

# Eletrônica Digital

**Mapas de Karnaugh**

Prof. Rômulo Calado Pantaleão Camara

Carga Horária: 2h/60h

# Mapas de Karnaugh

- ✓ O mapa de Veitch-Karnaugh, ou simplesmente mapa de Karnaugh, é uma tabela montada de forma a facilitar o processo de minimização das expressões lógicas.
- ✓ Os mapas de Karnaugh permitem a simplificação de expressões com duas, três, quatro, cinco ou mais variáveis.
- ✓ Ele é formado por  $2^n$  células ( $n$  é o número de variáveis de entrada).

# Mapas de Karnaugh

- ✓ A representação da relação entre as variáveis de entrada e suas saídas correspondentes é feita da seguinte forma:
  - Cada célula corresponde a uma condição de entrada;
  - As saídas são indicadas dentro das células correspondentes;
  - A disposição das células entre si é tal que facilite o enlace entre células adjacentes.
- ✓ Os conceitos de adjacência e enlace são de fundamental importância para a compreensão e aplicação do mapa de Karnaugh.

# Mapas de Karnaugh

- ✓ **Adjacência:** duas células são adjacentes entre si quando apenas uma de suas variáveis de entrada muda de valor.
- ✓ **Exemplo:** A tabela verdade de duas variáveis (porta OR) pode ser representada por quatro células:
  - ✓  $AB = 00$  0     $AB = 01$  1                     $AB = 10$  1             $AB = 11$  1
- ✓ **Pode-se afirmar que:**
  - As células  $AB = 00$  e  $AB = 01$  são adjacentes (apenas B muda de valor);
  - As células  $AB = 00$  e  $AB = 10$  são adjacentes (apenas A muda de valor);
  - As células  $AB = 01$  e  $AB = 10$  não são adjacentes (A e B mudam de valor)

# Mapas de Karnaugh

- ✓ **Enlace (região):** é o agrupamento de células adjacentes, com saídas iguais, do qual se pode extrair diretamente uma expressão booleana simplificada.
- ✓ Esta simplificação advém da aplicação do **teorema da absorção**.
- ✓ Assim, num enlace entre duas células adjacentes, pode-se extrair uma expressão booleana simplificada já que a **variável que muda de valor desaparece**.

# Mapas de Karnaugh

- ✓ A expressão de um enlace (agrupamento) depende das saídas consideradas e das variáveis de entrada que não mudam de valor nas células, ou seja:
  - **Saídas = 1**
    - cada enlace é um **produto (AND)** entre as variáveis que não mudam de valor;
    - a operação entre enlaces é uma **soma (OR)**.
  - **Saídas = 0**
    - cada enlace é uma **soma (OR)** entre as variáveis que não mudam de valor;
    - a operação entre enlaces é um **produto (AND)**.

# Mapas de Karnaugh

- ✓ Podemos construir o mapa de Karnaugh para as Saídas = 0 tomando o complemento da função  $S$  (Saídas = 1), bastando, apenas, inverter a saída (Teorema de De Morgan).
- ✓ A resolução de um mapa pode ser realizada por saídas iguais a 1 ou 0. Ambas as soluções são satisfatórias, podendo-se obter expressões booleanas iguais ou equivalentes.
- ✓ Normalmente, a resolução por saídas iguais a 0 só é utilizada quando apenas um enlace é formado.

# Mapas de Karnaugh

✓ Observações:

1. Se o mapa possui apenas um enlace, a expressão da saída terá apenas **um termo** (produto ou soma).
2. O número de células que pode fazer parte de um **enlace** está também relacionado com a equação  $2^n$  (onde  $n$  varia de 0 ao **número de variáveis** do mapa considerado).
3. Um enlace envolvendo uma única célula não resulta em simplificação. Quando não são possíveis enlaces envolvendo mais de uma célula, significa que a expressão não pode ser simplificada algebricamente.

# Mapas de Karnaugh

✓ Observações:

4. Quanto maior o enlace, menor o termo correspondente e, portanto, mais simplificada fica a expressão booleana do mapa de Karnaugh considerado.
5. Dois enlaces podem ter uma célula em comum.
6. Quanto menor o número de enlaces, menos termos tem a expressão booleana do mapa de Karnaugh considerado e, portanto, mais simplificada ela fica;

# Mapas de Karnaugh

✓ Observações:

7. O uso do irrelevante num enlace pode simplificar ainda mais a expressão booleana final. Assim, sempre que uma ou mais saídas forem irrelevantes, cada uma delas deve ser considerada 0 ou 1 de acordo com a conveniência, tornando o circuito mais simplificado.
8. A resolução de um mapa de Karnaugh com enlaces menores do que os possíveis ou com um número de enlaces maior do que o necessário, resulta, também, numa expressão booleana correta, porém, não totalmente simplificada.

# Mapas de Karnaugh

- ✓ Algumas regras são seguidas no desenvolvimento do mapa de Karnaugh:
  1. Todos "1" devem ser lidos pelo menos uma vez.
  2. Grupos de "1" em potência de 2, e retangulares formam uma leitura.
  3. O grupo deve ser o maior possível.
  4. Deve-se ter o menor número possível de leituras.
  5. A leitura corresponde às variáveis que se mantiverem constantes

# Karnaugh para Duas Variáveis

- ✓ O mapa será descrito como ( $S=f(A,B)$ ) é formado por quatro células ( $2^2=4$ );

A	B	minitermos
0	0	$m_0 = \bar{A} \bar{B}$
0	1	$m_1 = \bar{A} B$
1	0	$m_2 = A \bar{B}$
1	1	$m_3 = A B$

Tabela Verdade

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	$m_0$	$m_1$
A	$m_2$	$m_3$

Mapa de Karnaugh

- ✓ Pode-se notar que cada linha da tabela verdade possui uma região própria no diagrama de Karnaugh.

# Karnaugh para Duas Variáveis

- ✓ Com duas variáveis é possível formar várias regiões (enlaces). Exemplo:

Região  $\bar{A} \bar{B} = 1$

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	$m_0$	$m_1$
A	$m_2$	$m_3$

Região  $\bar{A} B = 1$

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	$m_0$	$m_1$
A	$m_2$	$m_3$

Região  $A \bar{B} = 1$

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	$m_0$	$m_1$
A	$m_2$	$m_3$

Região  $A B = 1$

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	$m_0$	$m_1$
A	$m_2$	$m_3$

Região  $\bar{A} = 1$

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	$m_0$	$m_1$
A	$m_2$	$m_3$

Região  $A = 1$

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	$m_0$	$m_1$
A	$m_2$	$m_3$

Região  $\bar{B} = 1$

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	$m_0$	$m_1$
A	$m_2$	$m_3$

Região  $B = 1$

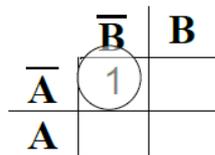
	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	$m_0$	$m_1$
A	$m_2$	$m_3$

# Karnaugh para Duas Variáveis

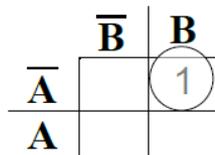
- ✓ Passos para a simplificação:
  - Formar pares;
  - Formar termos isolados;
  - A expressão simplificada será o somatório das regiões (enlaces) encontradas.

# Mapas de Karnaugh

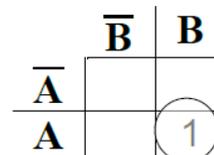
✓ Exemplo:



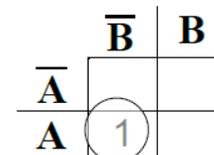
$$S = \bar{A} \cdot \bar{B}$$



$$S = \bar{A} \cdot B$$

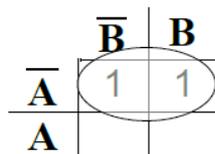


$$S = A \cdot B$$

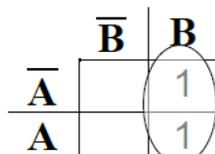


$$S = A \cdot \bar{B}$$

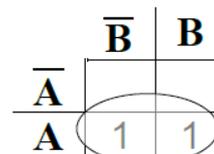
✓ Condições irrelevantes



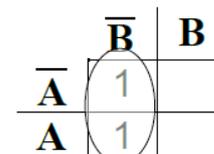
$$S = \bar{A}$$



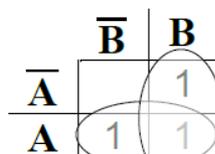
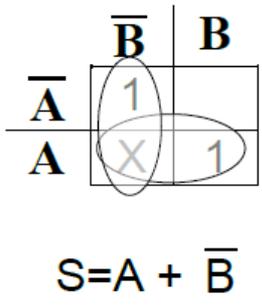
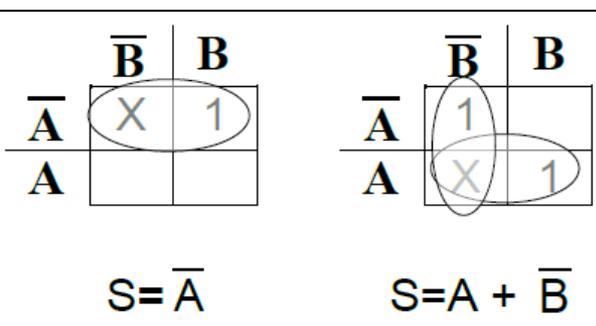
$$S = B$$



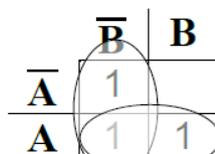
$$S = A$$



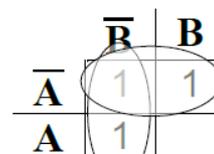
$$S = \bar{B}$$



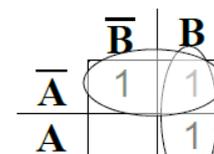
$$S = A + B$$



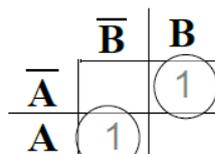
$$S = A + \bar{B}$$



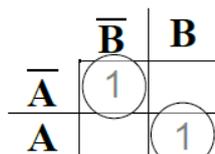
$$S = \bar{A} + \bar{B}$$



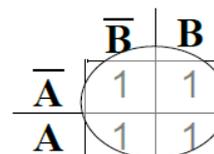
$$S = \bar{A} + B$$



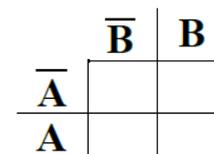
$$S = \bar{A}B + A\bar{B} \text{ ou } S = A \oplus B$$



$$S = AB + \bar{A}\bar{B} \text{ ou } S = A \otimes B$$



$$S = "1"$$



$$S = "0"$$

# Mapas de Karnaugh

- ✓ Exemplo Resolvido: dada a tabela verdade, obtenha o circuito simplificado utilizando mapa de Karnaugh.

Tabela-verdade

A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Solução:

Mapa de Karnaugh: Formar os pares; formar os termos isolados; fazer a soma minitermos!

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$		1
A	1	1

$$S = A + B$$

# Karnaugh para Três Variáveis

✓  $S=f(A,B,C)$ ; Quantas células? 8

Tabela Verdade

A	B	C	Minitermos
0	0	0	$m_0 = \bar{A} \bar{B} \bar{C}$
0	0	1	$m_1 = \bar{A} \bar{B} C$
0	1	0	$m_2 = \bar{A} B \bar{C}$
0	1	1	$m_3 = \bar{A} B C$
1	0	0	$m_4 = A \bar{B} \bar{C}$
1	0	1	$m_5 = A \bar{B} C$
1	1	0	$m_6 = A B \bar{C}$
1	1	1	$m_7 = A B C$

Mapa de Karnaugh

	$\bar{B}$	B		
$\bar{A}$	$m_0$	$m_1$	$m_3$	$m_2$
A	$m_4$	$m_5$	$m_7$	$m_6$
	$\bar{C}$	C		$\bar{C}$

	$\bar{B}$	B		
$\bar{A}$	Caso 0 0 0 0 $\bar{A} \bar{B} \bar{C}$	Caso 1 0 0 1 $\bar{A} \bar{B} C$	Caso 3 0 1 1 $\bar{A} B C$	Caso 2 0 1 0 $\bar{A} B \bar{C}$
A	Caso 4 1 0 0 $A \bar{B} \bar{C}$	Caso 5 1 0 1 $A \bar{B} C$	Caso 7 1 1 1 ABC	Caso 6 1 1 0 $A B \bar{C}$
	$\bar{C}$	C		$\bar{C}$

# Karnaugh para Três Variáveis

✓ Possíveis regiões de enlaces;

Região  $\bar{A} \bar{B} \bar{C} = 1$

	$\bar{B}$	$B$		
$\bar{A}$	$m_0$	$m_1$	$m_3$	$m_2$
$A$	$m_4$	$m_5$	$m_7$	$m_6$
	$\bar{C}$	$C$	$\bar{C}$	

Região  $\bar{A} \bar{B} C = 1$

	$\bar{B}$	$B$		
$\bar{A}$	$m_0$	$m_1$	$m_3$	$m_2$
$A$	$m_4$	$m_5$	$m_7$	$m_6$
	$\bar{C}$	$C$	$\bar{C}$	

Região  $A B C = 1$

	$\bar{B}$	$B$		
$\bar{A}$	$m_0$	$m_1$	$m_3$	$m_2$
$A$	$m_4$	$m_5$	$m_7$	$m_6$
	$\bar{C}$	$C$	$\bar{C}$	

Região  $\bar{B} \bar{C} = 1$

	$\bar{B}$	$B$		
$\bar{A}$	$m_0$	$m_1$	$m_3$	$m_2$
$A$	$m_4$	$m_5$	$m_7$	$m_6$
	$\bar{C}$	$C$	$\bar{C}$	

Região  $\bar{B} C = 1$

	$\bar{B}$	$B$		
$\bar{A}$	$m_0$	$m_1$	$m_3$	$m_2$
$A$	$m_4$	$m_5$	$m_7$	$m_6$
	$\bar{C}$	$C$	$\bar{C}$	

Região  $B C = 1$

	$\bar{B}$	$B$		
$\bar{A}$	$m_0$	$m_1$	$m_3$	$m_2$
$A$	$m_4$	$m_5$	$m_7$	$m_6$
	$\bar{C}$	$C$	$\bar{C}$	

Região  $\bar{A} = 1$

	$\bar{B}$	$B$		
$\bar{A}$	$m_0$	$m_1$	$m_3$	$m_2$
$A$	$m_4$	$m_5$	$m_7$	$m_6$
	$\bar{C}$	$C$	$\bar{C}$	

Região  $A = 1$

	$\bar{B}$	$B$		
$\bar{A}$	$m_0$	$m_1$	$m_3$	$m_2$
$A$	$m_4$	$m_5$	$m_7$	$m_6$
	$\bar{C}$	$C$	$\bar{C}$	

Região  $\bar{B} = 1$

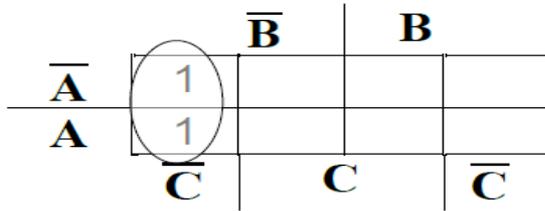
	$\bar{B}$	$B$		
$\bar{A}$	$m_0$	$m_1$	$m_3$	$m_2$
$A$	$m_4$	$m_5$	$m_7$	$m_6$
	$\bar{C}$	$C$	$\bar{C}$	

# Karnaugh para Três Variáveis

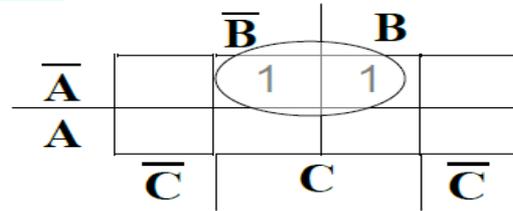
- ✓ Passos para a simplificação:
  - Formar quadras;
  - Formar pares;
  - Formar termos isolados;
  - A expressão simplificada será o somatório dos enlaces encontrados;

# Mapas de Karnaugh

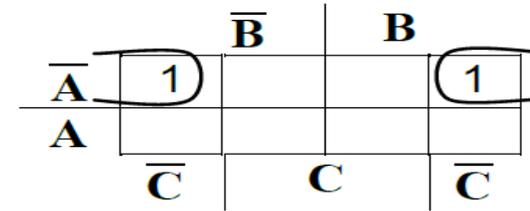
✓ Exemplo:



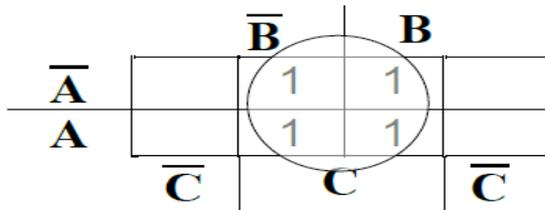
$$S = \bar{B} \cdot \bar{C}$$



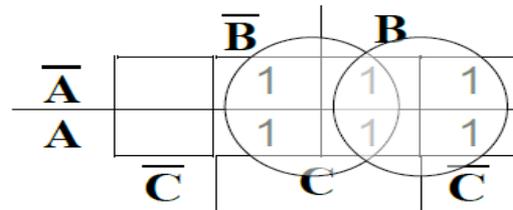
$$S = \bar{A} \cdot C$$



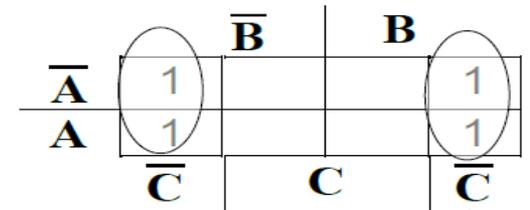
$$S = \bar{A} \cdot \bar{C}$$



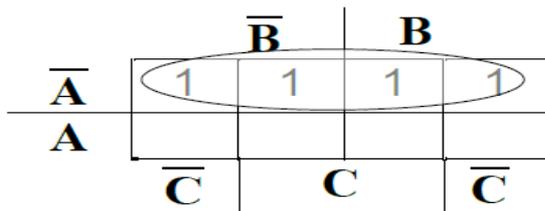
$$S = C$$



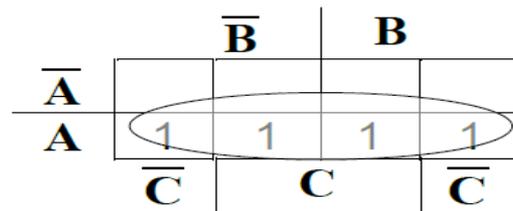
$$S = B + C$$



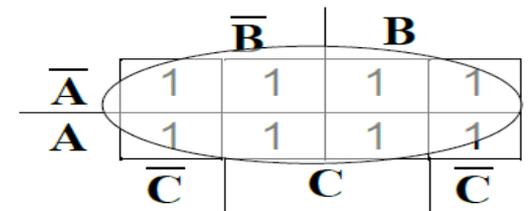
$$S = \bar{C}$$



$$S = \bar{A}$$



$$S = A$$



$$S = "1"$$

# Karnaugh para Três Variáveis

✓ Condições irrelevantes:

	$\bar{B}$	B		
$\bar{A}$	1	1	1	1
A	X			
	$\bar{C}$	C	$\bar{C}$	C

$$S = \bar{A}$$

	$\bar{B}$	B		
$\bar{A}$	X	1		
A				
	$\bar{C}$	C	$\bar{C}$	C

$$S = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

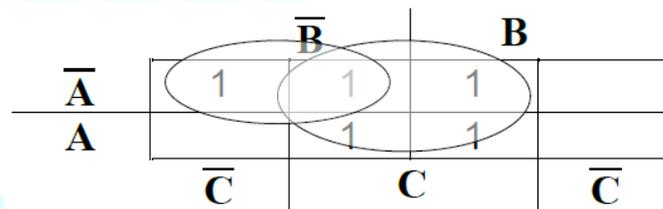
	$\bar{B}$	B		
$\bar{A}$	1	1		
A	1	X		
	$\bar{C}$	C	$\bar{C}$	C

$$S = \bar{B}$$

# Karnaugh para Três Variáveis

- ✓ Exercício: Dada a tabela verdade, encontre o circuito simplificado utilizando o diagrama de Karnaugh.

A	B	C	S
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1



$$S = C + \bar{A} \cdot \bar{B}$$

# Karnaugh para Três Variáveis

- ✓ Exercício: Dada a tabela verdade, encontre o circuito simplificado de  $E$  e  $F$  utilizando o diagrama de Karnaugh.

X	Y	Z	E	F
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	1
1	1	1	0	1

# Karnaugh para Três Variáveis

- ✓ Exercício: Projete um circuito lógico de uma porta de elevador em um prédio de 3 andares. M indica movimento; F1, F2, F3 indicadores de andares e são normalmente nível baixo e passa para nível alto apenas quando estiver no andar. A saída do circuito é o sinal de ABRIR a porta que normalmente é nível BAIXO. Se acionado para abrir a porta, sobe para ALTO.

