Leia o problema atentamente. Releia o problema para identificar o que ele pede para ser solucionado.

Passo 2. Escolha uma letra para representar a variável desconhecida no problema (em geral, usa-se a letra x para representá-la).

Passo 3. Traduza o texto do problema para a linguagem algébrica em forma de equação matemática equivalente. Em qualquer interpretação do problema que remeta/envolva a variável em questão, devemos ter o cuidado de sempre usar a mesma letra para representar a mesma variável.

Passo 4. Resolva a questão utilizando as regras adequadas e encontre a solução pedida:

4.1 Observe se na equação existem expressões que estão entre parênteses. Caso existam, desmembre-as utilizando a propriedade distributiva da multiplicação;

4.2 Verifique se a equação envolve frações. Neste caso, a orientação é determinar o m.m.c. entre todos os denominadores de todos os termos (em ambos os membros da equação) e usar operações com frações para reescrever a equação sem denominadores. Neste passo, a orientação 4.1 pode ser requisitada novamente;

4.3 Passe todos os termos que envolvam a incógnita em questão para um dos lados (membros) da igualdade e os que não a contêm, para o outro lado. Para isso, aplique a regra da adição: os termos que mudam de membro mudam também de operação (mudam o sinal) no novo membro para que a equação permaneça inalterada;

4.4 Efetue cálculos com o objetivo de simplificar as expressões resultantes em ambos os membros da equação;

4.5 Determine o valor da incógnita aplicando a propriedade da divisão no conjunto dos números reais: passe o valor que multiplica a incógnita em um dos membros da equação como divisor do outro membro da equação;

4.6 Simplifique a expressão encontrada e cheque as relações entre as quantidades envolvidas;

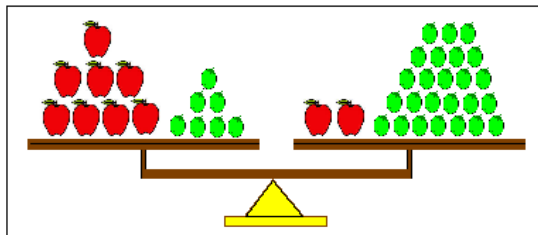
Passo 5. Revise a solução encontrada e confirme sua resposta.

3. EXEMPLOS E APLICAÇÕES

Nos exemplos a seguir, note que os passos sugeridos para a resolução de Equações Literais do 1º grau, na seção anterior, são explicitados durante a resolução de cada questão.

Exemplo 1

Numa balança, de um lado foram colocados 7 limões e 8 maçãs e do outro 25 limões e 2 maçãs, de modo que os pratos da balança ficaram em equilíbrio, conforme ilustrado na figura abaixo. Pergunta-se: o peso de uma maçã equivale ao peso de quantos limões?



Resolução:

Passo 1: O problema pede para que seja estabelecida a equivalência de pesos entre maçãs e limões.

Passo 2: As maçãs serão representadas pela letra m e os limões pela letra l .

Passo 3: Como os pratos estão em equilíbrio temos a seguinte equação:

$$8m + 7l = 2m + 25l$$

Passo 4.3: Como se trata de uma balança, ao retirarmos a mesma quantidade de frutas de ambos os lados, o conjunto permanece em equilíbrio, assim, retirando 7 limões de ambos os lados, obtemos:

$$8m + 7l - 7l = 2m + 25l - 7l$$

Passo 4.4



$$8m = 2m + 18l$$

Passo 4.3: Agora, retiramos duas maçãs de ambos os lados

$$8m - 2m = 2m - 2m + 18l$$

Passo 4.4



$$6m = 18l$$

Passo 4.5: divide-se ambos os membros por 6 (a proporção permanece)

$$\frac{6m}{6} = \frac{18l}{6}$$

$$\Rightarrow 1m = 3l$$

Passo 5: Assim concluímos que o peso de uma maçã equivale ao peso de três limões.

Exemplo 2

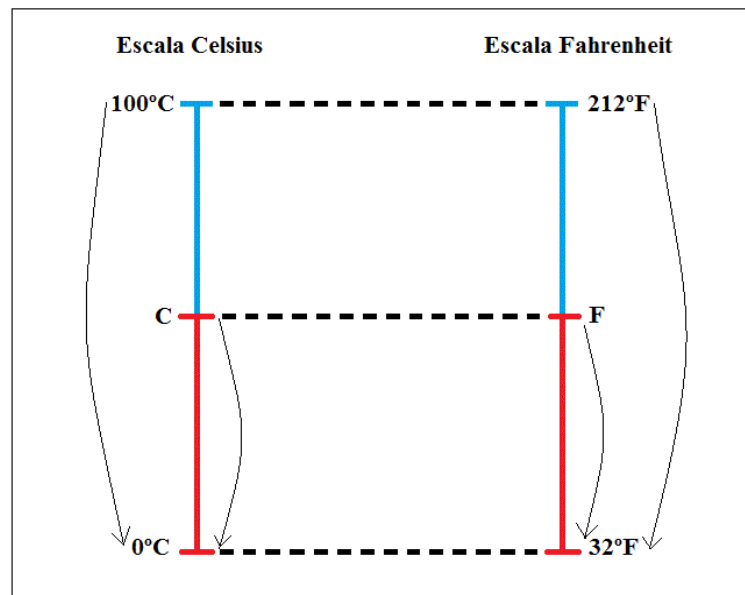
A escala Celsius possui o ponto zero na temperatura que a água congela (ponto de fusão, 0°C) e 100°C na temperatura que a água ferve (ponto de ebulição). Por sua vez, na escala Fahrenheit o ponto de fusão equivale a 32°F , e o ponto de ebulição da água a 212°F . Qual a expressão que fornece a conversão de uma temperatura da escala Fahrenheit para Celsius?

Resolução:

Passo 1: O problema pede para que seja estabelecida uma relação de equivalência entre as escalas Celsius e Fahrenheit.

Passo 2: A temperatura na escala Celsius será representada pela letra C e na escala Fahrenheit pela letra F .

Passo 3: Observando o esquema a seguir, iremos aplicar o teorema de Tales para obtermos as proporções equivalentes e armarmos a equação.



$$\frac{C - 0}{100 - 0} = \frac{F - 32}{212 - 32}$$

$$\Rightarrow \frac{C}{100} = \frac{F - 32}{180}$$

Passo 4.4: Simplificando (dividindo por vinte) os denominadores de ambos os membros temos:

$$\frac{C}{5} = \frac{F - 32}{9}$$

Passo 4.4



Aplicando o produto dos meios pelos extremos temos:

$$9C = 5(F - 32)$$

Passo 4.5: Dividindo-se ambos os membros por 9

$$\frac{9C}{9} = \frac{5}{9}(F - 32)$$

Passo 5: A expressão pedida é a seguinte:

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

Exemplo 3

Numa reunião a razão entre o número de homens e mulheres é 3 : 7 . Sabendo-se que no recinto encontram-se k pessoas, qual o percentual de homens presentes nessa reunião?

Resolução:

Passo 1: O problema pede para que seja calculado o percentual de homens em relação ao total de pessoas presentes.

Passo 2: Iremos representar o total de homens por h e o total de mulheres por m .

Passo 3: Como a razão entre homens e mulheres é 3 : 7 , podemos escrever:

$$\frac{h}{m} = \frac{3}{7} \quad (1).$$

No recinto encontram-se k pessoas, logo podemos escrever:

$$m + h = k \quad (2).$$

Passo 4: Na eq.(1) $\frac{h}{m} = \frac{3}{7}$ aplicando o produto dos meios pelos extremos e, em seguida, isolando a variável m em função de h , obteremos:

$$\begin{aligned} \frac{h}{m} &= \frac{3}{7} \\ 3m &= 7h \\ m &= \frac{7h}{3} \end{aligned}$$

Passo 4: Substituindo o valor de m encontrado nessa última igualdade na eq.(2), temos:

$$\frac{7h}{3} + h = k$$

Passo 4.4: Para simplificarmos a equação vista anteriormente, multiplicamos ambos os membros por 3. Assim, obtemos a seguinte expressão:

$$7h + 3h = 3k$$

Passo 4.4: Somamos os termos semelhantes do primeiro membro, obtendo:

$$10h = 3k$$

Passo 4.5: Divide-se ambos os membros por 10, para obtermos h em função de k :

$$h = \frac{3k}{10}$$

Para reescrevermos o valor obtido de h em forma de porcentagem, multiplicamos essa última igualdade por 100, para concluir que

$$h = \left(\frac{300}{10}\right)k \quad (\text{em } \%)$$

Passo 4.6



Ou seja, $h = 30\%$ de k

Passo 5: Portanto, dentre os presentes na reunião 30% são homens.

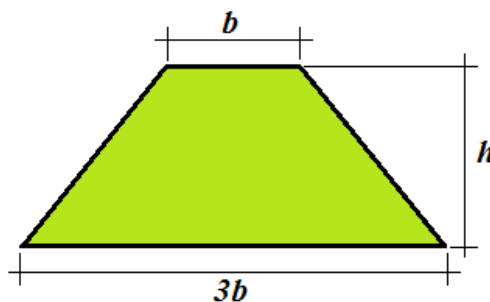
Exemplo 4

Num trapézio a base maior é o triplo da menor. Sabendo que sua área mede 100 m^2 , calcule a medida de sua altura.

Resolução:

Passo 1: Vamos calcular a altura do trapézio.

Passo 2: A base menor será representada pela letra b , a base maior por $3b$, já que essa medida equivale a três vezes a medida da base menor. Por sua vez, a altura será representada pela letra h , conforme esquematizado na figura seguinte:



Passo 3: A área do trapézio é dada por : $A = \frac{(B + b).h}{2}$

Na qual, substituindo os valores correspondentes temos a seguinte equação:

$$100 = \frac{(3b + b)h}{2}$$

Passo 4: Simplificando a expressão acima, temos:

$$100 = 2bh$$

$$\text{Assim concluímos que: } h = \frac{50}{b}$$

Exemplo 5

Utilizando o regime de juros simples, por quanto tempo se deve aplicar um capital para que ele dobre o seu valor?

Resolução:

Passo 1: Vamos determinar o tempo de aplicação do capital

Passo 2: Representaremos os juros pela letra J o capital por C , a taxa por i o tempo por t e o montante por M .

Passo 3: Os juros de uma aplicação no regime simples são calculados pela seguinte fórmula: $J = C.i.t$

Passo 4: Para que o capital dobre o seu valor é necessário que o montante seja igual a $2C$. Como $M = C + J$, necessariamente devemos ter $J = C$. Substituindo essa última igualdade na fórmula de juros, temos: $C = C.i.t$

Passo 4.5



Dividindo-se ambos os membros por C :

$$\frac{C}{C} = \frac{C.i.t}{C} \Rightarrow$$

$$1 = i.t \Rightarrow$$

$$i.t = 1$$

Dividindo-se ambos os membros por i :

$$\frac{i.t}{i} = \frac{1}{i} \Rightarrow t = \frac{1}{i}$$

Passo 5: Portanto, o capital dobra o seu valor quando o tempo equivale ao inverso de sua taxa.

Exemplo 6

Num estacionamento tem-se um total de N veículos, entre motos e carros. Sabendo-se que há P rodas, qual a expressão que fornece o número de motos e carros em função de N e P ?

Resolução:

Passo 1: Vamos determinar o número de motos e carros em função do nº de veículos (N) e do nº de rodas (P).

Passo 2: Os carros serão representados pela letra C e as motos pela letra M . E o total de veículos será representado pela equação abaixo:

$$C + M = N \quad (1)$$

Passo 3: Como cada carro possui quatro rodas e cada moto duas, o total de rodas será representado por:

$$4C + 2M = P \quad (2)$$

Passo 4: Da equação 1 subtraímos M em ambos os membros da equação, a fim de isolarmos o valor de C .

$$C + M - M = N - M \Rightarrow C = (N - M) \quad (3)$$

Passo 4.4: Substituímos na equação (2) o valor de C encontrado na equação (3):

$$4C + 2M = P \Rightarrow 4(N - M) + 2M = P$$

Passo 4.1: Aplicando a propriedade distributiva, temos:

$$4N - 4M + 2M = P \Rightarrow 4N - 2M = P \quad (4)$$

Passo 4: Subtraindo P e adicionando $2M$ em ambos os membros da equação (4) temos:

$$4N - 2M - P + 2M = P - P + 2M \Rightarrow 4N - P = 2M \quad (5)$$

Passo 4.5: Dividindo-se ambos os membros dessa equação por 2, temos:

$$\frac{4N - P}{2} = \frac{2M}{2} \Rightarrow \frac{4N - P}{2} = M \Rightarrow M = \frac{4N - P}{2}$$

Passo 4.4: Substituindo essa última igualdade na equação 3 temos:

$$C = (N - M) \Rightarrow C = N - \left(\frac{4N - P}{2} \right) \quad (6)$$

Passo 4.2: Calculando o m.m.c. dos denominadores dos termos do 2º membro da eq. (6) temos:

$$C = \frac{2N}{2} - \left(\frac{4N - P}{2} \right) \Rightarrow C = \frac{2N - 4N + P}{2} \Rightarrow C = \frac{P - 2N}{2}$$

Passo 5: Assim concluímos que o nº de carros é dado por $C = \frac{P - 2N}{2}$ e o nº de motos é dado por $M = \frac{4N - P}{2}$.

Exemplo 7

Numa viagem de uma cidade para outra, um carro partiu do quilômetro 15 e encerrou a viagem no quilômetro 235 com uma velocidade v levando t horas para concluí-la. Se o condutor do veículo dobrasse a velocidade do automóvel em quanto tempo realizaria o mesmo percurso?

Resolução:

Passo 1: Determinar o tempo de viagem com o dobro da velocidade.

Passo 2: A velocidade será representada por v e o tempo por t .

Passo 3: Vimos no início desse material, que a posição final de um móvel em Movimento Uniforme (M.U.) é dada pela expressão:

$$s = s_0 + vt,$$

Onde s_0 é a posição inicial do veículo.

Passo 4: Iremos substituir os valores da posição inicial e da final, informados na questão.

$$s = s_0 + vt$$

$$235 = 15 + vt$$

Passo 4.3: Subtraímos 15 em ambos os membros:

$$235 - 15 = 15 - 15 + vt$$

$$220 = vt,$$

ou, equivalentemente

$$vt = 220$$

Passo 4.5



Passo 4.5: Dividindo-se ambos os membros por v

$$\frac{vt}{v} = \frac{220}{v}$$

$$t = \frac{220}{v}$$

Passo 5: Portanto o tempo gasto na viagem é $t = \frac{220}{v}$, quando o carro ãandaö a uma velocidade v .

Mas a resolução do problema não termina agora. A pergunta é, se dobrarmos a velocidade para $2v$, o que aconteceria com o tempo?

Passo 4: Vamos fazer a substituição na expressão que calcula t .

$$t = \frac{220}{2v}$$

$$t = \frac{110}{v}$$

Passo 5: Logo, como é de se esperar, quando dobramos a velocidade, o tempo cai para metade.

Exemplo 8

Uma caixa d'água retangular tem sua base quadrada com lados de medida ãaö. Sabendo que seu volume é igual a 45 m^3 , calcule a medida de sua altura.

Resolução:

Passo 1: Determinar a altura da caixa d'água.

Passo 2: A altura da caixa será representada por h e o volume por v .

Passo 3: O volume v é o produto da área da base A_b pela altura:

$$v = A_b \cdot h$$

Como os lados da base são iguais, teremos:

$$v = a^2 \cdot h$$

Equivalentemente

$$a^2 \cdot h = v$$

Passo 4: Substituindo o valor de v teremos: $a^2 \cdot h = 45$

Passo 4.5: Dividindo-se ambos os membros por a^2

$$\frac{a^2 \cdot h}{a^2} = \frac{45}{a^2}$$

$$h = \frac{45}{a^2}$$

Passo 5: Portanto, a altura da caixa é igual ao volume dividido pela área da base.

4. EXERCÍCIOS

Nas questões de 1 a 24, resolva as equações literais a seguir na variável indicada:

1. $P = 4a$, em a (Perímetro de um quadrado) de lado a .
2. $V = Bh$, em B (Volume de um prisma) de altura h e área da base B .
3. $V = RI$, em R (Tensão em um circuito elétrico) onde I é a corrente e R a resistência.
4. $V = 4abc$, em c (Volume de uma caixa de base retangular) cujas dimensões são a , b e c .
5. $V = \pi \cdot r^2 h$, em h (Volume de um cilindro) de raio r e altura h .
6. $A + B + C = 180^\circ$, em B (Soma dos ângulos internos de um triângulo) sendo A , B e C as medidas dos seus ângulos internos.
7. $P = I^2 R$, em R (Potência em um circuito elétrico) onde I é a corrente e R a resistência.

8. $ax + b = 0$, em x (Equação linear com uma incógnita), sendo a o coeficiente de x e b o termo independente.
9. $y = mx + b$, em m (Equação reduzida da reta e coeficiente angular), onde y é a ordenada, x a abscissa e b o coeficiente linear.
10. $S = \frac{1}{2}at^2$, em a . (Distância) sendo a o valor da aceleração e t o tempo.
11. $K = \frac{1}{2}mv^2$, em m (Energia cinética) sendo m a massa e v a velocidade.
12. $x = 5y - 15$, em y (Equação Linear) sendo 5 o coeficiente de y e -15 o termo independente.
13. $2x = 3y - 6$, em y . (Equação Linear) sendo 3 o coeficiente de y e -6 o termo independente.
14. $P = 2C + 2L$, em C (Perímetro de um retângulo) onde C é o comprimento e L a largura.
15. $ax + by = c$, em y (Equação Linear com duas variáveis) onde a é o coeficiente de x , b o coeficiente de y e c o termo independente.
16. $V = \frac{KT}{P}$, em T . (Volume de um gás) onde K é uma constante, P a pressão e T a temperatura.
17. $V = \frac{1}{3}\pi.r^2h$, em r (Volume de um cone) sendo r o raio da base, h a altura do cone e π uma constante.
18. $x = \frac{a + b}{2}$, em a (Média aritmética de dois números) onde x é o valor da média, a e b são números reais.
19. $F = \frac{9}{5}C + 32$, em C (Relação Celsius/Fahrenheit)
20. $M = C + Cit$, em i (Montante) nos quais C é o capital, i a taxa e t o tempo.
21. $J = Cit$, em i (Juros Simples) sendo C o capital, i a taxa e t o tempo.
22. $S = 2\pi.r^2 + 2\pi.rh$, em h (Área superficial de um cilindro) onde r é o raio da base e h é a altura.
23. $A = \frac{(B + b)h}{2}$, em B (Área do trapézio) onde B é a base maior, b a base menor e h é a altura.
24. $A = \pi.r^2$, em r (Área do círculo) onde r é o raio e π uma constante.

25. Altura de uma caixa retangular. Uma caixa retangular tem a base com largura medindo 5 cm e comprimento de 8cm. Se o volume do sólido é 120 cm^3 , determine a altura da caixa. (Ver exercício 4)

26. Altura de uma lata de óleo. Uma empresa fabrica latas de óleo na forma geométrica de um cilindro. A exigência é que o raio da base seja igual a 5 cm e que a lata comporte um volume igual a 625 cm^3 . Qual deve ser a altura das latas de óleo com essas condições? (Ver exercício 5)

27. Taxa de juros simples. Um capital de R\$ 2.000,00 foi investido na poupança por 5 anos. Se os juros nesse período retornaram uma quantia de R\$ 400,00, qual a taxa de juros praticada nesse investimento? (Ver exercício 21)

28. Terreno retangular. Se um terreno retangular possui perímetro (P) igual a 100 metros e largura (L) de 20 metros, calcule o comprimento (C) do terreno. (Ver exercício 14)

29. Conversão de temperaturas. Em um site da internet, especializado em divulgar temperaturas diárias de qualquer lugar no mundo, foi possível verificar que a temperatura na cidade de Petrolina em um determinado dia era de 95°F . Qual o valor dessa temperatura em graus Celsius? (Ver exercício 19)

30. Raio de uma região circular. O jardim da casa de Manoel tem o formato circular. Se a área desse jardim é de $25\pi \text{ m}^2$, qual o valor do raio desse jardim circular? (Ver exercício 24)

31. Região Trapezoidal. A frente de uma igreja foi construída no formato de um trapézio. Se a altura (h) da igreja mede 10 metros, a base menor (b) mede 15 metros e a área (A) construída de frente é de 225 m^2 , encontre a outra base (B) dessa região frontal que tem o formato trapezoidal. (ver exercício 23)

Nos exercícios de 32 a 37 traduza cada frase a seguir para a linguagem matemática equivalente. Em cada caso represente o número em questão pela letra x:

32. Duas vezes a soma de um número com 5 é igual a 30.

33. A soma de duas vezes um número com 5 é igual a 30.

34. Quatro vezes a diferença entre um número e 5 é igual a 24.

35. A diferença de quatro vezes um número com 5 é igual a 24.

36. A soma de duas vezes um número inteiro com três vezes o seu sucessor é igual a 48.

37. A soma de quatro vezes um número inteiro ímpar com duas vezes o próximo número inteiro ímpar é igual a 46.

38. Determine o número em questão nos exercícios 33 e 35.

Nos exercícios de 39 a 44, resolva os seguintes problemas com números inteiros:

39. Problemas numéricos. Um número é cinco vezes maior do que outro. Se a soma do menor com duas vezes o maior é 45, determine esses dois números.

40. Problemas Numéricos. Um número é quatro vezes menor que outro. Se cinco vezes o menor número menos duas vezes o maior é 4, determine esses dois números.

41. Problemas Numéricos. Um número é sete vezes menor que outro. Se quatro vezes o menor número somado com duas vezes o maior é 62, determine esses dois números.

42. Problemas Numéricos. Um número é dez vezes maior que outro. Se a soma do dobro do menor número com o triplo do maior número é 55, determine os dois números.

43. Problemas Numéricos - inteiros consecutivos. Encontre dois números inteiros consecutivos tais que a soma do dobro do primeiro inteiro com o triplo do segundo inteiro é 28. (Dado: Se x é o primeiro inteiro, o próximo inteiro será representado por $x+1$)

44. Problemas Numéricos - inteiros consecutivos. Encontre dois números inteiros ímpares consecutivos tais que três vezes o menor inteiro é cinco vezes maior que o dobro do segundo. (Dado: Se x representa o primeiro inteiro ímpar, o próximo inteiro é representado por $x+2$)

45. Problemas geométricos - dimensões de um retângulo. O comprimento de um retângulo é 1cm maior que o dobro da sua largura. Se o perímetro do retângulo é 74 cm, encontre as dimensões do retângulo.

46. Problemas geométricos - dimensões de um retângulo. O tamanho de um retângulo é cinco metros menor que o triplo de sua largura. Se o perímetro do retângulo é de 46 metros, quais as dimensões do retângulo?

47. Problemas geométricos - triângulos. A base de um triângulo isósceles é 3cm menor que o tamanho de cada lado restante (os outros dois lados iguais). Se o perímetro do triângulo é 36 cm, calcule as dimensões dos três lados do triângulo.

48. Em uma festa na boate, os valores dos ingressos da entrada eram os seguintes: R\$ 8,00 para homens e R\$ 6,00 para mulheres. O dono da boate contabilizou a venda de 500 ingressos e uma arrecadação de R\$ 3.600,00 com a venda dos ingressos. Pergunta-se: Quantos homens e quantas mulheres havia na festa?

49. Manoel comprou 80 peças de roupa para revender em sua loja entre camisas e bermudas. Cada camisa lhe custou R\$ 35,00 e cada bermuda custou R\$ 20,00. Se ele pagou um total de R\$ 2.350,00 na compra das roupas, quantas camisas e quantas bermudas, Manoel comprou para revender?

50. Num estacionamento há carros e motos totalizando 80 veículos. Sabendo que o número de rodas é 220, qual a quantidade de carros e motos?

5. RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS ÍMPARES

$$1. a = \frac{P}{4} \quad 3. R = \frac{V}{I} \quad 5. h = \frac{V}{\pi.r^2} \quad 7. R = \frac{P}{I^2} \quad 9. m = \frac{y-b}{x} \quad 11. m = \frac{2K}{v^2}$$

$$13. y = \frac{2x+6}{3} \quad 15. y = \frac{c-ax}{b} \quad 17. r = \sqrt{\frac{3V}{\pi.h}} \quad 19. C = \frac{5}{9}(F-32) \quad 21. i = \frac{J}{Ct}$$

$$23. B = \frac{2A-bh}{h} \quad 25. h = 3cm \quad 27. i = 4\% a.a \quad 29. F = 35^\circ C \quad 31. B = 30m$$

$$33. 2x+5=30 \quad 35. 4x-5=24 \quad 37. 4(2x+1)+2(2x+3)=46 \quad 39. \frac{270}{13} \text{ e } \frac{45}{13}$$

$$41. \frac{31}{10} \text{ e } \frac{124}{5} \quad 43. 5 \text{ e } 6 \quad 45. 12 \text{ e } 25 \quad 47. 13, 13 \text{ e } 10 \quad 49. 30 \text{ bermudas e } 50 \text{ camisas}$$

EQUAÇÕES LITERAIS E SUAS APLICAÇÕES



www.profmat.univasf.edu.br

Contato com os autores:

evando.araujo@univasf.edu.br

manoel.silvafilho@univasf.edu.br