Capítulo 4

DERIVADA

4.1 Introdução

Neste capítulo estabeleceremos a noção de derivada de uma função. A derivada envolve a variação ou a mudança no comportamento de vários fenômenos.

Inicialmente apresentaremos a definição de reta tangente ao gráfico de uma função. Posteriormente, definiremos funções deriváveis e derivada de uma função num ponto, dando ênfase ao seu significado geométrico.

4.2 Reta Tangente

Seja:

$$f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

uma função definida num domínio D que pode ser um intervalo aberto ou uma reunião de intervalos abertos, ou ainda, D tal que para todo intervalo aberto I que contenha x_0, se tenha: $I \cap (D - \{x_0\}) \neq \varnothing$.

Considere $P = (x_0, f(x_0))$ e $Q_i = (x_i, f(x_i))$ $(i = 1,\, 2,\, 3......)$ pontos no gráfico de f, $P \neq Q_i$; seja r_1 a reta secante que passa por P e Q_1; seu coeficiente angular é:

$$m_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Fixemos o ponto P e movamos Q_1 sobre o gráfico de f em direção a P, até um ponto $Q_2 = (x_2, f(x_2))$ tal que $Q_2 \neq P$; seja r_2 a reta secante que passa por P e Q_2; seu coeficiente angular é:

$$m_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}.$$

Suponha que os pontos Q_i $(i = 1,\, 2,\, 3......)$ vão se aproximando sucessivamente do ponto P (mas sem atingir P), ao longo do gráfico de f; repetindo o processo obtemos $r_1,\, r_2,\, r_3, ...$, retas secantes de coeficientes angulares $m_1,\, m_2,\, m_3, ...$, respectivamente.

É possível provar, rigorosamente, que quando os pontos Q_i vão se aproximando cada vez mais de P, os m_i respectivos, variam cada vez menos, tendendo a um valor limite constante, que denotaremos por m_{x_0}.

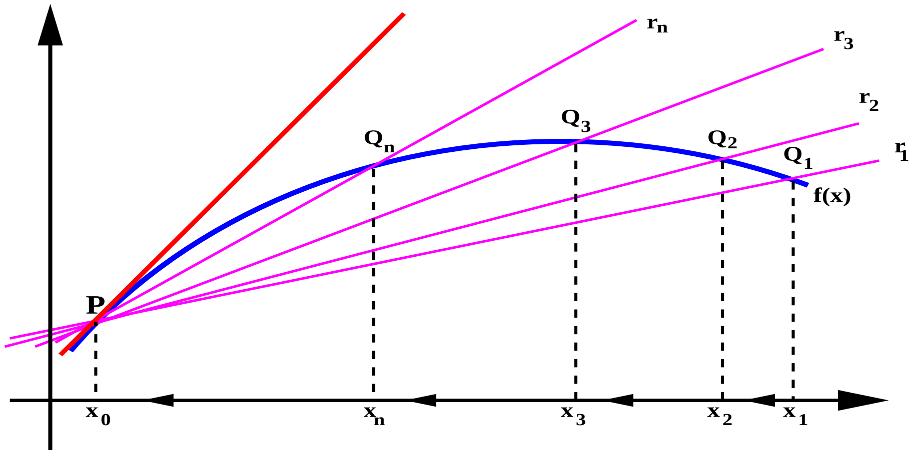


Figura 4.1:

Definição 4.1. A reta passando pelo ponto P e tendo coeficiente angular m_{x_0}, é chamada reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$.

Se

$$\boxed{m_{x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

existe, fazendo a mudança $t = x - x_0$, temos:

$$m_{x_0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}.$$

Como x_0 é um ponto arbitrário, podemos calcular o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f para qualquer ponto $(x, f(x))$:

$$\boxed{m_x = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t) - f(x)}{t}}$$

Assim, m_x só depende x.

Definição 4.2. Se f for contínua em x_0, então, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é:

$$\boxed{y - f(x_0) = m_{x_0}\,(x - x_0)}$$

se o limite existe,

Exemplo 4.1.

[1] Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = 4 - x^2$, no ponto $(1, 3)$.

Denotemos por m_1 o coeficiente angular da reta tangente à parábola $y = 4 - x^2$ passando pelo ponto $(1, f(1)) = (1, 3)$. Seja $P = (1, 3)$ e $Q = (x_0, 4 - x_0^2)$ pontos da parábola; o coeficiente angular da reta secante à parábola passando por P e Q é:

$$m_{PQ} = \frac{f(x_0) - f(1)}{x_0 - 1} = -(x_0 + 1).$$

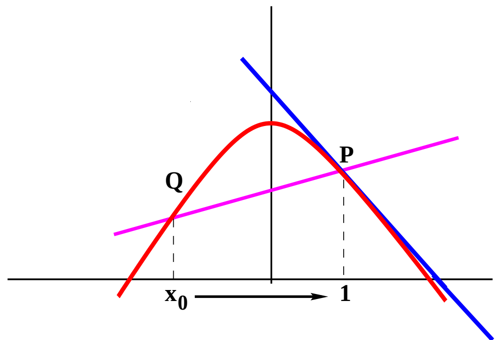


Figura 4.2:

Do desenho, é intuitivo que se Q aproxima-se de P (x_0 aproxima-se de 1), os coeficientes angulares de ambas as retas ficarão iguais; logo:

$$m_1 = \lim_{x_0 \to 1} m_{PQ} = -2.$$

A equação da reta tangente ao gráfico de f, no ponto $(1, 3)$ é $y - 3 = -2\,(x - 1)$ ou, equivalentemente, $y + 2\,x = 5$.

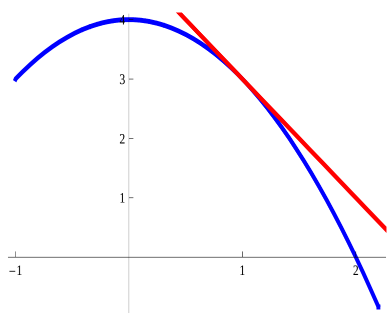


Figura 4.3: Reta tangente a $y = 4 - x^2$, no ponto $(1, 3)$.

[2] Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$, no ponto $(\frac{1}{2}, 2)$.

Seja $m_{\frac{1}{2}}$ o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $y = \dfrac{1}{x}$ passando pelo ponto $(\dfrac{1}{2}, 2)$. Seja $P = (\dfrac{1}{2}, 2)$ e $Q = \big(x_0, \dfrac{1}{x_0}\big)$ pontos da curva; o coeficiente angular da reta secante à curva passando por P e Q é:

$$m_{PQ} = \frac{f(x_0) - f\big(\frac{1}{2}\big)}{x_0 - \frac{1}{2}} = -\frac{2}{x_0}.$$

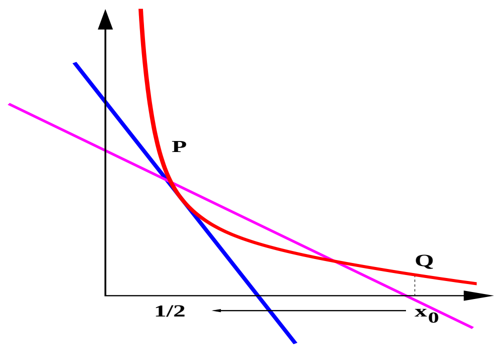


Figura 4.4:

Novamente do desenho, é intuitivo que se Q aproxima-se de P $\big(x_0$ aproxima-se de $\dfrac{1}{2}\big)$ os coeficientes angulares de ambas as retas ficarão iguais; logo:

$$m_{\frac{1}{2}} = \lim_{x_0 \to \frac{1}{2}} m_{PQ} = -4.$$

A equação da reta tangente ao gráfico de f, no ponto $(\frac{1}{2}, 2)$ é $y - 2 = -4\,(x - \frac{1}{2})$ ou, equivalentemente, $y + 4\,x = 4$.

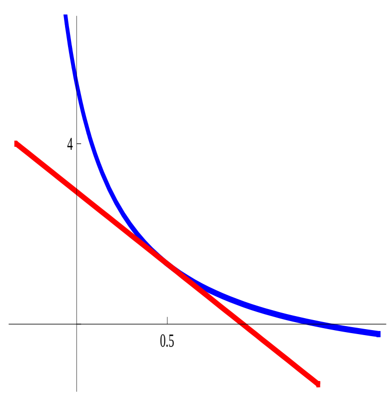


Figura 4.5: Reta tangente a $y = \frac{1}{x}$, no ponto $(\frac{1}{2}, 2)$.

[3] Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^3 - x + 1$, no ponto $(1, 1)$. Utilizemos agora diretamente a definição:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(1+t) - f(1)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t\,(t^2 + 3\,t + 2)}{t} = \lim_{t \to 0} (t^2 + 3\,t + 2) = 2.$$

Logo $m_1 = 2$. A equação da reta tangente ao gráfico de f, no ponto $(1,1)$ é $y - 2\,x = -1$.

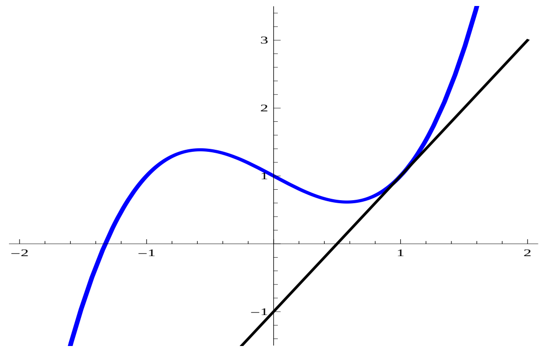


Figura 4.6: Exemplo [3].

Da definição segue que a equação da reta normal ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é:

$$\boxed{y - f(x_0) = -\frac{1}{m_{x_0}}\,(x - x_0), \quad \text{se} \qquad m_{x_0} \neq 0}$$

4.3 Funções Deriváveis

Definição 4.3. Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida num domínio D que pode ser um intervalo aberto ou uma reunião de intervalos abertos ou ainda, D tal que para todo intervalo aberto I que contenha x_0, se tenha: $I \cap (D - \{x_0\}) \neq \varnothing$. f é **derivável ou diferenciável** no ponto x_0 quando existe o seguinte limite:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Observação 4.1.

Fazendo a mudança $t = x - x_0$, temos:

$$f'(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}.$$

$f'(x_0)$ é chamada a derivada de f no ponto x_0. Como x_0 é um ponto arbitrário, podemos calcular a derivada de f para qualquer ponto $x \in Dom(f)$;

$$\boxed{f'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t) - f(x)}{t}}$$

Assim f' é função de x e $f'(x_0) \in \mathbb{R}$.

Definição 4.4. Uma função f é derivável (ou diferenciável) em $A \subset \mathbb{R}$, se é derivável ou diferenciável em cada ponto $x \in A$.

Outras notações para a derivada de $y = y(x)$ são:

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{ou} \quad D_x f.$$

Exemplo 4.2.

[1] Calcule $f'(\frac{1}{4})$ e $f'(2)$, se $f(x) = x^2$.

$$f'(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(x+t)^2 - x^2}{t} = \lim_{t\to 0}(2x+t) = 2\,x.$$

Logo, $f'(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$ e $f'(2) = 4$.

[2] Calcule $f'(\frac{1}{2})$ se $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

$$f'(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1-(x+t)^2} - \sqrt{1-x^2}}{t} = \lim_{t\to 0} -\frac{2x+t}{\sqrt{1-(x+t)^2} + \sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Logo, $f'(\frac{1}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

[3] Calcule $f'(1)$ se $f(x) = 4 - x^2$.

$$f'(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} -\frac{t\,(t+2\,x)}{t} = \lim_{t\to 0} -(t+2\,x) = -2\,x.$$

Logo, $f'(1) = -2$.

[4] Calcule $f'(\frac{1}{2})$ se $f(x) = \frac{1}{x}$.

$$f'(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-1}{x^2 + x\,t} = -\frac{1}{x^2}.$$

Logo, $f'(\frac{1}{2}) = -4$.

4.4 Interpretação Geométrica

A função $F : (D - \{x_0\}) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

representa, geometricamente, o coeficiente angular da reta secante ao gráfico de f passando pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$.

Logo, quando f é derivável no ponto x_0, a reta de coeficiente angular $f'(x_0)$ e passando pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ é a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$.

Se f admite derivada no ponto x_0, então, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é:

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)}$$

A equação da reta normal ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é:

$$\boxed{y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}\,(x - x_0), \quad \text{se} \quad f'(x_0) \neq 0}$$

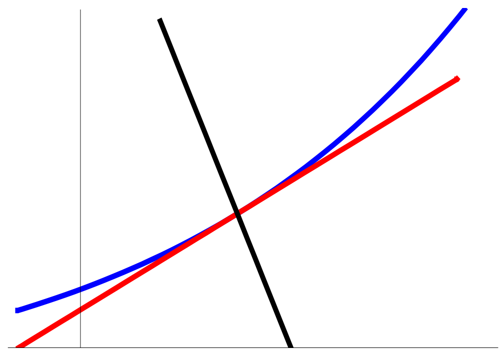


Figura 4.7: As retas tangente e normal ao gráfico de $y = f(x)$.

Exemplo 4.3.

[1] Determine as equações da reta tangente e da reta normal ao gráfico de $f(x) = x^2 + 1$, no ponto de abscissa $x_0 = 1$.

Se $x_0 = 1$ então $f(x_0) = 2$; logo, a reta tangente passa pelo ponto $(1, 2)$ e seu coeficiente angular é $f'(1)$. Temos:

$$f'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(x+t)^2 + 1 - (x^2 + 1)}{t} = 2x.$$

$f'(1) = 2$ e as respectivas equações são: $y - 2\,x = 0$ e $2\,y + x - 5 = 0$.

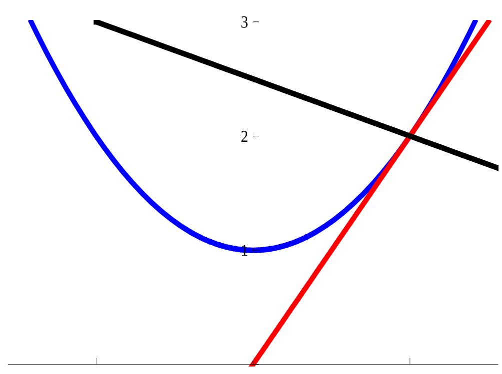


Figura 4.8: As retas tangente e normal ao gráfico de $y = f(x)$.

[2] Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ que seja paralela à reta $2\,x - y - 1 = 0$.

Para determinar a equação de uma reta, necessitamos de um ponto (x_0, y_0) e do coeficiente angular $f'(x_0)$. Neste problema, temos que determinar um ponto.

Sejam r_t a reta tangente, r a reta dada, m_t e m os correspondentes coeficientes angulares; como r_t e r são paralelas, então $m_t = m$; mas $m = 2$ e $m_t = f'(x_0)$, onde x_0 é a abscissa do ponto procurado; como:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

resolvendo a equação $f'(x_0) = 2$, obtemos $x_0 = \dfrac{1}{16}$ e $f(\dfrac{1}{16}) = \dfrac{1}{4}$; a equação é $16\,x - 8\,y + 1 = 0$.

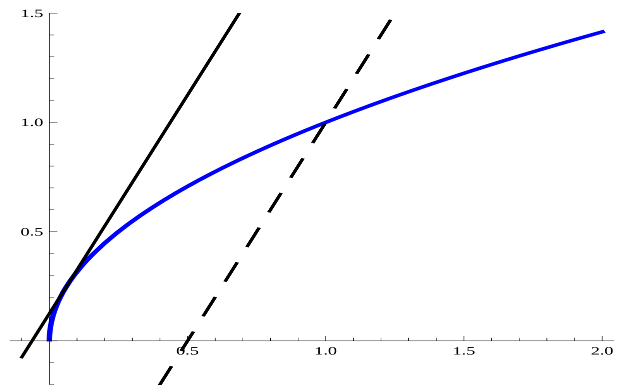


Figura 4.9: Reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ paralela à reta $2x - y - 1 = 0$.

[3] Determine as equações das retas tangentes ao gráfico de $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 1$ que sejam perpendiculares à reta $y + x = 0$.

Sejam r_t a reta tangente, r a reta dada, m_t e m os correspondentes coeficientes angulares; como r_t e r são perpendiculares, então $m_t m = -1$; mas $m = -1$ e $m_t = f'(x_0)$, onde x_0 é a abscissa do ponto procurado; resolvendo a equação $f'(x_0) = 1$, temos $f'(x_0) = x_0^2$ e $x_0 = \pm 1$; as equações são: $3\,y - 3\,x + 5 = 0$ e $3\,y - 3\,x + 1 = 0$.

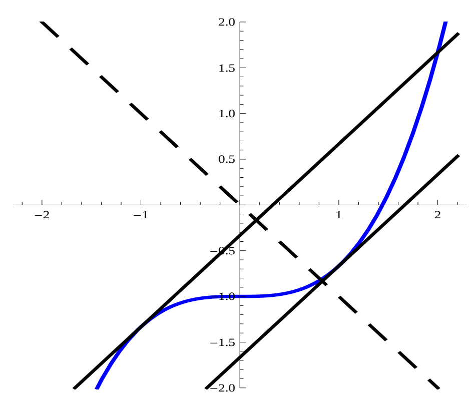


Figura 4.10: Exemplo [3].

Teorema 4.1. Se f é derivável em x_0 então f é contínua em x_0.

Para a prova veja o apêndice.

Exemplo 4.4.

Seja $f(x) = |x|$. f é contínua em todo $\mathbb{R}$; em particular em $x_0 = 0$. Mas a derivada de f em 0 não existe; de fato:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}.$$

Calculemos os limites laterais:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = & \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x}{x}\right) = 1 \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = & \lim\limits_{x \to 0} -\left(\dfrac{x}{x}\right) = -1. \end{cases}$$

Logo, $f'(0)$ não existe. Para $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f'(x)$ existe e:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x > 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

Observações 4.1.

1. Do teorema segue que não existe a derivada de f no ponto

2. Não existe a derivada de f no ponto x_0, se existe "quina"no gráfico da função contínua no ponto de abscissa x_0, como no ponto $x_0 = 0$ do exemplo anterior.

3. Também não existe a derivada de f no ponto x_0, se f é contínua em x_0 e se possui reta tangente vertical passando pelo ponto de abscissa x_0. Neste caso,:

$$\lim_{x \to x_0} |f'(x)| = \infty.$$

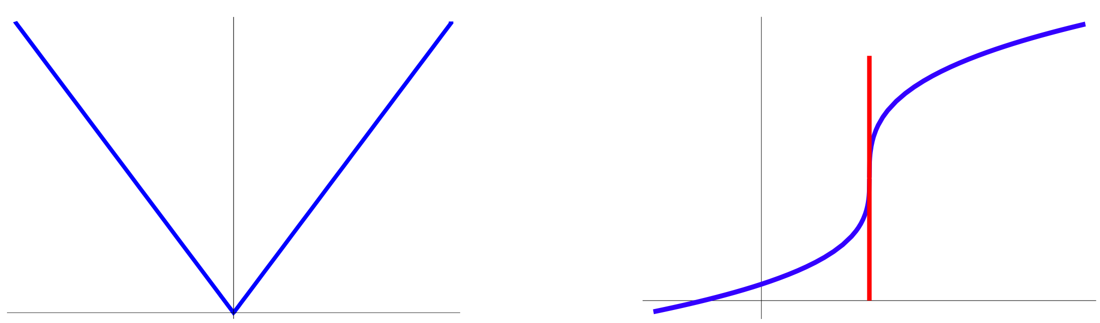


Figura 4.11: Funções não deriváveis.

Exemplo 4.5.

[1] Seja $f(x) = \begin{cases} x^2\,sen(\dfrac{1}{x}) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} (x\,sen(\frac{1}{x})) = 0;$$

logo, a derivada em 0 existe; então, f é contínua em 0.

[2] $f(x) = \sqrt[3]{x}$ é contínua em todo $\mathbb{R}$ e não é diferenciável em $x = 0$. De fato:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty.$$

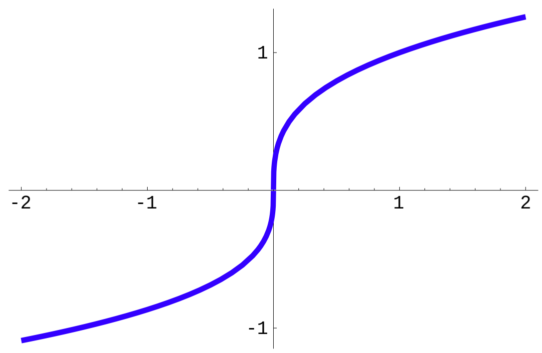


Figura 4.12: Gráfico do exemplo [2].

[3] Determine as constantes a e b tais que:

$$f(x) = \begin{cases} a\,x^3 & \text{se} \quad x < 2 \\ x^2 + b & \text{se} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

seja derivável.

Devemos calcular:

$$f'(2) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x + 2) - f(2)}{x}.$$

Devemos determinar os limites laterais:

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x+2) - f(2)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{12\,a\,x + 6\,a\,x^2 + a\,x^3}{x} = \lim_{x \to 0} \big(12\,a + 6\,a\,x + a\,x^2\big) = 12\,a \\ \\ \displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x+2) - f(2)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{4\,x + x^2}{x} = \lim_{x \to 0} \big(4 + x\big) = 4. \end{cases}$$

Logo, devemos ter $12\,a = 4$, então $a = \dfrac{1}{3}$. Por outro lado, f deve ser contínua em $x_0 = 2$; isto é:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) \Longleftrightarrow 8\,a = 4 + b \Longleftrightarrow b = -\frac{4}{3}.$$

A função deve ser definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} & \text{se} \quad x < 2 \\ x^2 - \dfrac{4}{3} & \text{se} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Note que $f(2) = \dfrac{8}{3}$.

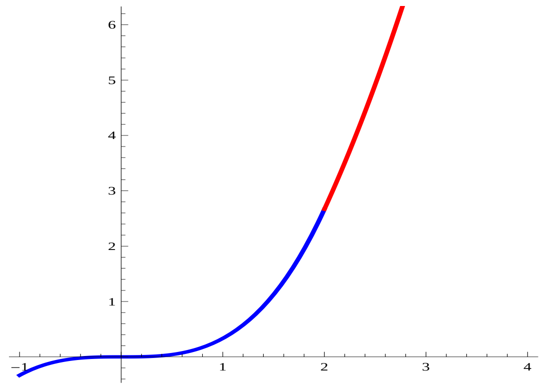


Figura 4.13: Gráfico do exemplo [3].

4.5 Regras de Derivação

[1] Se $u(x) = c$, então $u'(x) = 0$.

[2] Se $u(x) = m\,x + b$; $m,\ b \in \mathbb{R}$ e $m \neq 0$, então $u'(x) = m$.

De fato, a função é contínua e seu gráfico coincide com sua reta tangente em qualquer ponto; logo, tem o mesmo coeficiente angular. Equivalentemente,

$$\frac{u(x+t) - u(x)}{t} = \frac{m\,t}{t} = m.$$

[3] Se $u(x) = x^n$; $n \in \mathbb{N}$, então $u'(x) = n\,x^{n-1}$.

De fato: $u(x+t) - u(x) = x^n + t\left[n\,x^{n-1} + t\,(\frac{n\,(n-1)}{2}\,x^{n-2}\,t ..... + t^{n-2})\right] - x^n$ e:

$$\begin{aligned} u'(x) &= \lim_{t \to 0} \frac{u(x+t) - u(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(x+t)^n - x^n}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{t\left[n\,x^{n-1} + t\left(\frac{n\,(n-1)}{2}\,x^{n-2}\,t ..... + t^{n-1}\right)\right]}{t} \\ &= n\,x^{n-1}. \end{aligned}$$

Proposição 4.1. Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ funções deriváveis; então:

1. **Regra da soma:** As funções $u \pm v$ são deriváveis e

$$\boxed{(u \pm v)'(x) = u'(x) \pm v'(x)}$$

2. **Regra do produto:** A função $u \cdot v$ é derivável e

$$\boxed{(u \cdot v)'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$$

3. **Regra do quociente:** A função $\dfrac{u}{v}$ é derivável, e

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2} \quad \text{se} \quad v(x) \neq 0}$$

Veja as provas no apêndice.

Da regra do produto temos: $(k\,u(x))' = k\,u'(x)$, para toda constante k. Da regra do quociente, temos: se $u(x) = x^n$, $x \neq 0$, com $n < 0$, então $u'(x) = n\,x^{n-1}$.

Exemplo 4.6.

[1] Calcule $u'(x)$, sendo $u(x) = \dfrac{x^4 + 3x + 1}{x^5}$; $x \neq 0$.

Note que: $u(x) = x^{-1} + 3x^{-4} + x^{-5}$, temos:

$$u'(x) = (x^{-1} + 3x^{-4} + x^{-5})' = -x^{-2} - 12x^{-5} - 5x^{-6}.$$

[2] Calcule $u'(x)$ sendo $u(x) = (x^3 + 2x + 1)\,(2x^2 + 3)$.

Aplicando diretamente as regras:

$$u'(x) = ((x^3 + 2\,x + 1))'\,(2\,x^2 + 3) + (x^3 + 2\,x + 1)\,((2\,x^2 + 3))'$$

e $u'(x) = 10\,x^4 + 21\,x^2 + 4\,x + 6$.

[3] Calcule $u'(x)$, sendo $u(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^3 + 1}$.

$$u'(x) = (\frac{x^2 + x}{x^3 + 1})' = \frac{(x^2 + x)'(x^3 + 1) - (x^2 + x)(x^3 + 1)'}{(x^3 + 1)^2};$$

logo, $u'(x) = \dfrac{-x^4 - 2\,x^3 + 2x + 1}{(x^3 + 1)^2} = \dfrac{1 - x^2}{(x^2 - x + 1)^2}$.

[4] Determine as equações das retas tangentes ao gráfico de $f(x) = x^2 - 3\,x$ e que passa pelo ponto $(3, -4)$.

O ponto dado não pertence ao gráfico de f. Por outro lado a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0),$$

onde $f'(x_0) = 2\,x_0 - 3$ e $f(x_0) = x_0^2 - 3\,x_0$. O ponto $(3, -4)$ pertence à reta tangente, logo, obtemos:

$$-4 = y(3) = x_0^2 - 3\,x_0 + (2\,x_0 - 3)(3 - x_0) = -x_0^2 + 6\,x_0 - 9.$$

Resolvendo a equação, obtemos: $x_0 = 1$ e $x_0 = 5$. Então, as equações obtidas são:

$$y + x + 1 = 0 \quad \text{e} \quad y - 7\,x + 25 = 0.$$

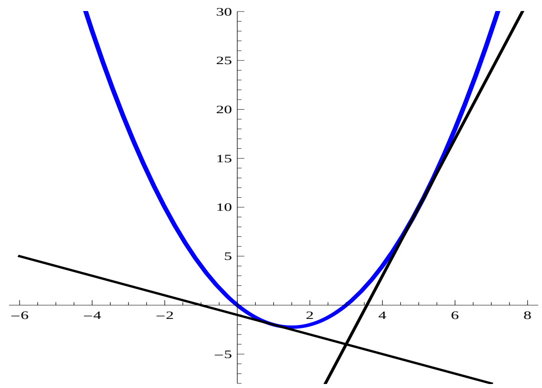


Figura 4.14: Exemplo [4].

[5] Determine as equações das retas tangentes ao gráfico de $g(x) = x^3 - x$, paralelas à reta $y - 2\,x = 0$.

O coeficiente angular da reta tangente no ponto x_0 é $g'(x_0) = 3\,x_0^2 - 1$ e deve ser igual ao coeficiente angular da reta dada; então $3\,x_0^2 - 1 = 2$; logo, $x_0 = \pm 1$. As equações das retas tangentes são:

$$y - 2\,x + 2 = 0 \quad \text{e} \quad y - 2\,x - 2 = 0.$$

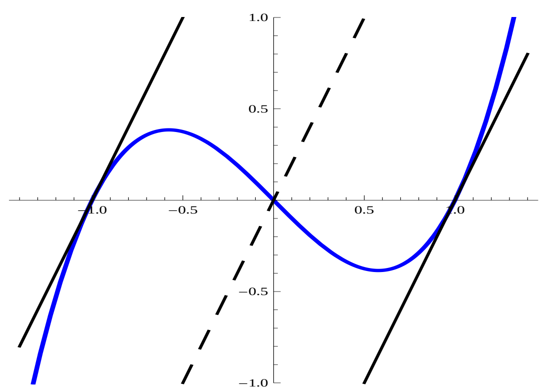


Figura 4.15: Exemplo [5].

4.6 Derivada da Função Composta

Suponha que desejamos derivar a seguinte expressão:

$$u(x) = (x^9 + x^6 + 1)^{1000}$$

com as regras dadas. Só temos a possibilidade de desenvolver o trinômio e aplicar sucessivamente a regra da soma ou escrever como produto de 1000 polinômios e usar a regra do produto. Como ambas as possibilidades são tediosas, vamos tentar reescrever esta função.

Seja $g(x) = x^{1000}$ e $f(x) = x^9 + x^6 + 1$; é claro que $u(x) = (g \circ f)(x)$.

Logo, se soubermos derivar a composta de funções o problema estará resolvido.

O seguinte teorema nos ensina a derivar uma função composta $g \circ f$ em termos das derivadas de f e g, que em geral, são mais simples.

Teorema 4.2. **(Regra da Cadeia)** Sejam f e g funções, tais que $g \circ f$ esteja bem definida. Se f é derivável em x e g é derivável em $f(x)$, então $g \circ f$ é derivável em x e:

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$$

Outra maneira de escrever o último parágrafo é: se $y = g(x)$ e $x = f(t)$, nas hipóteses do teorema, temos que:

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}}$$

Para a prova, veja o apêndice.

Aplicação:

Seja $v(x) = (u(x))^n$, onde $n \in \mathbb{Z}$. Então:

$$v'(x) = n\,(u(x))^{n-1}\,u'(x).$$

Exemplo 4.7.

[1] Calcule $v'(x)$ se $v(x) = (x^9 + x^6 + 1)^{1000}$.

Neste caso $u(x) = x^9 + x^6 + 1$; logo, $u'(x) = 9\,x^8 + 6\,x^5$ e $n = 1000$; então:

$$v'(x) = ((u(x))^{1000})' = 1000\,(u(x))^{999}\,u'(x) = 1000\,(x^9 + x^6 + 1)^{999}\,(9\,x^8 + 6\,x^5).$$

[2] Calcule $\dfrac{dy}{dt}$ se $y = g(x) = x^3 + x + 1$ e $x = x(t) = t^2 + 1$.

Pela regra da cadeia:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt} = 2\,t\,(3x^2 + 1) = 6\,t\,(t^2 + 1)^2 + 2\,t.$$

[3] Seja g uma função derivável e $h(x) = g(x^2+1)$. Calcule $h'(1)$ se $g'(2) = 5$.

Observemos que $h(x) = (g \circ f)(x)$, onde $f(x) = x^2 + 1$; pela regra da cadeia:

$$h'(x) = g'(f(x))\, f'(x),$$

e $f'(x) = 2\,x$. Logo, $h'(x) = g'(x^2+1)\,2\,x$. Calculando a última expressão em $x = 1$, temos que: $h'(1) = 2\,g'(2) = 10$.

[4] Se $y = u^3 + u^2 + 3$ e $u = 2\,x^2 - 1$, calcule $\dfrac{dy}{dx}$.

Pela regra da cadeia:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx} &= 4\,x\,(3\,u^2 + 2\,u) = 4\,x\,(3\,(2\,x^2-1)^2 + 2\,(2\,x^2-1))\\ &= 4\,(12\,x^5 - 8\,x^3 + x);\end{aligned}$$

ou, fazemos a composta das funções:

$$y = u^3 + u^2 + 3 = (2\,x^2-1)^3 + (2\,x^2-1)^2 + 3 \;\text{ e }\; y' = 4\,(12\,x^5 - 8\,x^3 + x).$$

[5] Determine $f'(1)$ se $f(x) = h(h(h(x)))$, $h(1) = 1$ e $h'(1) = 2$.

Pela regra da Cadeia:

$$f'(x) = h'(x)\,h'(h(x))\,h'(h(h(x)));$$

logo, $f'(1) = 8$.

4.6.1 Teorema da Função Inversa

A seguir apresentamos um dos teoremas fundamentais em Matemática, o qual garante a existência da inversa derivável de uma função derivável. A prova deste teorema fica fora dos objetivos deste livro.

Teorema 4.3. (Função Inversa): Seja f uma função definida num intervalo aberto I. Se f é derivável em I e $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, então f possui inversa f^{-1} derivável e:

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

Para a prova da primeira parte veja a bibliografia avançada.

A fórmula pode ser obtida diretamente da regra da cadeia. De fato, $(f \circ f^{-1})(x) = x$ para todo $x \in I$. Derivando ambos os lados, temos que:

$$(f \circ f^{-1})'(x) = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1.$$

Exemplo 4.8.

[1] Seja $f(x) = x^2,\ x \geq 0$; logo sua inversa é $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ e $f'(x) = 2x \neq 0$ se $x \neq 0$; logo:

$$f'(f^{-1}(x)) = 2\sqrt{x}.$$

Aplicando o teorema:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x \neq 0.$$

[2] Seja $f(x) = x^3$; logo sua inversa é $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ e $f'(x) = 3\,x^2 \neq 0$ se $x \neq 0$;

$$f'(f^{-1}(x)) = 3\,\sqrt[3]{x^2}.$$

Aplicando o teorema:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{3\,\sqrt[3]{x^2}},\ x \neq 0.$$

[3] Se $n \in \mathbb{N}$, então:

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{x^{\frac{1}{n}-1}}{n},$$

para todos os valores de x tais que $\sqrt[n]{x}$ seja definida.

De fato, seja $u(x) = x^n$; para n par, $x > 0$ e para n ímpar, x não tem restrições; a inversa de u é $u^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ e $u'(x) = n\,x^{n-1}$; $u'(x) \neq 0$ se $x \neq 0$. Aplicando o teorema, temos:

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = (u^{-1}(x))' = \frac{1}{u'(u^{-1}(x))} = \frac{x^{\frac{1}{n}-1}}{n}.$$

Em geral, pela regra da cadeia, se $u = u(x)$ é uma função derivável e:

$$v(x) = (u(x))^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{Q};$$

então:

$$v'(x) = \alpha\,(u(x))^{\alpha-1}\,u'(x).$$

[4] Calcule $f'(x)$, se $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Escrevemos $f = g \circ h$, onde $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = x^2 + 1$; logo, $g'(x) = \dfrac{1}{2\,\sqrt{x}}$ e $h'(x) = 2\,x$; então: $f'(x) = g'(h(x))\,h'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

[5] Determine $f'(0)$, se $f(x) = h(x)\,\sqrt[4]{h(x)+1}$, $h(0) = 0$ e $h'(0) = 1$.

Pela regra da cadeia:

$$f'(x) = \frac{h'(x)\,(4 + 5\,h(x))}{4\,\sqrt[4]{(1+h(x))^3}};$$

logo, $f'(0) = 1$.

4.7 Derivadas das Funções Elementares

A seguir apresentamos as regras de derivação para as funções elementares.

4.7.1 Função Exponencial

Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a \neq 1$ e $\boxed{u(x) = a^x}$ Então,

$$\boxed{u'(x) = ln(a)\, a^x}$$

De fato, $u'(x) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{a^{x+t} - a^x}{t} = a^x \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{a^t - 1}{t} = ln(a)\, a^x$. Em particular, se $a = e$, temos :

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

Seja $v = v(x)$ uma função derivável e considere a função: $\boxed{u(x) = a^{v(x)}}$ Então:

$$\boxed{u'(x) = ln(a)\ a^{v(x)}\, v'(x)}$$

De fato, $a^{v(x)} = e^{v(x) ln(a)}$; usando a regra da cadeia para $g(x) = e^x$ e $f(x) = v(x)\, ln(a)$, temos que $u(x) = (g \circ f)(x)$; então $g'(x) = e^x$ e $g'(f(x)) = e^{v(x) ln(a)} = a^{v(x)}$ e $f'(x) = v'(x)\, ln(a)$; logo, em particular,

$$\boxed{(e^{v(x)})' = e^{v(x)}\, v'(x)}$$

O crescimento ou decrescimento exponencial, expresso pela função

$$Q(t) = Q_0\, e^{kt},\ (k \neq 0)$$

tem a propriedade $Q'(t) = k\, Q(t)$, isto é, a sua derivada é proporcional à função. Aliás, isto é o que caracteriza a função exponencial.

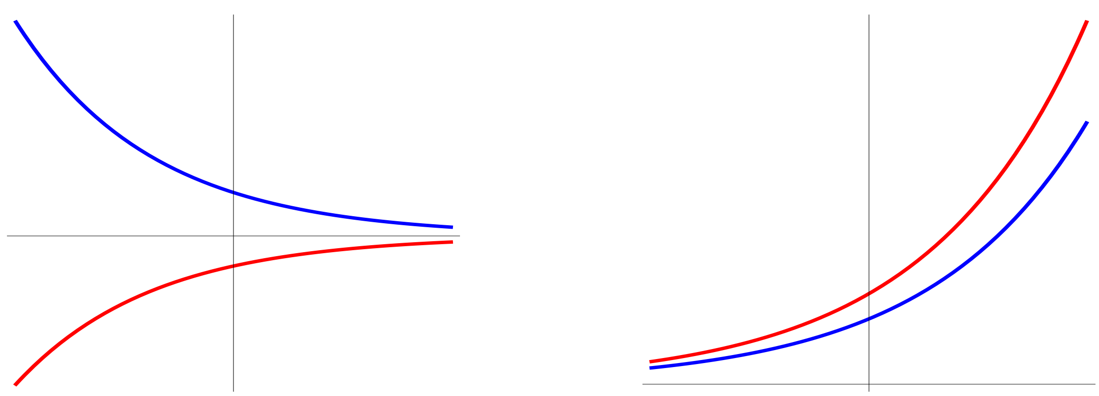


Figura 4.16: Nos desenhos, a função exponencial em azul e sua derivada em vermelho; para $0 < a < 1$ e $a > 1$, respectivamente.

Exemplo 4.9.

[1] Seja $y = e^{\sqrt{x}}$.

Fazendo $v(x) = \sqrt{x}$, temos $y' = (e^{v(x)})' = e^{v(x)}\, v'(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

[2] Seja $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Fazendo $v(x) = \dfrac{1}{x}$, temos $y' = -ln(2)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} v'(x) = ln(2)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \dfrac{1}{x^2}$.

[3] Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $y = e^{-x^2}$ no ponto de abscissa 1.

Derivando $y' = -2\,x\,e^{-x^2}$; $y'(1) = -2\,e^{-1}$ e $y(1) = e^{-1}$; logo, a equação da reta tangente passando pelo ponto $(1, y(1))$, é:

$$y + 2\,x\,e^{-1} - 3\,e^{-1} = 0.$$

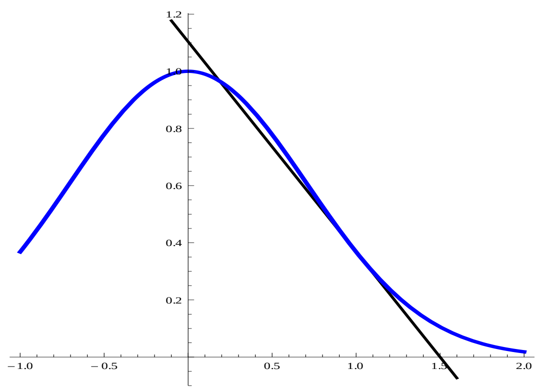


Figura 4.17: A reta tangente a $y = e^{-x^2}$, no ponto de abscissa 1.

4.7.2 Função Logarítmica

Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a \neq 1$ e $\boxed{u(x) = log_a(x)}$.

Usando o teorema da função inversa para $f^{-1} = u$ e $f(x) = a^x$, temos que:

$$\boxed{u'(x) = \frac{log_a(e)}{x}}$$

De fato, $u'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{1}{x\,ln(a)} = \dfrac{log_a(e)}{x}$. Em particular, se $a = e$:

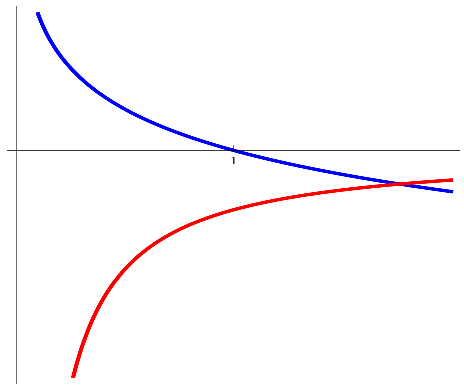
$$\boxed{(ln(x))' = \frac{1}{x}}$$

Usemos a regra da cadeia para calcular a derivada de $\boxed{u(x) = log_a(v(x))}$ onde $v(x) > 0$ é uma função derivável. Em tal caso:

$$\boxed{u'(x) = \frac{log_a(e)\, v'(x)}{v(x)}}$$

Em particular, se $a = e$:

$$\boxed{(ln(v(x)))' = \frac{v'(x)}{v(x)}}$$



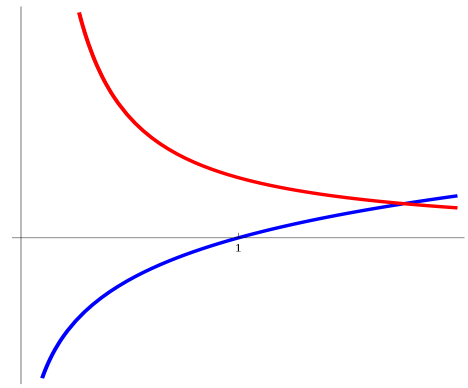


Figura 4.18: Função logarítmica em azul e sua derivada em vermelho; para $0 < a < 1$ e $a > 1$, respectivamente.

4.7.3 Algumas Propriedades

(a) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, se $u(x) = x^\alpha$, $x > 0$; então:

$$u'(x) = (x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1}.$$

De fato, aplicando logaritmo à expressão $y = u(x) = x^\alpha$: temos, $ln(y) = ln(u(x)) = \alpha\, ln(x)$; derivando:

$$[ln(y)]' = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{y'}{y};$$

ou seja, $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{\alpha}{x}$; logo,

$$y' = y\left[\frac{\alpha}{x}\right] = \frac{\alpha\, x^\alpha}{x} = \alpha\, x^{\alpha-1}.$$

Observação 4.2.

Em geral, se $\boxed{u(x) = [v(x)]^\alpha}$, onde $v(x) > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$\boxed{u'(x) = \alpha\, (v(x))^{\alpha-1}\, v'(x)}$$

(b) Seja $\boxed{y=[u(x)]^{v(x)}}$, onde $u(x)>0$. Aplicando logaritmo à expressão:

$$y=[u(x)]^{v(x)};$$

temos que, $ln(y)=v(x)\,ln(u(x))$. Derivando, temos:

$$\frac{y'}{y}=v'(x)\,ln(u(x))+\frac{u'(x)\,v(x)}{u(x)} \quad \text{e} \quad y'(x)=y(x)\left[v'(x)\,ln(u(x))+\frac{u'(x)\,v(x)}{u(x)}\right].$$

Então, se $y=(u(x))^{v(x)}$:

$$\boxed{y'=[u(x)]^{v(x)}\left[v'(x)\,ln(u(x))+\frac{u'(x)\,v(x)}{u(x)}\right]}$$

Exemplo 4.10.

[1] Calcule a derivada de $y=3\sqrt{x}+x^{-5}+2\sqrt[4]{x^3}$, $x>0$.

Aqui $\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\alpha=-5$ e $\alpha=\frac{3}{4}$, respectivamente; logo: $y'=\dfrac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}-5x^{-6}+\dfrac{3}{2}x^{-\frac{1}{4}}$.

[2] Calcule a derivada de $y=\dfrac{\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}}{(x^2+x+1)^4}$.

Aplicando logaritmo à função e usando as propriedades da função logarítmica, temos:

$$ln(y)=ln(\sqrt{x})+ln(e^{\sqrt{x}})-4\,ln(x^2+x+1)=\frac{ln(x)}{2}+\sqrt{x}-4\,ln(x^2+x+1).$$

Derivando: $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{1}{2\,x}+\dfrac{1}{2\,\sqrt{x}}-\dfrac{8\,x+4}{x^2+x+1}$,logo:

$$y'=y(x)\left[\frac{1}{2\,x}+\frac{1}{2\,\sqrt{x}}-\frac{8\,x+4}{x^2+x+1}\right]=\frac{\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}}{(x^2+x+1)^4}\left[\frac{1}{2\,x}+\frac{1}{2\,\sqrt{x}}-\frac{8\,x+4}{x^2+x+1}\right].$$

[3] Calcule a derivada de $y=x^x$, $x>0$.

Aplicando logaritmo à expressão e usando as propriedades da função logarítmica, temos: $ln(y)=x\,ln(x)$. Derivando: $\dfrac{y'}{y}=ln(x)+1$ e,

$$y'=y(x)\,(ln(x)+1)=(ln(x)+1)\;x^x.$$

[4] Calcule a derivada de $y=x^{\sqrt{x}}$, $x>0$.

Aplicando logaritmo à expressão e usando as propriedades da função logarítmica, temos: $ln(y)=ln(x)\,\sqrt{x}$. Derivando: $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{ln(x)}{2\,\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, logo:

$$y'=y(x)\left[\frac{ln(x)}{2\,\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right]=\left[\frac{ln(x)+2}{2\,\sqrt{x}}\right]x^{\sqrt{x}}.$$

[5] Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^{x^2}$, $(x > 0)$ no ponto de abscissa $x_0 = 1$.

Aplicando logaritmo a ambos os lados de $y = x^{x^2}$, temos que: $ln(y) = x^2\, ln(x)$; derivando, obtemos:

$$y' = y\,(2\,x\,ln(x) + x) = x^{x^2+1}\,(2\,ln(x) + 1) \Longrightarrow y'(1) = 1$$

e a equação da reta tangente é $y - x = 0$.

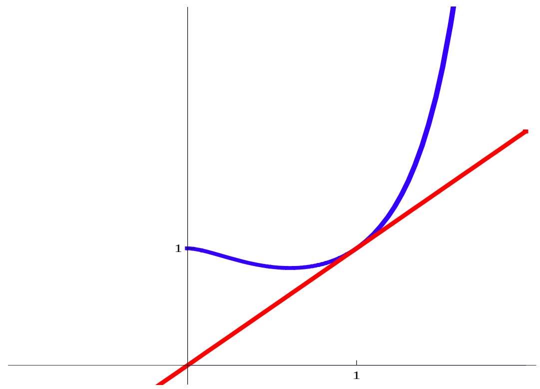


Figura 4.19: Gráfico de $f(x) = x^{x^2}$.

[6] Seja $f(x) = ln(x)$. Sabendo que $f'(1) = 1$, verifique que: $\lim\limits_{t \to 0}(t+1)^{\frac{1}{t}} = e$.

$$f'(1) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t+1) - f(1)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{ln(t+1)}{t} = \lim_{t \to 0} ln((t+1)^{\frac{1}{t}}) = ln\left[\lim_{t \to 0}(t+1)^{\frac{1}{t}}\right];$$

então, $1 = ln\left[\lim\limits_{t \to 0}(t+1)^{\frac{1}{t}}\right]$; logo:

$$\lim_{t \to 0}(t+1)^{\frac{1}{t}} = e.$$

Tabela

Sejam $u(x)$, $v(x)$ funções diferenciáveis e k uma constante. Se:

[1] $y = k$, então $y' = 0$.

[2] $y = x$, então $y' = 1$.

[3] $y = k\,v(x)$, então $y' = k\,v'(x)$.

[4] $y = u(x) \pm v(x)$, então $y' = u'(x) \pm v'(x)$.

[5] $y = u(x) \cdot v(x)$, então $y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.

[6] $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, $v(x) \neq 0$, então $y' = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$.

[7] $y = a^{u(x)}$, então $y' = a^{u(x)} \cdot ln(a) \cdot u'(x)$.

[8] $y = e^{u(x)}$, então $y' = u'(x)\, e^{u(x)}$

[9] $y = log_a(u(x))$, então $y' = log_a(e)\, \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

[10] $y = ln(u(x))$, então $y' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

[11] $y = (u(x))^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, então $y' = \alpha\,(u(x))^{\alpha-1}\, u'(x)$.

[12] Seja $y = (u(x))^{v(x)}$, onde $u(x) > 0$, então:

$$y' = (u(x))^{v(x)}\,\Big[v'(x)\, ln(u(x)) + \frac{u'(x)\, v(x)}{u(x)}\Big].$$

4.7.4 Funções Trigonométricas

Se $y = sen(x)$, então $sen(x+t) - sen(x) = 2\, sen(u)\, cos(x+u)$, onde $u = \dfrac{t}{2}$. Logo:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lim_{t \to 0} \frac{sen(x+t) - sen(x)}{t} = \lim_{u \to 0} \frac{sen(u)\, cos(x+u)}{u} \\ &= \lim_{u \to 0} \frac{sen(u)}{u}\; cos(x+u) \\ &= cos(x) \end{aligned}$$

onde, para calcular o último limite usamos um limite fundamental. Se $y = cos(x)$, sabendo que $cos(x) = sen(\dfrac{\pi}{2} - x)$ e utilizando a regra da cadeia com $u(x) = \dfrac{\pi}{2} - x$, temos:

$$y' = cos(u(x))\, u'(x) = -cos\big(\frac{\pi}{2} - x\big) = -sen(x).$$

Se $y = tg(x)$, sabendo que $tg(x) = \dfrac{sen(x)}{cos(x)}$ e utilizando a regra do quociente, temos:

$$y' = \frac{cos^2(x) + sen^2(x)}{cos^2(x)} = sec^2(x).$$

Se $y = sen(x)$, então $y' = cos(x)$.

Se $y = cos(x)$, então $y' = -sen(x)$

Se $y = tg(x)$, então $y' = sec^2(x)$

Se $y = cotg(x)$, então $y' = -cosec^2(x)$

Se $y = sec(x)$, então $y' = tg(x)\, sec(x)$

Se $y = cosec(x)$, então $y' = -cotg(x)\, cosec(x)$.

Tabela

Sejam $u(x)$, $v(x)$ funções diferenciáveis e k uma constante. Se:

[13] Se $y = sen(u(x))$, então $y' = cos(u(x))\, u'(x)$.

[14] Se $y = cos(u(x))$, então $y' = -sen(u(x))\, u'(x)$.

[15] Se $y = tg(u(x))$, então $y' = sec^2(u(x))\, u'(x)$.

[16] Se $y = cotg(u(x))$, então $y' = -cosec^2(u(x))\, u'(x)$.

[17] Se $y = sec(u(x))$, então $y' = tg(u(x))\, sec(u(x)) \cdot u'(x)$.

[18] Se $y = cosec(u(x))$, então $y' = -cotg(u(x))\, cosec(u(x))\, u'(x)$.

Exemplo 4.11.

[1] Se $y = sen(\alpha x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Fazendo $u(x) = \alpha\, x$, temos $u'(x) = \alpha$; utilizando a tabela, temos que:

$$y' = \alpha\, cos(\alpha x).$$

Para as outras funções trigonométricas, o procedimento é análogo.

[2] Seja $y = sen^{\beta}(\alpha x)$, onde $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Fazendo $y = sen^{\beta}(\alpha x) = (sen(\alpha x))^{\beta}$, derivando como uma potência e usando o exercício anterior, temos:

$$y' = \beta\, \alpha\, sen^{\beta-1}(\alpha x)\, cos(\alpha x).$$

Para as outras funções trigonométricas, o procedimento é análogo.

[3] Seja $y = tg(sen(x))$.

Fazendo $u(x) = sen(x)$, temos $u'(x) = cos(x)$; logo, temos que:

$$y' = cos(x)\, sec^2(sen(x)).$$

[4] Determine as retas tangentes ao gráfico de $u = sen(x)$ que tenham o coeficiente angular igual a $\dfrac{1}{2}$.

Sabemos que se $u(x) = sen(x)$, então $u'(x) = cos(x)$; logo, devemos resolver a equação :

$$u'(x) = \frac{1}{2},$$

ou seja, $cos(x) = \frac{1}{2}$, que tem soluções $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$. As equações são:

$$6\,y - 3\,x + (1 + 6\,k)\,\pi - 3\,\sqrt{3} = 0, \quad \text{se } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{e}$$
$$6\,y - 3\,x + (6\,k - 1)\,\pi + 3\,\sqrt{3} = 0, \quad \text{se } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

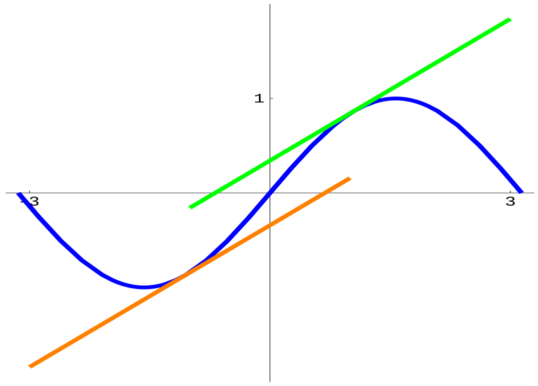


Figura 4.20: Desenho para $k = 0$.

[5] Determine os pontos onde o gráfico da função $y = x + 2\,sen(x)$ possui reta tangente horizontal.

Devemos resolver a equação $y' = 0$ ou, equivalentemente, $cos(x) = -\dfrac{1}{2}$; logo, os pontos tem abscissas $x = \pm\dfrac{2\,\pi}{3} + 2\,k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

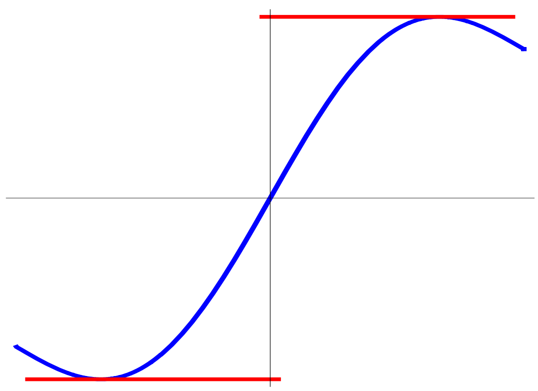


Figura 4.21: Desenho para $k = 0$.

4.7.5 Funções Trigonométricas Inversas

Seja $y = arcsen(x)$. A função arco seno, definida para $x \in [-1, 1]$ é a função inversa da função:

$$f(x) = sen(x), \quad \text{se} \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}.$$

Logo, $f'(x) = cos(x) \neq 0$ se $x \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$. Usando a fórmula do Teorema da Função Inversa, temos: se $y = f^{-1}(x) = arcsen(x)$, ou seja, $sen(y) = x$, então:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{cos(arcsen(x))} = \frac{1}{cos(y)}.$$

Mas, $cos(y) = \sqrt{1 - sen^2(y)}$, pois $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Então:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - sen^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \text{se} \quad x \in (-1, 1).$$

Seja $y = arccos(x)$. Como $arcos(x) = \frac{\pi}{2} - arcsen(x)$, temos: $y' = -(arcsen(x))'$; logo,

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad \text{se} \quad x \in (-1, 1).$$

Tabela

Sejam $u(x)$, $v(x)$ funções diferenciáveis e k uma constante. Se:

[19] Se $y = arcsen(u(x))$, então $y' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}$.

[20] Se $y = arccos(u(x))$, então $y' = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}$.

[21] Se $y = arctg(u(x))$, então $y' = \frac{u'(x)}{1 + u^2(x)}$.

[22] Se $y = arccotg(u(x))$, então $y' = -\frac{u'(x)}{1 + u^2(x)}$.

[23] Se $y = arcsec(u(x))$, então $y' = \frac{u'(x)}{|u(x)|\sqrt{u^2(x) - 1}}$, $|u(x)| > 1$.

[24] Se $y = arccosec(u(x))$, então $y' = -\frac{u'(x)}{|u(x)|\sqrt{u^2(x) - 1}}$, $|u(x)| > 1$.

4.7.6 Funções Hiperbólicas

As derivadas das funções hiperbólicas são calculadas diretamente, pois todas elas envolvem exponenciais. Por exemplo, seja $y = senh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$; derivando, temos: $y' = cosh(x)$.

Tabela

Seja $u(x)$ derivável. Usando a regra da cadeia, temos:

[25] Se $y = senh(u(x))$, então $y' = cosh(u(x))\, u'(x)$.

[26] Se $y = cosh(u(x))$, então $y' = senh(u(x))\, u'(x)$.

[27] Se $y = tgh(u(x))$, então $y' = sech^2(u(x))\, u'(x)$.

[28] Se $y = cotgh(u(x))$, então $y' = -cosech^2(u(x))\, u'(x)$.

[29] Se $y = sech(u(x))$, então $y' = -tgh(u(x))\, sech(u(x))\, u'(x)$.

[30] Se $y = cosech(u(x))$, então $y' = -cotgh(u(x))\, cosech(u(x))\, u'(x)$.

Exemplo 4.12.

Calcule as derivadas y', sendo:

[1] $y = e^{tg(x)}$.

Fazendo $u(x) = tg(x)$, temos $y = e^{u(x)}$; usando a tabela: $y' = u'(x)\, e^{u(x)}$ e $y' = sec^2(x)\, e^{tg(x)}$.

[2] $y = ln(ln(x))$.

Fazendo $u(x) = ln(x)$, temos $y = ln(u(x))$; logo: $y' = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{1}{x\, ln(x)}$.

[3] $y = x\, cos(\dfrac{1}{x})$. Então $y' = cos(\dfrac{1}{x}) + x\, \big(cos(\dfrac{1}{x})\big)'$.

Fazendo $u(x) = \dfrac{1}{x}$, temos que $cos(\dfrac{1}{x}) = cos(u(x))$; como $\big(cos(\dfrac{1}{x})\big)' = \dfrac{1}{x^2}\, sen(\dfrac{1}{x})$, temos:

$$y' = cos(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x}\, sen(\frac{1}{x}).$$

[4] $y = cos(sen(x))$.

Fazendo $u(x) = sen(x)$, temos $y = cos(u(x))$; usando a tabela:

$$y' = -u'(x)\ sen(u(x)) = -cos(x)\, sen(sen(x)).$$

[5] $y = arccotg(3\, x^2)$.

Fazendo $u(x) = 3\, x^2$, temos $y = arccotg(u(x))$; usando a tabela:

$$y' = -\frac{u'(x)}{1 + u^2(x)} = -\frac{6x}{1 + 9\, x^4}.$$

[6] $y = arctg(\dfrac{1}{x})$.

Fazendo $u(x) = \dfrac{1}{x}$, temos $y = arctg(u(x))$; usando a tabela:

$$y' = \frac{u'(x)}{1 + u^2(x)} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

[7] $y = sen(ln(x))$.

Fazendo $u(x) = ln(x)$, temos $y = sen(u(x))$; usando a tabela:

$$y' = u'(x)\, cos(u(x)) = \frac{cos(ln(x))}{x}.$$

[8] $y = ln(sen^2(x))$.

Fazendo $u(x) = sen^2(x)$, temos $y = ln(u(x))$; usando a tabela:

$$y' = \frac{u'(x)}{u(x)} = 2\,cotg(x).$$

[9] $y = ln(cos(\dfrac{x-1}{x}))$.

Fazendo $u(x) = cos(\frac{x-1}{x})$, temos $y = ln(u(x))$; usando a tabela:

$$y' = \frac{u'(x)}{u(x)} = -\frac{1}{x^2}\,tg(\frac{x-1}{x}).$$

[10] $y = arcsec(ln(x))$.

Fazendo $u(x) = ln(x)$, temos $y = arcsec(u(x))$; usando a tabela:

$$y' = \begin{cases} \dfrac{1}{x\,ln(x)\,\sqrt{ln^2(x)-1}} & \text{se} \quad x > e \\ \\ -\dfrac{1}{x\,ln(x)\,\sqrt{ln^2(x)-1}} & \text{se} \quad 0 < x < e^{-1}. \end{cases}$$

[11] Calcule a área do triângulo determinado pelos eixos coordenados e pela reta tangente à curva $y = \dfrac{1}{x}$ no ponto $x = 2$.

A reta tangente à curva $y = f(x) = x^{-1}$ no ponto $x = 2$ é: $y - \dfrac{1}{2} = f'(2)\,(x-2)$. Como $f'(2) = -\dfrac{1}{4}$, a equação da reta tangente é: $4\,y + x - 4 = 0$. Se $x = 0$, então $y = 1$; se $y = 0$, então $x = 4$. A altura do triângulo é igual a 1 e a base é igual a 4. Logo, a área do triângulo é: $A = 2\,u.a.$

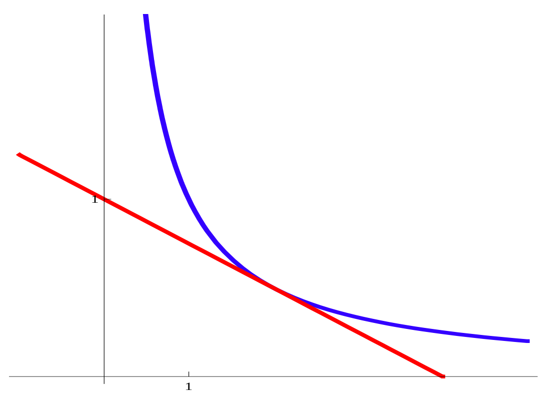


Figura 4.22:

[12] Uma partícula move-se ao longo da curva $y = 1 - 2\,x^2$. Quando $x = 3$ a partícula escapa pela tangente à curva. Determine a equação da reta de escape.

A equação da reta tangente à curva no ponto de abscissa 3 é $y - f(3) = f'(3)\,(x-3)$, onde $f(x) = 1 - 2\,x^2$; logo, $f'(x) = -4\,x$ e $f'(3) = -12$; a equação é: $y + 12\,x - 19 = 0$.

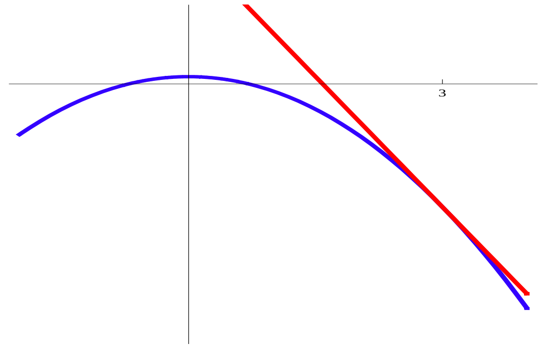


Figura 4.23:

4.8 Derivação Implícita

Seja $F(x,y)=0$ uma equação nas variáveis x e y.

Definição 4.5. A função $y=f(x)$ é definida implicitamente pela equação $F(x,y)=0$, quando

$$F(x,f(x))=0.$$

Em outras palavras, quando $y=f(x)$ satisfaz à equação $F(x,y)=0$.

Exemplo 4.13.

[1] Seja a equação $F(x,y)=0$, onde $F(x,y)=x^3+y-1$; a função $y=f(x)=1-x^3$ é definida implicitamente pela equação $F(x,y)=0$, pois:

$$F(x,f(x))=x^3+(1-x^3)-1=0.$$

[2] Seja a equação $F(x,y)=0$, onde $F(x,y)=y^4+x-1$; a função $y=f(x)=\sqrt[4]{1-x}$ é definida implicitamente pela equação $F(x,y)=0$, pois:

$$F(x,f(x))=(\sqrt[4]{1-x})^4+x-1=0.$$

[3] Seja a equação $F(x,y)=0$, onde $F(x,y)=x^2+y^2-25$; esta equação define implicitamente uma família de funções; por exemplo $f(x)=\sqrt{25-x^2}$, $f(x)=-\sqrt{25-x^2}$; em geral,

$$y=f_c(x)=\begin{cases}\sqrt{25-x^2} & \text{se} \quad -5\le x\le c\\ \\ -\sqrt{25-x^2} & \text{se} \quad 5\ge x>c,\end{cases}$$

para cada $c\in(-5,5)$.

[4] Seja $F(x,y)=0$, onde $F(x,y)=y^2-3\,y-x-7$; então, as funções $f(x)=\dfrac{3\pm\sqrt{4\,x+37}}{2}$ são definidas implicitamente pela equação $F(x,y)=0$, pois:

$$F(x,f(x))=F(x,\frac{3\pm\sqrt{4\,x+37}}{2})=0.$$

Observemos que nada garante que uma função definida implicitamente seja contínua, derivável, etc. Na verdade, nem sempre uma equação $F(x, y) = 0$ define implicitamente alguma função. Por exemplo, considere a seguinte equação:

$$x^3\,y^6 + x^3\,tg(x\,y^2) + ln(x + y) + sen(x) = 0.$$

4.8.1 Cálculo da Derivada de uma Função Implícita

Podemos calcular a derivada de uma função definida implicitamente sem necessidade de explicitá-la.

Para isto usaremos novamente a regra da cadeia. Suponha que $F(x, y) = 0$ define implicitamente uma função derivável $y = f(x)$. Através de exemplos mostraremos que podemos calcular y' sem conhecer y.

Exemplo 4.14.

[1] Seja $y = f(x)$ uma função derivável definida implicitamente pela equação $x^2 + y^2 = 1$. Calcule y'.

Como $y = f(x)$, temos $x^2+((f(x))^2 = 1$. Derivando em relação a x ambos os lados da igualdade e usando a regra da cadeia, obtemos:

$$(x^2)' + (((f(x))^2)' = (1)' \Longrightarrow 2\,x + 2\,f(x)\,f'(x) = 0 \Longrightarrow x + f(x)\,f'(x) = 0.$$

Então, $f'(x) = -\dfrac{x}{f(x)} = -\dfrac{x}{y}$. Logo,

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

[2] Verifique que a função $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ é definida implicitamente por $x^2 + y^2 = 1$ e calcule f'.

É imediato que a função $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ é definida implicitamente pela equação $x^2 + y^2 = 1$ e:

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{y}.$$

4.8.2 Método de Cálculo da Função Implícita

Dada uma equação que define y implicitamente como uma função derivável de x, calcula-se y' do seguinte modo:

1. Deriva-se ambos os lados da equação em relação a x, termo a termo. Ao fazê -lo, tenha em mente que y é uma função de x e use a regra da cadeia, quando necessário, para derivar as expressões nas quais figure y.

2. O resultado será uma equação onde figura não somente x e y, mas também y'. Expresse y' em função de x e y.

3. Tal processo é chamado explicitar y'.

Exemplo 4.15.

Calcule y' se $y = f(x)$ é uma função derivável, definida implicitamente pelas equações dadas:

[1] $x^3 - 3\,x^2\,y^4 + y^3 = 6\,x + 1$.

Note que $x^3 - 3\,x^2\,y^4 + y^3 = 6\,x + 1$ é igual a $x^3 - 3\,x^2\,(f(x))^4 + (f(x))^3 = 6\,x + 1$.

Derivando ambos os lados da equação, obtemos: $(x^3)' - (3\,x^2\,(f(x))^4)' + ((f(x))^3)' = (6\,x + 1)'$; então,

$$3\,x^2 - 6\,x\,(f(x))^4 - 12\,x^2\,f'(x)\,(f(x))^3 + 3\,f'(x)\,(f(x))^2 = 6.$$

Logo, $3\,x^2 - 6\,x\,y^4 - 12\,x^2\,y'\,y^3 + 3\,y'\,y^2 = 6$. Expressando y' em função de x e y:

$$y' = \frac{2 - x^2 + 2\,x\,y^4}{y^2\,(1 - 4\,x^2\,y)}.$$

[2] $x^2 + x\,y + x\,sen(y) = y\,sen(x)$.

Derivando ambos os lados $2\,x + y + x\,y' + sen(y) + x\,cos(y)\,y' = y'\,sen(x) + y\,cos(x)$. Expressando y' em função de x e y:

$$y' = \frac{y\,cos(x) - 2\,x - y - sen(y)}{x + x\,cos(y) - sen(x)}.$$

[3] $sen(x + y) = y^2\,cos(x)$.

Derivando ambos os lados $(1 + y')\,cos(x + y) = 2\,y\,y'\,cos(x) - y^2\,sen(x)$. Expressando y' em função de x e y:

$$y' = \frac{y^2\,sen(x) + cos(x + y)}{2\,y\,cos(x) - cos(x + y)}.$$

O processo de derivar implicitamente pode ser usado somente se a função determinada pela forma implícita é derivável. Mas, para os exemplos e exercícios, sempre consideraremos esta exigência satisfeita.

[4] Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função implícita definida por:

$$y^2 = x^2\,(x + 2),$$

no ponto $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

Derivando a equação implicitamente:

$$2\,y\,y' = x\,(3\,x + 4).$$

Expressando y' em função de x e y:

$$y' = \frac{3\,x^2 + 4\,x}{2\,y};$$

lembrando que $x = -\frac{1}{2}$, $y' = f'(x)$ e $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = f\big(-\frac{1}{2}\big) = y$, temos que:

$$f'\big(-\frac{1}{2}\big) = -\frac{5}{2\sqrt{6}}$$

é o coeficiente angular da reta tangente no ponto $\big(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\big)$ e a equação desta reta é

$$4\sqrt{6}\,y + 10\,x - 1 = 0.$$

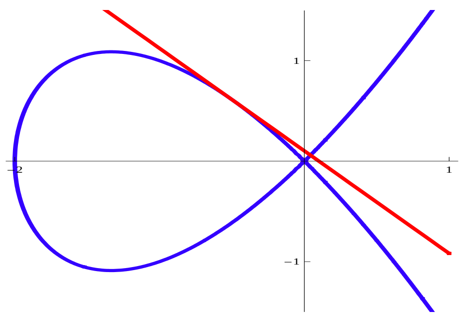


Figura 4.24:

[5] Determine a equação da reta tangente e a equação da reta normal ao gráfico da função implícita definida por: $(x^2+y^2)\,(y^2+x\,(x+1)) = 4\,x\,y^2$ no ponto $\big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big)$.

Derivando a equação implicitamente

$$2\,y'\,y\,(2\,y^2+2\,x^2-3\,x) = -(4\,x\,y^2+4\,x^3+3\,x^2-3\,y^2).$$

Lembrando que $x = \frac{1}{2}$, $y' = f'(x)$ e $y = \frac{1}{2}$,temos que $f'(\frac{1}{2}) = 2$ é o coeficiente angular da reta tangente no ponto $\big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big)$ e a equação desta reta é $2\,y - 4\,x + 1 = 0$. A equação da reta normal é $4\,y + 2\,x - 3 = 0$.

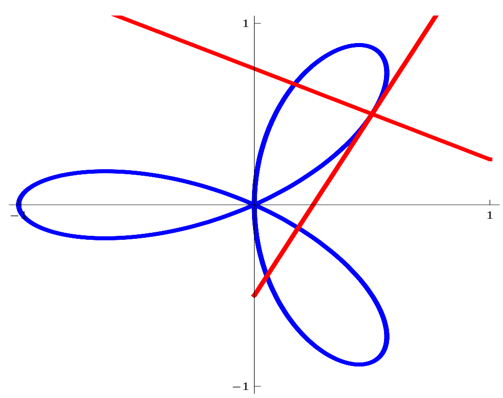


Figura 4.25:

[6] Determine a equação da reta tangente e a equação da reta normal ao gráfico da função implícita definida por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

em qualquer ponto; (a e b constantes não nulas).

Derivando a equação implicitamente:

$$\frac{2\,x}{a^2} + \frac{2\,y\,y'}{b^2} = 0.$$

Expressando y' em função de x e y:

$$y' = -\frac{b^2\,x}{a^2\,y};$$

lembrando que $x = x_0$, $y' = f'(x)$ e $y_0 = f(x_0)$, se $y_0 \neq 0$, temos:

$$f'(x_0) = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0},$$

que é o coeficiente angular da reta tangente no ponto (x_0, y_0) e a equação desta reta é:
$y - y_0 = -\left[\dfrac{b^2\,x_0}{a^2\,y_0}\right]\,(x - x_0)$. Ou, equivalentemente,

$$\boxed{\left[\frac{y_0}{b^2}\right]\,y + \left[\frac{x_0}{a^2}\right]\,x = 1}$$

A equação da reta normal é:

$$\boxed{y - y_0 = \left[\frac{a^2\,y_0}{b^2\,x_0}\right]\,(x - x_0)}$$

se $x_0 \neq 0$.

Estas são as equações da reta tangente e da reta normal num ponto qualquer (x_0, y_0) da elipse. Em particular se $a = b = r$, temos todas as retas tangentes e normais num ponto qualquer (x_0, y_0) de um círculo de raio r.

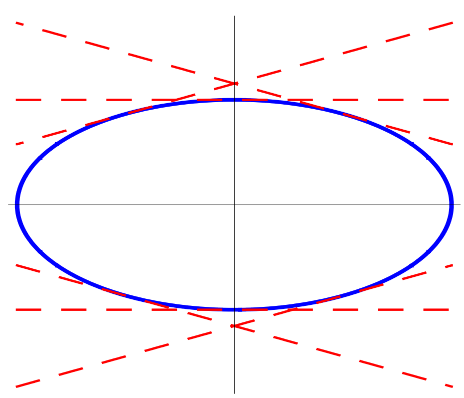


Figura 4.26: A elipse e suas tangentes.

[7] Determine a equação da reta tangente e a equação da reta normal ao gráfico da função implícita definida por:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

em qualquer ponto; (a e b são constantes não nulas).

Derivando a equação implicitamente:

$$\frac{2\,x}{a^2} - \frac{2\,y\,y'}{b^2} = 0.$$

Explicitando y':

$$y' = \frac{b^2\,x}{a^2\,y};$$

e lembrando que $x = x_0$, $y' = f'(x)$ e $y_0 = f(x_0)$, se $y_0 \neq 0$, temos:

$$f'(x_0) = \frac{b^2\,x_0}{a^2\,y_0},$$

que é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto (x_0, y_0) e a equação desta reta é:

$$\boxed{\left[\frac{y_0}{b^2}\right] y - \left[\frac{x_0}{a^2}\right] x = -1}$$

A equação da reta normal é:

$$\boxed{y - y_0 = -\left[\frac{a^2\,y_0}{b^2\,x_0}\right](x - x_0)}$$

se $x_0 \neq 0$. Estas são as equações da reta tangente e da reta normal a uma hipérbole num ponto (x_0, y_0) arbitrário.

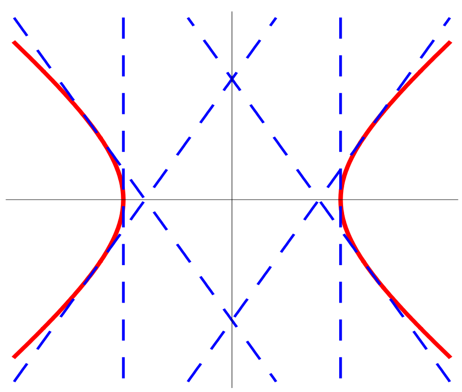


Figura 4.27: A hipérbole e suas tangentes.

[8] Ache a equação da reta tangente ao gráfico das funções implícitas definidas por:

i) $x^3 + y^3 = 6\,x\,y$, no ponto $(3, 3)$. **(Folium de Descartes)**.

ii) $2\,(x^2+y^2)^2 = 25\,(x^2-y^2)$, no ponto $(3,1)$. **(Lemniscata de Bernoulli)**.

i) **Folium de Descartes:** Derivando a equação implicitamente:

$$y' = \frac{2\,y - x^2}{y^2 - 2\,x}.$$

No ponto $(3,3)$, $y' = -1$ e a equação da reta tangente é:

$$x + y = 6.$$

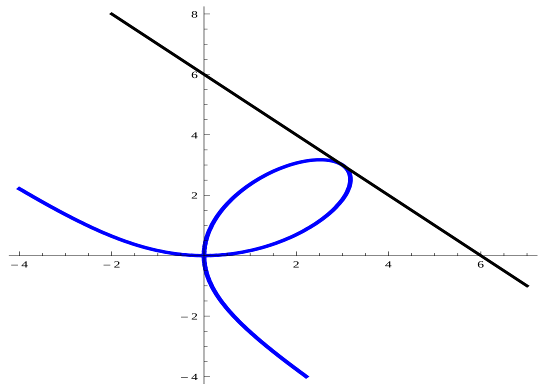


Figura 4.28: Folium de Descartes.

ii) **Lemniscata de Bernoulli:** Derivando a equação implicitamente:

$$y' = -\frac{x\,(-25+4\,x^2+4\,y^2)}{y(25+4\,x^2+4\,y^2)}.$$

No ponto $(3,1)$:

$$y' = -\frac{9}{13}$$

e a equação da reta tangente é

$$13\,y + 9\,x - 40 = 0.$$

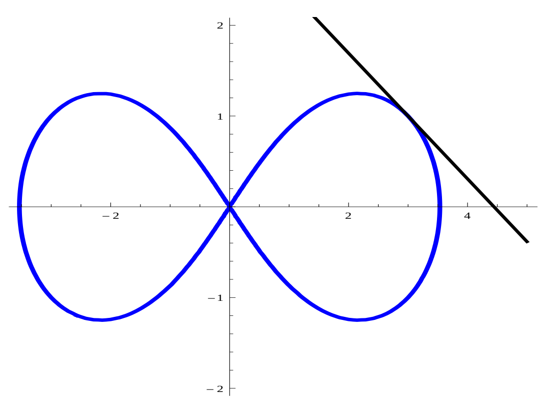


Figura 4.29: Lemniscata de Bernoulli.

4.9 Famílias de Curvas Ortogonais

As famílias de curvas ortogonais são muito utilizadas em diferentes áreas. Na Física, por exemplo, as linhas de força de um campo eletrostático são ortogonais às linhas de potencial constante e as curvas isotérmicas (de igual temperatura) são ortogonais ao fluxo do calor.

Definição 4.6. Duas curvas são ditas ortogonais num ponto de interseção se suas retas tangentes nesse ponto são perpendiculares. Uma família de curvas é ortogonal a outra família de curvas se cada curva de uma família é ortogonal a todas as curvas da outra família.

Exemplo 4.16.

[1] A família de parábolas $y^2 = 4\,a\,x$ é ortogonal à família de elipses $2\,x^2 + y^2 = b^2$.

Derivamos as equações implicitamente e comparamos os coeficientes angulares. Sejam m_1 os coeficientes angulares correspondentes à família de parábolas e m_2 os coeficientes angulares correspondentes à família de elipses. Logo,

$$m_1 = \frac{2\,a}{y} = \frac{y}{2\,x} \quad \text{e} \quad m_2 = -\frac{2\,x}{y}$$

e $m_1 \cdot m_2 = -1$.

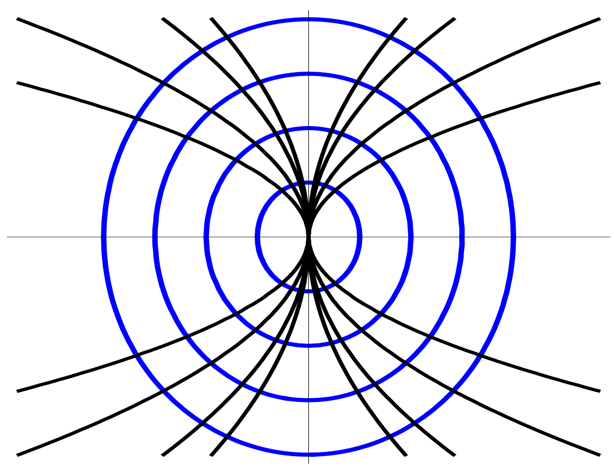


Figura 4.30:

[2] A família de círculos $x^2 + y^2 = a\,x$ é ortogonal à família de círculos $x^2 + y^2 = b\,y$.

Derivamos as equações implicitamente e comparamos os coeficientes angulares. Sejam m_1 os coeficientes angulares correspondentes à família $x^2 + y^2 = a\,x$ e m_2 os coeficientes angulares correspondentes à família $x^2 + y^2 = b\,y$. Logo,

$$m_1 = \frac{a - 2\,x}{2\,y} = \frac{y^2 - x^2}{2\,x\,y} \quad \text{e} \quad m_2 = \frac{2\,x}{b - 2\,y} = \frac{2\,x\,y}{x^2 - y^2}$$

e $m_1 \cdot m_2 = -1$.

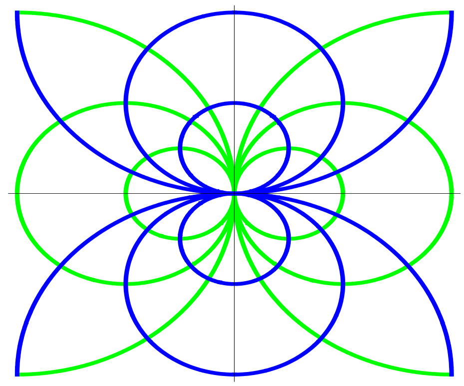


Figura 4.31:

4.10 Derivadas de Ordem Superior

Definição 4.7. Seja f uma função derivável.

1. Se a derivada f' é uma função derivável, então sua derivada é chamada derivada segunda de f e é denotada por:

$$(f')' = f''.$$

2. Se f'' é uma função derivável, então sua derivada é chamada derivada terceira de f e é denotada por:

$$(f'')' = f'''.$$

3. Em geral, se a derivada de ordem $(n-1)$ de f é uma função derivável, sua derivada é chamada derivada n-ésima de f e é denotada por:

$$(f^{(n-1)})' = f^{(n)}.$$

Notações: $f^{(0)} = f$, $f' = f^{(1)}$, $f'' = f^{(2)}$, $f''' = f^{(3)}$, etc.

Exemplo 4.17.

[1] Sendo $f(x) = x^4 + 2x^3 + x - 1$, calcule $f^{(n)}$.

n	1	2	3	4	5	6	7
$f^{(n)}(x)$	$4\,x^3 + 6\,x^2 + 1$	$12\,x^2 + 12\,x$	$24\,x + 12$	24	-0	0	0

Logo, $f^{(n)}(x) = 0$, se $n \geq 5$.

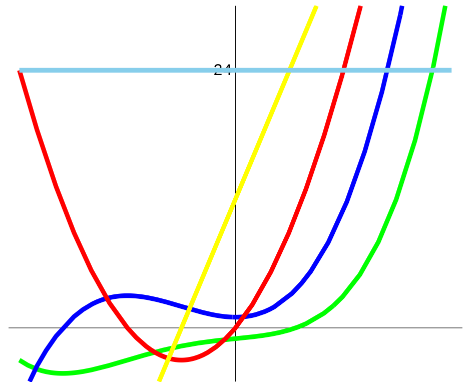


Figura 4.32: Gráficos de $y = f(x)$ (verde) e suas derivadas.

Em geral, se f é uma função polinomial de grau n, então, $f^{(n)}(x) = n!\, a_n$ e $f^{(p)}(x) = 0$ para $p > n$.

[2] Sendo $f(x) = \dfrac{1}{x}$, calcule $f^{(n)}$.

n	1	2	3	4	5	6	7
$f^{(n)}(x)$	$-x^{-2}$	$2\,x^{-3}$	$-6\,x^{-4}$	$24\,x^{-5}$	$-120\,x^{-6}$	$720\,x^{-7}$	$-5040\,x^{-8}$

Logo:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}, \qquad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

[3] Sendo $f(x) = \sqrt{e^x}$, calcule $f^{(n)}$.

n	1	2	3	4	5	6	7
$f^{(n)}(x)$	$\dfrac{\sqrt{e^x}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{e^x}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{e^x}}{8}$	$\dfrac{\sqrt{e^x}}{16}$	$\dfrac{\sqrt{e^x}}{32}$	$\dfrac{\sqrt{e^x}}{64}$	$\dfrac{\sqrt{e^x}}{128}$

Logo:

$$f^{(n)}(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2^n}, \qquad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

[4] Sendo $f(x) = sen(x)$, calcule $f^{(n)}$.

$$f'(x) = cos(x) = sen(x + \frac{\pi}{2})$$

$$f^{(2)}(x) = -sen(x) = sen(x + \frac{2\pi}{2})$$

$$f^{(3)}(x) = -cos(x) = sen(x + \frac{3\pi}{2})$$

$$f^{(4)}(x) = sen(x) = sen(x + \frac{4\pi}{2})$$

$$f^{(5)}(x) = cos(x) = sen(x + \frac{5\pi}{2})$$

$$f^{(6)}(x) = -sen(x) = sen(x + \frac{6\pi}{2}).$$

Logo:

$$f^{(n)}(x) = sen\big(x + \frac{n\pi}{2}\big),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

[5] Seja $y = a + x + b\,x^2 + c\,x^2\,ln(x)$, $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$. Verifique que $x^3\,y^{(3)} - x^2\,y'' + x\,y' = x$.

Derivando: $y' = c\,x + 2\,c\,x\,ln(x) + 2\,b\,x + 1$, $y'' = 2\,b + 3\,c + 2\,c\,ln(x)$ e $y^{(3)} = \dfrac{2\,c}{x}$; então:

$$x^3\,\frac{2\,c}{x} - x^2\,(2\,b + 3\,c + 2\,c\,ln(x)) + x\,(c\,x + 2\,c\,x\,ln(x) + 2\,b\,x + 1) = x.$$

[6] Se $y = e^x\,(A\,x + B)$ satisfaz à equação $3\,y^{(3)} - 6\,y'' - 2\,y' + 4\,y = x\,e^x$, determine o valor das constantes A e B.

Calculando as derivadas:

$$y' = e^x\,(A\,x + A + B), \quad y'' = e^x\,(A\,x + 2\,A + B) \quad \text{e} \quad y^{(3)} = e^x\,(A\,x + 3\,A + B);$$

logo a equação fica: $-e^x\,(A\,x + 5\,A + B) = x\,e^x$ da qual obtemos $A = -1$ e $B = 5$.

[7] Calcule $f^{(3)}(9)$, se $f(x) = x\,g(\sqrt{x})$, $g'(3) = 6$, $g''(3) = 1$ e $g^{(3)}(3) = 2$.

$$f'(x) = g(\sqrt{x}) + \frac{\sqrt{x}}{2}\,g'(\sqrt{x}), \quad f''(x) = \frac{1}{4\,\sqrt{x}}\,(3\,g'(\sqrt{x}) + \sqrt{x}\,g''(\sqrt{x}))$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{1}{8\,\sqrt{x^3}}\,(-3\,g'(\sqrt{x}) + 3\sqrt{x}\,g''(\sqrt{x}) + x\,g^{(3)}(\sqrt{x}));$$

logo, $f^{(3)}(9) = \dfrac{1}{24}$.

Observação 4.3.

Em geral, nada garante que quando calculamos sucessivamente as derivadas de uma função, estas sejam funções deriváveis.

[7] Seja $f(x) = x^2|x|$. Então,

$$f'(x) = \begin{cases} 3\,x^2 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -3\,x^2 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}.$$

Logo $f'(x) = 3\,x\,|x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$; analogamente temos que $f''(x) = 6\,|x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$; mas f'' não é derivável no ponto $x_0 = 0$. Verifique.

Definição 4.8. A função $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita de **de classe $\mathbf{C}^k$** $(0 \leq k \leq +\infty)$ em A, se f possui as derivadas até a ordem k e $f^{(k)}$ é contínua em A..

Como $f^{(0)} = f$, se f é de classe C^0, então f é contínua.

Exemplo 4.18.

[1] As funções polinomiais são de classe C^∞ em $\mathbb{R}$.

[2] As funções exponenciais são de classe C^∞ em $\mathbb{R}$.

[3] As função logarítmicas são de classe C^∞ em $(0, +\infty)$.

[4] A função $f(x) = x^2|x|$ do exemplo [7] é de classe C^1 em $\mathbb{R}$ e não é de classe C^2.

4.11 Aproximação Linear

É intuitivo pensar que uma função derivável restrita a um pequeno intervalo contido em seu domínio "comporta-se"como uma função polinomial do primeiro grau.

Por exemplo, consideremos $y = f(x) = x^2$. Estudando f num pequeno intervalo contendo $x = 1$, por exemplo $I = [0.99, 1.01]$, obtemos:

x	$f(x)$
0.99	0.9801
0.999	0.998001
1	1
1.001	1.0002001
1.01	1.0201

A reta tangente ao gráfico de f no ponto $x = 1$ é dada por $y = 2\,x - 1$; seu coeficiente angular é 2. Determinemos os coeficientes angulares das retas passando pelos pontos $(0.999, f(0.999))$, $(1, f(1))$ e $(1.001, f(1.001))$, $(1, f(1))$, respectivamente:

$$m_1 = \frac{f(1) - f(0.999)}{1 - 0.999} = 1.9990 \quad \text{e} \quad m_2 = \frac{f(1.001) - f(1)}{1.001 - 1} = 2.0010.$$

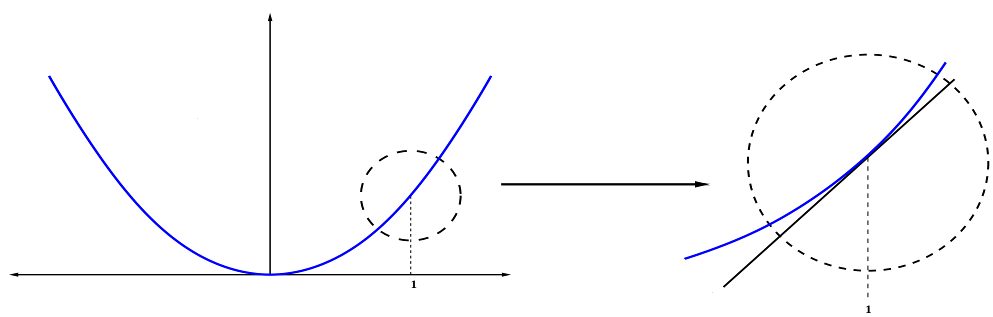


Figura 4.33:

m_1 e m_2 são valores bastante próximos de 2. Observe que se $|x - 1| \to 0$ (x perto de 1), então $f(x) = x^2$ fica próxima de $y = 2\,x - 1$. De fato:

$$\lim_{x \to 1} |f(x) - y| = \lim_{x \to 1} |x^2 - 2\,x + 1| = 0.$$

Isto nos leva a estabelecer a seguinte definição:

Definição 4.9. Seja $y = f(x)$ uma função derivável em x_0. A aproximação linear de f em torno de x_0 é denotada por $l(x)$ e definida por:

$$\boxed{l(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)}$$

se $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ pequeno.

A função $l(x)$ também é chamada linearização de f ao redor do ponto x_0. A proximidade de $f(x)$ e $l(x)$ nos permitirá fazer algumas aplicações. A notação para $f(x)$ próxima a $l(x)$ é $f(x) \simeq l(x)$.
O erro da aproximação é $E(x) = f(x) - l(x)$ e satisfaz à seguinte condição:

$$\lim_{x \to x_0} \Big|\frac{E(x)}{x - x_0}\Big| = \lim_{x \to x_0} \Big|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\Big| = 0.$$

Exemplo 4.19.

Suponha que não dispomos de calculadora ou de outro instrumento de cálculo e precisamos resolver os seguintes problemas:

[1] Se $f(x) = \dfrac{1}{(1 + 2\,x)^4}$ representa a temperatura num arame, calcule a temperatura $f(0.01)$.

[2] Se $f(t) = e^{0.3t}$ representa o crescimento de uma população de bactérias, calcule a população de bactérias para $t = 20.012$.

[3] Calcule, aproximadamente $(1.001)^7 - 2\,\sqrt[3]{(1.001)^4} + 3$.

Soluções:

[1] Vamos determinar $l(x) = f(0) + f'(0)\,x$. Derivando: $f'(x) = -\dfrac{8}{(1 + 2\,x)^5}$; então:

$$\frac{1}{(1 + 2\,x)^4} \simeq l(x) = 1 - 8\,x, \qquad \text{no intervalo} \quad (-\varepsilon, \varepsilon),$$

tal que $\varepsilon > 0$ (pequeno). Como $0.01 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, temos, $f(0.01) \simeq l(0.01) = 0.92$ graus.

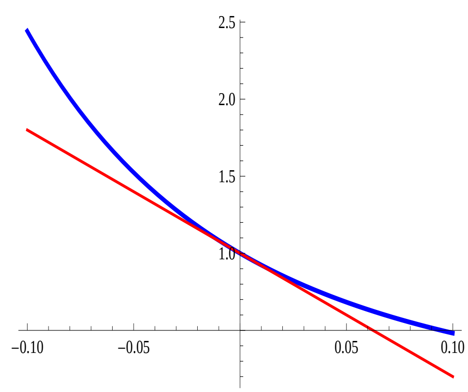


Figura 4.34: Exemplo [1].

[2] Vamos determinar $l(x) = f(20) + f'(20)\,(x - 20)$, com $f(20) \simeq 403.42$. Derivando, obtemos: $f'(t) = 0.3\,e^{0.3t}$; então:

$$e^{0.3t} \simeq 403.42 + 121.02\,(t - 20), \qquad \text{no intervalo} \quad (20 - \varepsilon, 20 + \varepsilon),$$

tal que $\varepsilon > 0$ (pequeno). Como $20.012 \in (20 - \varepsilon, 20 + \varepsilon)$, se $t = 20.012$, então,

$$e^{0.3 \times 20.012} \simeq 403.42 + 121.02 \times 0.012 = 404.87.$$

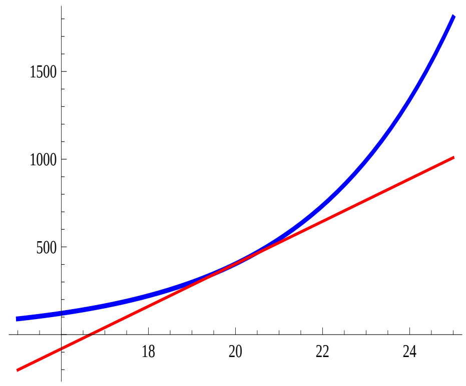


Figura 4.35: Exemplo [2].

[3] Considere a função $f(x) = x^7 - 2\sqrt[3]{x^4} + 3$ e $x = 1.001$. Então, para $x_0 = 1$, temos $f(1) = 2$, $f'(x) = 7\,x^6 - \dfrac{8}{3}\sqrt[3]{x}$ e $f'(1) = \dfrac{13}{3}$; logo,

$$l(x) = f(1) + f'(1)\,(x - 1) = \frac{1}{3}\,(13\,x - 7),$$

para todo x próximo de 1. Em particular, para $x = 1.001$,

$$(1.001)^7 - 2\sqrt[3]{(1.001)^4} + 3 \simeq \frac{1}{3}\,(13 \times (1.001) - 7) \simeq 2.00433.$$

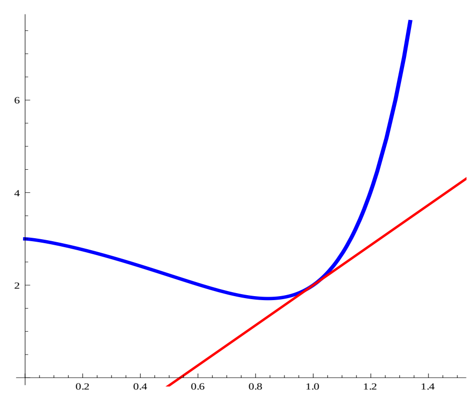


Figura 4.36: Exemplo [3].

[4] Considere a função logística $L(t) = \dfrac{A}{1 + B\,e^{-Ct}}$. Determinemos sua aproximação linear, no ponto t_0:

Derivando: $L'(t) = \dfrac{A\,B\,C\,e^{-Ct}}{(1 + B\,e^{-Ct})^2}$; logo,

$$l(t) = \rho(t_0)\left(B + e^{C t_0} + B\,C\,(t - t_0)\right),$$

onde, $\rho(t_0) = \dfrac{A\,e^{C t_0}}{(B + e^{C t_0})^2}$.

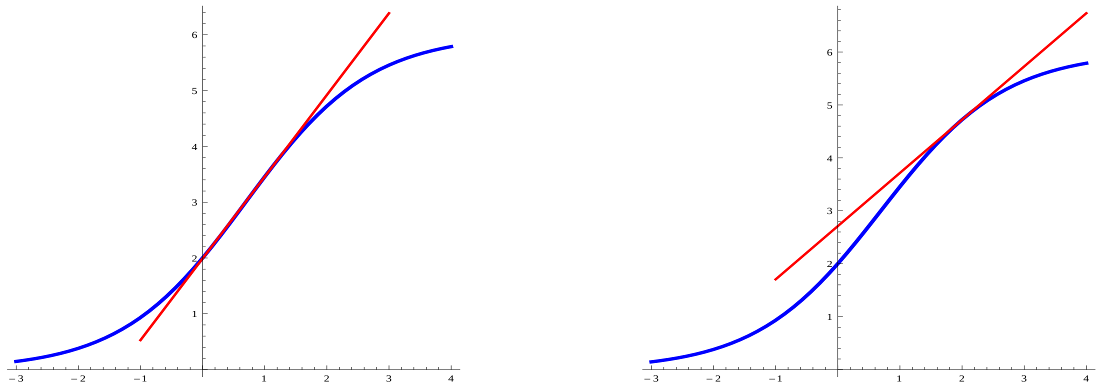


Figura 4.37: Desenhos para $t_0 = 1$ e $t_0 = 2$, respectivamente.

[5] Calcule o valor aproximado do volume de uma esfera, construida de uma folha de aço de $0.05\,cm$ de espessura sendo seu raio interno igual a $2\,cm$.

O volume de uma esfera é $V(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3$. Seja $r_0 = 2$; então, a linearização do volume é:

$$V(r) \simeq \frac{16}{3} \times (3\,r - 4)\,\pi.$$

Logo, $V(2.05) \simeq 11.46\,\pi\,cm^3$. O verdadeiro volume da esfera é $V = 11.48\,\pi\,cm^3$. Note que o erro cometido é: $E(2.05) = V - l(2.05) = 0.06335543\,cm^3$.

4.12 Aproximação de Ordem Superior

De forma análoga a aproximação linear podemos definir aproximação quadrática, aproximação cúbica, etc. É possível verificar que o erro destas aproximações é cada vez menor ao redor de um pequeno intervalo.

Definição 4.10. Seja $f \in C^3$. A aproximação quadrática e a aproximação cúbica de f em torno de x_0 são denotadas e definidas por:

$$q(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2$$
$$c(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}\,(x - x_0)^3.$$

se $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ pequeno.

Exemplo 4.20.

[1] A proporção de lâmpadas de sódio que falham após t horas de uso é dada por:

$$P(t) = 1 - \frac{10000}{(t+100)^2}.$$

Determine a proporção de lâmpadas que falham após 99 horas de uso.

Vimos que a aproximação linear de $P = P(t)$ ao redor de 100 é

$$l(t) = \frac{1}{400}\,(t+200).$$

Determinemos a outras aproximações, ao redor de 100. Calculemos :

$$P''(t) = -\frac{60000}{(t+100)^4} \quad \text{e} \quad P^{(3)}(t) = \frac{240000}{(t+100)^5},$$

logo:

$$q(t) = \frac{5}{16} + \frac{t}{160} - \frac{3\,t^2}{160000}$$
$$c(t) = \frac{3}{16} + \frac{t}{100} - \frac{9\,t^2}{160000} + \frac{t^3}{8000000}.$$

Logo, $q(99) = 0.74748125$ e $c(99) = 0.7474811250$.

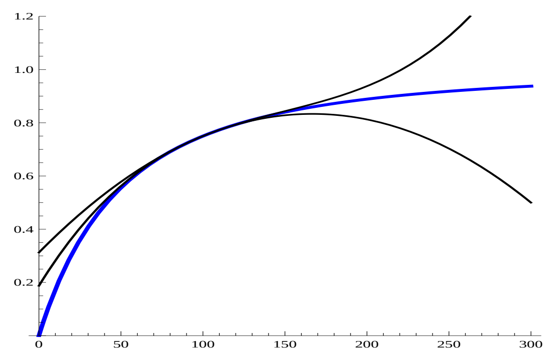


Figura 4.38: Gráficos de $P(t)$ (azul), $q(t)$ e $c(t)$.

[2] Calcule, aproximadamente $(1.1)^2 \times \sqrt{10 - 1.1^2}$.

Considere a função $f(x) = x^2\,\sqrt{10 - x^2}$ e $x = 1.1$. Então, para $x_0 = 1$, temos $f(1) = 3$, logo:

$$q(x) = -\frac{14}{27} + \frac{37\,x}{27} + \frac{58\,x^2}{27}$$
$$c(x) = \frac{50}{243} - \frac{65\,x}{81} + \frac{350\,x^2}{81} - \frac{176\,x^3}{243}.$$

e $q(1.1) = 3.58815$ e $c(1.1) = 3.5838$.

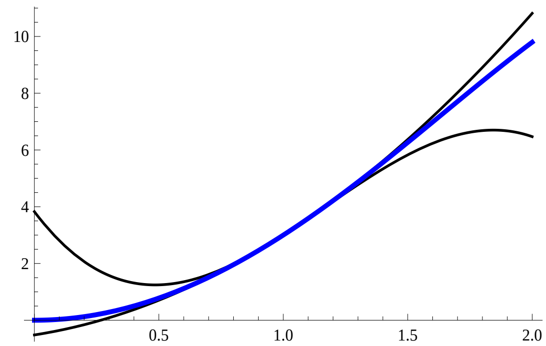


Figura 4.39: Gráficos de $f(x)$ (azul), $q(x)$ e $c(t)$.

Para outras aproximações, veja o último exercício do capítulo.

4.13 Velocidade e Aceleração

Da Física elementar sabemos que a velocidade percorrida por um móvel em linha reta é dada pelo quociente da distância percorrida pelo tempo transcorrido. Usaremos a definição de derivada para determinar a velocidade instantânea de um móvel que se move ao longo de qualquer trajetória derivável.

Suponha que uma partícula move-se ao longo do gráfico da função $u = u(t)$. Se $[a, b]$ é um pequeno intervalo contido no domínio de u, a velocidade média da partícula no intervalo $[a, b]$ é:

$$v_{ab} = \frac{\text{distância}}{\text{tempo}} = \frac{u(b) - u(a)}{b - a}.$$

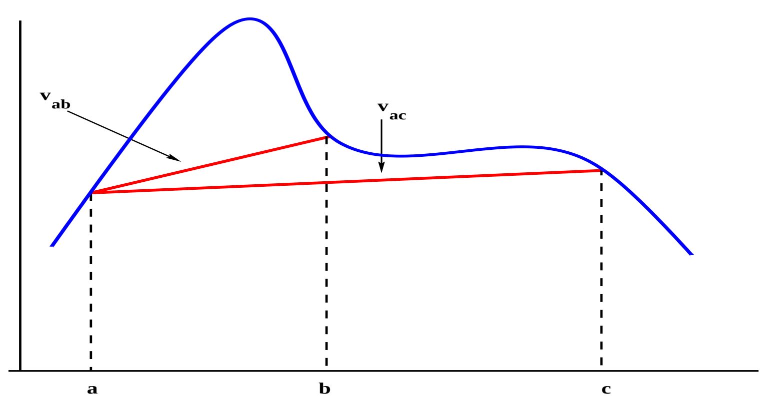


Figura 4.40:

v_{ab} é o coeficiente angular da reta passando por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. v_{ab} não dá informação sobre a velocidade da partícula no tempo $t = t_0$. Se estamos interessados na velocidade instantânea em $t = t_0$, consideremos o intervalo $[t_0, t_0 + h]$, $h > 0$; então:

$$v_h = \frac{u(t_0 + h) - u(t_0)}{h}.$$

Analogamente para $h < 0$.

Definição 4.11. A velocidade instantânea de uma partícula que se move ao longo do gráfico da função derivável $u = u(t)$ em $t = t_0$, é:

$$\boxed{v(t_0) = u'(t)\big|_{t=t_0}}$$

De forma análoga definimos a aceleração média: $a_{ab} = \dfrac{v(b) - v(a)}{b - a}$.

Definição 4.12. A aceleração instantânea de uma partícula que se move ao longo do gráfico da função duas vezes derivável $u = u(t)$ em $t = t_0$, é:

$$\boxed{a(t_0) = v'(t)\big|_{t=t_0} = u''(t)\big|_{t=t_0}}$$

O movimento harmônico simples $s = s(t)$ é caracterizado por $a(t) = -k\,s(t)$ $(k > 0)$ e o movimento harmônico amortecido por $a(t) = k\,v(t) + p\,s(t)$ $(k,\,p \in \mathbb{R})$.

Exemplo 4.21.

[1] Uma partícula move-se ao longo da curva $u(t) = t^3 - 5\,t^2 + 7\,t - 3$. Calcule a aceleração no instante em que a velocidade é zero.

Se $u(t) = t^3 - 5\,t^2 + 7\,t - 3$, então $v(t) = 3\,t^2 - 10\,t + 7$; se $v(t) = 0$ temos que $t = \dfrac{7}{3}$ ou $t = 1$. A aceleração no instante t é $a(t) = 6\,t - 10$; logo $a(\dfrac{7}{3}) = 4$ ou $a(1) = -4$.

[2] Uma sonda é lançada para cima verticalmente, sendo a distância acima do solo no instante t dada por $s(t) = t\,(1000 - t)$.

i) Determine em que instante e com que velocidade a sonda atinge o solo.

ii) Qual é a altura máxima que a sonda atinge?

i) A sonda atinge o solo quando $s(t) = t\,(1000 - t) = 0$ ou seja quando $t = 0$ ou $t = 1000$; a sonda atinge o solo após $1000\,seg$ e a velocidade é $v(t) = s'(t) = 1000 - 2\,t$ e $v(1000) = -1000\,m/seg$. O sinal negativo é porque a sonda está caindo.

ii) Se $v(t) = 0$, então $t = 500$ e $s(500) = 250000\,m$.

[3] Um ponto move-se ao longo do gráfico de $y = x^2 + 1$ de tal modo que sua abscissa x varia com uma velocidade constante de $3\,cm/seg$. Qual é a velocidade da ordenada y quando $x = 4\,cm$?

Sejam $x = x(t)$ e $y = y(t)$ a abscissa e a ordenada no instante t, respectivamente. Seja t_0 o instante tal que $x(t_0) = 4$. Queremos calcular a velocidade de y no instante t_0; em outras palavras, queremos calcular $\dfrac{dy}{dt}$ para $t = t_0$. Usando a regra da cadeia:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = 2\,x\,\frac{dx}{dt}.$$

O ponto tem velocidade constante igual a 3; logo, $\dfrac{dx}{dt} = 3$ e $\dfrac{dy}{dt} = 6\,x$. Para $x(t_0) = 4$ temos que $\dfrac{dy}{dt} = 24\,cm/seg$.

[4] Um homem de $1.80\,m$ de altura afasta-se de um farol situado a $4.5\,m$ do solo, com uma velocidade de $1.5\,m/seg$. Quando ele estiver a $6\,m$ do farol, com que velocidade sua sombra estará crescendo neste ponto e qual o comprimento da sombra?

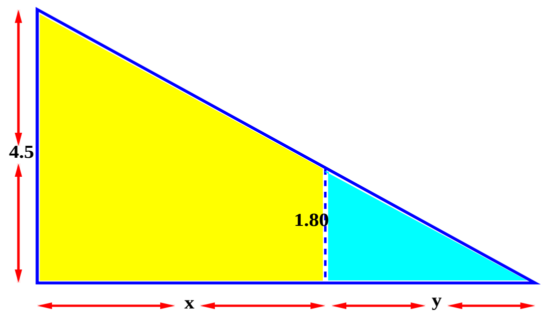


Figura 4.41:

Seja y o comprimento da sombra e x a distância entre o homem e o ponto do solo acima do qual está o farol. Pela semelhança de triângulos: $\dfrac{4.5}{x+y} = \dfrac{1.8}{y}$; logo, $y = \dfrac{1.8\,x}{2.7}$; então:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt}.$$

Como $\dfrac{dx}{dt} = 1.5$, temos: $\dfrac{dy}{dt} = 1\,m/seg$ e o comprimento da sombra é $y = 4\,m$.

4.14 A Derivada como Taxa de Variação

A velocidade de uma partícula que se move ao longo do gráfico da função derivável $u = u(t)$ no tempo t é $v(t) = u'(t)$ e representa a razão do deslocamento por unidade de variação de tempo. $u'(t)$ expressa a taxa de variação de $u(t)$ por unidade de tempo:

$$u'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}.$$

Se $y = f(x)$ é função derivável, então $f'(x)$ é a taxa de variação de y em relação a x.

A interpretação da derivada como taxa de variação se aplica em diversas áreas da ciência.

Por exemplo, se $y = f(t)$ mede a concentração de glóbulos vermelhos no sangue no instante t,

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{f}$$

mede a taxa de variação média da concentração de glóbulos vermelhos durante o intervalo de tempo $[t, t+h]$ e $f'(a)$ mede a taxa de variação instantânea de glóbulos vermelhos no instante $t = a$.

Exemplo 4.22.

[1] Uma partícula move-se ao longo do gráfico de $y = x^3 + 1$, de modo que quando $x = 6$ a abscissa cresce a uma velocidade de $2\,cm/seg$. Qual é a velocidade de crescimento da ordenada nesse instante?

Seja $x = x(t)$ a abscissa no instante t e $y = x^3 + 1$; devemos calcular:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt}.$$

Temos: $\dfrac{dy}{dx} = 3\,x^2$ e $\dfrac{dx}{dt} = 2$; logo, $\dfrac{dy}{dt}\Big|_{x=6} = 6\,x^2\,\Big|_{x=6} = 216$. A ordenada cresce a uma razão de $216\,cm/seg$

[2] Um ponto move-se ao longo da elipse de equação $x^2 + 2\,y^2 = 6$. Determine os pontos da elipse que satisfazem à equação $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{dy}{dt}$.

Se $x = x(t)$ e $y = y(t)$ são a abscissa e a ordenada do ponto no instante t, derivando implicitamente a equação da elipse: $2\,x\,\dfrac{dx}{dt} + 4\,y\,\dfrac{dy}{dt} = 0$ e usando a condição dada:

$$2\,x\,\frac{dx}{dt} + 4\,y\,\frac{dy}{dt} = 2\,\big(x - 2\,y\big)\,\frac{dx}{dt} = 0;$$

logo, $x = 2\,y$. Da equação da elipse obtemos: $y = \pm 1$ e os pontos são: $(2, 1)$ e $(-2, -1)$.

[3] O tronco de uma árvore tem formato cilíndrico cujo diâmetro cresce à razão de $\dfrac{1}{4}\,cm/ano$ e sua altura cresce à razão de $1\,m/ano$ (m=metros). Determine a taxa de variação do volume do tronco quando o diâmetro é $3\,cm$ e sua altura é $50\,m$.

Seja $r = r(t)$ o raio no instante t e $h = h(t)$ a altura no instante t. O volume é $V(t) = \pi\,r^2\,h$; devemos calcular $\dfrac{dV}{dt}$; derivando implicitamente:

$$\frac{dV}{dt} = \pi\,\big(2\,r\,h\,\frac{dr}{dt} + r^2\,\frac{dh}{dt}\big);$$

o raio é a metade do diâmetro: $r = \dfrac{3}{2}$, $h = 5000$; logo, $2\,\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{1}{4}$ e $\dfrac{dh}{dt} = 100$; então:

$$\frac{dV}{dt} = 2100\,\pi\ \ cm^3/ano.$$

[4] Uma partícula move-se ao longo da curva de equação $y = \sqrt{x}$. Quando a partícula passa pelo ponto $(4, 2)$, sua abscissa cresce à razão de $3\,cm/seg$. Com que velocidade está variando a distância da partícula à origem nesse instante?

Sejam $x = x(t)$ e $y = t(t)$ a ordenada e a abcissa no instante t e $p^2 = x^2 + y^2$ o quadrado da distância da origem ao ponto (x, y). Derivando implicitamente ambos os lados:

$$2\,p\,\frac{dp}{dt} = 2\,x\,\frac{dx}{dt} + 2\,y\,\frac{dy}{dt};$$

logo, $\frac{dp}{dt} = \frac{1}{p}\left(x + \frac{1}{2}\right)\frac{dx}{dt}$, pois $y = \sqrt{x}$. Logo $\frac{dp}{dt}\big|_{(4,2)} = \frac{27\sqrt{5}}{20}\,cm/seg$.

[5] Um reservatório de água está sendo esvaziado. A quantidade de água no reservatório, em litros, t horas após o escoamento ter começado é dada por $V(t) = 50(80-t)^2$. Calcule:

i) A taxa de variação do volume da água, após 8 horas de escoamento.

ii) A quantidade de água que sai do reservatório, nas primeiras 5 horas de escoamento.

i) A taxa de variação é $\frac{dV}{dt} = -100\,(80-t)$; calculando em $t = 8$, temos que: $\frac{dV}{dt} = -7200\,l/h$. O sinal negativo é porque o volume da água está diminuindo com o tempo, já que o reservatório está sendo esvaziado.

ii) $V(0) - V(5) = 38750$ litros.

[6] De um funil cônico a água escoa a uma velocidade de $3\,dm^3/seg$. Se o raio da base do funil é de $12\,dm$ e a altura é de $24\,dm$, calcule a velocidade com a qual o nível de água está descendo, quando o nível estiver a $6\,dm$ do tôpo.

Sejam r o raio do círculo que forma o nível da água e h a altura no tempo t, respectivamente. $r = r(t)$, $h = h(t)$ e $V = \frac{\pi\, r^2\, h}{3}$ é o volume do cone de raio r e altura h.

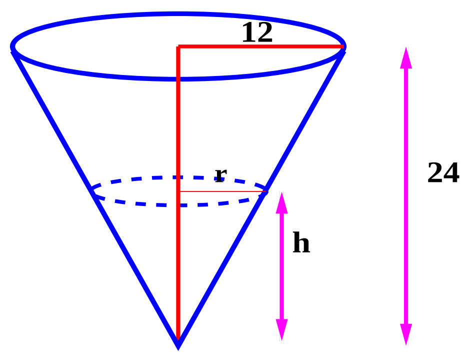


Figura 4.42:

Pela semelhança de triângulos, temos: $\frac{r}{12} = \frac{h}{24}$; então $2r = h$ e $V = \frac{1}{12}\pi h^3$.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} = \frac{1}{4}\pi h^2 \frac{dh}{dt}.$$

Mas, $\frac{dV}{dt} = -3$, pois o volume está diminuindo e $h = 24 - 6 = 18$; resolvendo a equação $\frac{dV}{dt} = -3$, obtemos: $\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{27\pi}\,dm/seg$.

[7] Dois lados paralelos de um retângulo aumentam a uma velocidade de $4\,cm/seg$, enquanto os outros dois lados diminuem, de tal modo que o retângulo resultante permanece com área

constante de $100\,cm^2$. Qual é a velocidade com que o perímetro diminui quando o comprimento do lado que aumenta é de $20\,cm$? Quais são as dimensões do retângulo, quando o perímetro deixar de diminuir?

i) Seja x o lado que aumenta e y o lado que diminui no tempo t; logo $x = x(t)$ e $y = y(t)$; o perímetro é $P = 2(x+y)$ e a área é $A = xy = 100$. Derivando estas expressões em t, temos:

$$\frac{dP}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right) \quad \text{e} \quad x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} = 0.$$

Se $x = 20$, então $y = 5$; como $\dfrac{dx}{dt} = 4$, da última equação, temos que $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{y}{x}\,\dfrac{dx}{dt} = -1$; logo: $\dfrac{dP}{dt} = 6\,cm/seg$.

ii) O perímetro deixa de diminuir quando $\dfrac{dP}{dt} = 0$, o que é equivalente a $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{dy}{dt}$; mas $\dfrac{dx}{dt} = 4$; então, $4x(t) - 4y(t) = 0$; logo, $x(t) = y(t)$; e o retângulo é um quadrado de área $100 = x^2$; ou seja, um quadrado de $10\,cm$ de lado.

[8] Uma escada de $10\,m$ de comprimento está apoiada numa parede vertical. Se a extremidade inferior da escada começa a deslizar horizontalmente à razão de $0.5\,m/seg$, com que velocidade o topo da escada percorrerá a parede, quando a extremidade inferior estiver a $6\,m$ do solo?

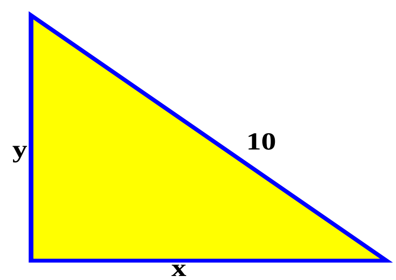


Figura 4.43:

Sejam $x = x(t)$ e $y = y(t)$ os lados do triângulo formado pela parede, a escada e o solo, no instante t. Pelo teorema de Pitágoras $x^2 + y^2 = 100$; derivando implicitamente:

$$x\,\frac{dx}{dt} + y\,\frac{dy}{dt} = 0.$$

Devemos calcular $\dfrac{dy}{dt}$. Como $y = 6$, então $x = \sqrt{100-36} = 8$ e $\dfrac{dx}{dt} = 0.5$; logo,

$$\frac{dy}{dt} = -\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dx}{dt} = -\frac{2}{3};$$

a escada está deslizando a uma velocidade de $\frac{2}{3}\,m/seg$.

[9] A dilatação de um disco de cobre aquecido é tal que o raio cresce com a velocidade de 0.01 cm/seg. Com que velocidade cresce a área do disco quando o raio tem $2\,cm$?

Sejam $x = x(t)$ o raio e $y = y(t)$ a área do disco no instante t, respectivamente. Então $y = \pi\, x^2$. Derivando:

$$\frac{dy}{dt} = 2\,\pi\,x\,\frac{dx}{dt};$$

para $x = 2$ e $\dfrac{dx}{dt} = 0.01$, tem-se: $\dfrac{dy}{dt} = 0.04\,\pi\,cm^2/seg$. A área do disco cresce com uma velocidade de $0.04\,\pi\,cm^2/seg$.

[10] A lei de Boyle para gases confinados a uma temperatura constante C é $P\,V = C$, onde V é o volume e P a pressão. Se em certo instante o volume é de $600\,cm^3$, a pressão é de $150\,k/cm^2$ e a pressão cresce à razão de $20\,k/cm^2/min$, com que taxa está variando o volume nesse instante?

Sejam $V = V(t)$ o volume e $P = P(t)$ a pressão no instante t, respectivamente. Escrevamos o volume como função da pressão: $V(P) = \dfrac{C}{P}$.
Usando a regra da cadeia:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{C}{P^2}\,\frac{dP}{dt} = -\frac{V}{P}\,\frac{dP}{dt};$$

para $V = 600$, $P = 150$ e $\dfrac{dP}{dt} = 20$, temos: $\dfrac{dV}{dt} = -80\,cm^3/min$. O volume decresce à razão de $80\,cm^3/min$.

[11] (Sistema de Lotka-Volterra) No estudo de ecossistemas, modelos de presa-predador são utilizados para estudar a interação entre as espécies. Se uma população de lobos siberianos é dada por $L = L(t)$ e uma população de cervos por $K = K(t)$, a interação das duas espécies pode ser medida pelo sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{dK}{dt} = a\,K - b\,K\,L \\[2ex] \dfrac{dL}{dt} = -c\,L + d\,K\,L, \end{cases}$$

onde a, b, c e d são constantes positivas. Determine K e L que levem as populações a ficar estáveis para $a = 0.05$, $b = 0.001$, $c = 0.05$ e $d = 0.0001$.

As populações ficam estáveis quando suas taxas de crescimento são nulas; então devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{dK}{dt} = a\,K - b\,K\,L = K\,(a - b\,L) = 0 \\[2ex] \dfrac{dL}{dt} = -c\,L + d\,K\,L = L\,(-c + d\,K) = 0, \end{cases}$$

com $K,\ L \neq 0$; a solução é $L = \dfrac{a}{b}$ e $K = \dfrac{c}{d}$; logo, para os valores das constantes dados $L = 50$ e $K = 500$. As populações ficam em equilíbrio quando tem 50 lobos e 500 cervos.

[12] Se uma barra é feita de material homogêneo, então sua densidade é uniforme e é dada pela massa por unidade de comprimento, medida em quilogramas/metros. Se a barra não é homogênea, mas se sua massa é dada por $m = f(x)$ do início ao ponto x da barra, então, a massa

entre os pontos x_1 e x_2 é dada por $f(x_2) - f(x_1)$ e sua densidade média é dada por $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. A densidade linear da barra é a taxa de variação da massa em relação ao comprimento e é dada por:

$$\rho = \frac{dm}{dx}.$$

Sabendo que uma barra de comprimento $1\,m$ tem massa dada por $m = f(x) = x^3 + x + 1$, determine a densidade no centro da barra.

$$\rho = \frac{dm}{dx}\Big|_{x=0.5} = (3\,x^2+1)\Big|_{x=0.5} = 1.75\,kg/m.$$

4.15 Exercícios

1. Determine a equação da reta tangente ao gráfico das seguintes funções, no ponto de abscissa dada:

   (a) $y = 1 - x^2, \quad x = 3$
   (b) $y = x^3 - 5\,x + 1, \quad x = 1$
   (c) $y = x + 4\,ln(x), \quad x = 1$
   (d) $y = x^3 - 6\,x^2 + 11\,x - 6, \quad x = 3$
   (e) $y = x^4 + x^3 - x, \quad x = 0$
   (f) $y = 3\,x + sen(x), \quad x = 0$
   (g) $y = x^{-2}, \quad x = -2$
   (h) $y = \sqrt{x} + x^{-1}, \quad x = 1$
   (i) $y = \sqrt{x^2 + 2\,x}, \quad x = 1$
   (j) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}, \quad x = 0$
   (k) $y = ln(x^2), \quad x = 1$
   (l) $y = tg(x+1), \quad x = -1$
   (m) $y = sen((x+1)\,\pi), \quad x = 0$
   (n) $y = \sqrt[3]{e^x}, \quad x = 0$
   (o) $y = \dfrac{x}{x^3+1}, \quad x = 1$
   (p) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad x = 1$
   (q) $y = \dfrac{x^5-1}{x^4+1}, \quad x = -1$
   (r) $y = \dfrac{1}{x^2\,(x^4+1)}, \quad x = 1$

2. Calcule a constante b para que a reta $y + 9x + b = 0$ seja tangente à curva $y = x^{-1}$.

3. Determine as equações das retas tangentes à curva $y = x^2$, nos pontos de abscissa $x = \pm 3$.

4. Determine o ponto onde a curva $y = x^3$ tem tangente paralela à reta tangente à mesma curva no ponto de abscissa $x = 4$. Determine a equação da reta tangente nesse ponto.

5. Determine as equações das retas tangentes e das retas normais às curvas, nos pontos de abscissas dadas:

   (a) $y = tg(-x^2+1), \quad x = 1$
   (b) $y = e^{-\frac{1}{x}}, \quad x = -1$
   (c) $y = cos(\dfrac{x}{2}), \quad x = 0$
   (d) $y = arccos(2\,x), \quad x = 0$
   (e) $y = \dfrac{x^5+1}{x^4+1}, \quad x = 1$
   (f) $y = sen(e^x), \quad x = ln(\pi)$
   (g) $y = \ln(x^2+1), \quad x = 1$
   (h) $y = (4\,x^3 + 3\,x + 1)\,ln(x), \quad x = 1$

6. Determine os pontos da curva $y = 3\,x^3 + 14\,x^2 + 3\,x + 8$ onde as retas tangentes passando por esses pontos intersectam a origem.

7. Sabendo que as curvas $y = 4\,x^2$ e $y = -x^{-1}$ tem retas tangentes paralelas com abscissa comum, determine-as.

8. Seja f uma função derivável e $g(x) = f(e^{2x})$. Calcule $g'(0)$ se $f'(1) = 2$.

9. Seja f uma função derivável e $g(x) = x\,f(x^2)$. Calcule $g'(x)$.

   (a) Seja f uma função derivável e $g(x) = e^x f(3x+1)$. Calcule $g'(0)$ se $f(1) = 2$ e $f'(1) = 3$.

   (b) Seja $F(x) = f(g(x))$ em que f e g são funções deriváveis. Se $g(3) = 6$, $g'(3) = 4$ e $f'(6) = 7$, determine $F'(3)$.

10. Determine $f'(x)$ se $u(x)$, $v(x)$ e $w(x)$ são funções deriváveis e:

    (a) $f(x) = u(x)\,v(x)\,w(x)$

    (b) $f(x) = \dfrac{u(x)\,w(x)}{v(x)}$

    (c) $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)\,w(x)}$

    (d) $f(x) = \dfrac{1}{u(x)\,v(x)\,w(x)}$

11. Use [10] para calcular $f'(x)$ se:

    (a) $f(x) = (x^2 + x + 1)\,(x^3 + x)\,(x + 1)^2$

    (b) $f(x) = (x^5 + x^3 + 1)^3$

    (c) $f(x) = \big(\dfrac{x + 2}{3\,x + 1}\big)\,(x^2 + 2)$

    (d) $f(x) = \big(\dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 3}\big)\,(x^4 - 2\,x^3 + 1)$

12. Usando a regra da cadeia, determine y', sendo:

    (a) $y = (3\,x + 5)^{50}$

    (b) $y = (4\,x^3 + 3\,x - 1)^7$

    (c) $y = (6 - 3\,x)^8$

    (d) $y = (3\,x^2 + 4)^5$

    (e) $y = \dfrac{1}{x^3 + 3\,x^2 - 6\,x + 4}$

    (f) $y = (x^2 + 1)^2 (x^3 - 2\,x)^2$

    (g) $y = sec^2((x^3 - 6)^3)$

    (h) $y = \dfrac{(3\,x - 6)^{-1}}{(x + 3)^{-2}}$

    (i) $y = (\dfrac{3\,x - 2}{2\,x + 1})^8$

    (j) $y = \dfrac{1}{x\,(x + 1)}$

    (k) $y = \dfrac{(x^{-2} + 3\,x^{-4} + 7\,x^{-5})^{-8}}{(x^2 + x^{-2})^{-4}(x^{-1})}$

13. Calcule as derivadas das funções:

(a) $y = 5^{x-1}$

(b) $y = (10^x + 10^{-x})^2$

(c) $y = log_5(x^2)$

(d) $y = x\,log_4(x) - x$

(e) $y = ln(\dfrac{x}{x+1})$

(f) $y = ln(cosh(x))$

(g) $y = ln(10^x)$

(h) $y = ln(log_{10}(x))$

(i) $y = sen(e^x)$

(j) $y = e^x\,sen(ln((x)))$

14. Usando a derivada de logaritmo, calcule y':

(a) $y = \sqrt{x^3+2}$

(b) $y = (\dfrac{x+4}{x+7})^6$

(c) $y = x^{x-1}$

(d) $y = 3^{ln(x)}$

(e) $y = \dfrac{e^x\,(x^3-1)}{\sqrt{2x+1}}$

(f) $y = (x^2)^x$

(g) $y = x^{x^2}$

(h) $y = x^{\frac{1}{x}}$

(i) $y = \big(sen(x)\big)^x$

(j) $y = x^{e^x}$

(k) $y = \big(cos(x)\big)^{sen(x)}$

(l) $y = \big(ln(x)\big)^{ln(x)}$

15. Calcule y':

(a) $y = \sqrt{1 - tg^2(x)}$

(b) $y = \sqrt{2 - cos^2(x)}$

(c) $y = \dfrac{1}{cos(2\,x)}$

(d) $y = sen(\dfrac{x}{3})$

(e) $y = x\,cotg(2\,x)$

(f) $y = \big(1 - cos^5(\frac{x}{3})\big)^2$

(g) $y = sec^3(2x^2)$

(h) $y = tg(\sqrt{1-x^2})$

(i) $y = \big(cosec(2\,x) - cotg(x)\big)^2$

(j) $y = cos^2(\sqrt{x})$

(k) $y = \dfrac{sen(2\,x)}{1 + cos(2\,x)}$

(l) $y = \sqrt[3]{sen(t^2)}$

(m) $y = sen(\dfrac{1}{x^2})$

(n) $y = tg(sec(x^2))$

(o) $y = sec^2(\dfrac{1}{x^2})$

(p) $y = cotg(sec(x^2))$

(q) $y = log_a(ln(x))$

(r) $y = ln(log_a(x))$

16. Verifique que as derivadas das funções hiperbólicas inversas, são:

(a) Se $y = argsenh(u(x))$, então $y' = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1+u^2(x)}}$.

(b) Se $y = argcosh(u(x))$, então $y' = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)-1}}$, $|u(x)| > 1$.

(c) Se $y = argtgh(u(x))$, então $y' = \dfrac{u'(x)}{1-u^2(x)}$, $|u(x)| < 1$.

(d) Se $y = argcotgh(u(x))$, então $y' = \dfrac{u'(x)}{1-u^2(x)}$, $|u(x)| > 1$.

(e) Se $y = argsech(u(x))$, então $y' = -\dfrac{u'(x)}{u(x)\sqrt{1-u^2(x)}}$, $0 < u(x) < 1$.

(f) Se $y = argcosech(u(x))$, então $y' = -\dfrac{u'(x)}{|u(x)|\sqrt{u^2(x)+1}}$, $u(x) \neq 0$.

17. Calcule y':

(a) $y = arctg(\dfrac{1}{x})$

(b) $y = \big(arcsen(x)\big)^2$

(c) $y = arctg(x^2)$

(d) $y = arccotg(\dfrac{1}{x})$

(e) $y = arctg(\dfrac{x-1}{x+1})$

(f) $y = senh(\dfrac{5}{x})$

(g) $y = cosh^2(3\,x) - sen^2(3x)$

(h) $y = tgh((4\,x^2 - 3)^2)$

(i) $y = sech(ln(x))$

(j) $y = x\,argcosh(x) - \sqrt{x^2 - 1}$

(k) $y = argtgh(\dfrac{x^2}{2})$

(l) $y = argcotgh(x^2)$

(m) $y = \dfrac{1}{2}\big(argcosh(x^2)\big)^2$

(n) $y = cosech(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}})$

18. Usando derivação implícita, calcule y':

(a) $x^3 + y^3 = 5$

(b) $x^3 + x^2 y + y^2 = 0$

(c) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10$

(d) $y^3 = \dfrac{x-y}{x+y}$

(e) $3\,cos^2(x+y) = 7$

(f) $tg(y) = x\,y$

(g) $e^y = x + y$

(h) $ln(y^2 + x) = y^3 - x^2$

(i) $(x+y)^2 = (x-y)^2$

(j) $(x^2 - y^2)^2 = y^2 + x^2$

(k) $sen(x\,y) = x\,cos(y)$

(l) $ln(y - x) = ln(y + x)$

(m) $e^{-2x-y} = 5 + ln(x)$

(n) $ln(y\,x) = e^{xy}$

(o) $ln(\dfrac{y}{x}) = e^{\frac{x}{y}}$

(p) $cos(y\,x^2) = sen(y\,x^2)$

(q) $x\,y^2 + 3\,tg(y) = x\,y$

(r) $x\,arctg(y) + y\,arctg(x) = 1$

19. Determine os pontos da curva $x^2 + 2\,x\,y + 3\,y^2 = 3$ nos quais as retas tangentes nesses pontos sejam perpendiculares à reta $x + y = 1$.

20. Em que pontos a curva $y^2 = 2x^3$ é ortogonal à reta $4x - 3y + 1 = 0$?

21. A reta $x = a$ intersecta a curva $y = \dfrac{x^3}{3} + 4\,x + 3$ num ponto P e a curva $y = 2\,x^2 + x$ num ponto Q. Para que valor (ou valores) de a as tangentes a essas curvas em P e Q são paralelas?

22. Determine a equação da reta tangente à curva $x\,y = a$, a constante, no ponto (x_0, y_0). Verifique que (x_0, y_0) é o ponto médio do segmento de reta determinado pela reta tangente no ponto e os eixos coordenados.

23. Determine a equação da reta tangente à curva $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1$ no ponto (x_0, y_0). Calcule a distância entre os pontos A e B, onde A e B são as interseções da reta tangente com os eixos coordenados.

24. Verifique que as seguintes famílias de curvas são ortogonais:

(a) $x + 2\,y = c, \quad y - 2\,x = b$
(b) $y - c\,e^{-2x} = 0, \quad y^2 - x - b = 0$
(c) $y - c, x^3 = 0, \quad x^2 + 3\,y^2 - b = 0$
(d) $\rho = a\,cos(\theta), \quad \rho = b\,sen(\theta)$
(e) $y^2 - \dfrac{x^3}{c - x} = 0, \quad (x^2 + y^2)^2 - b\,(2\,x^2 + y^2) = 0$

25. Determine a segunda derivada de:

(a) $y = \sqrt[6]{x}$
(b) $y = x^{-5}$
(c) $y = sen(x^2)$
(d) $y = tg^2(x)$
(e) $y = sen^2(x) + cos(x)$
(f) $y = \dfrac{x}{2\,(x+1)}$
(g) $y = \big(1 + \dfrac{1}{x}\big)^2$
(h) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$
(i) $y = \dfrac{e^x}{x}$
(j) $y = cos(sen(x))$
(k) $y = ln(ln(x))$
(l) $y = arctg(sen(x))$
(m) $y = sec(\sqrt{x})$
(n) $y = arcsec(x^2)$
(o) $y = argcotgh(x^3 + 1)$

26. Calcule as derivadas sucessivas, até a ordem n dada:

(a) $y = 3\,x^4 - 2\,x,\ n = 5$
(b) $y = 3\,x^4 - 2\,x,\ n = 4$
(c) $y = \sqrt{3 - x^2},\ n = 3$
(d) $y = \dfrac{1}{x - 1},\ n = 4$
(e) $y = e^{2x+1},\ n = 3$
(f) $y = ln(2\,x),\ n = 4$
(g) $y = -2\,cos\big(\dfrac{x}{2}\big),\ n = 5$
(h) $y = sen(a\,x),\ n = 7,\ a \in \mathbb{R}$
(i) $y = ln\big(\dfrac{1}{x}\big),\ n = 3$
(j) $y = x\,e^x,\ n = 7$
(k) $y = x\,cosech(ln(x)),\ n = 4$
(l) $y = x\,argtgh(x) - ln(\sqrt{1 - x^2}),\ n = 5$
(m) $y = cosh^9(x),\ n = 3$
(n) $y = argsenh(e^x),\ n = 4$
(o) $y = ln(sech(x)),\ n = 5$
(p) $y = senh(cosh(x)),\ n = 3$
(q) $y = x\,\big(sen(ln(x)) - cos(ln(x))\big),\ n = 3$
(r) $y = ln\big(\dfrac{1 + sen(x)}{1 - sen(x)}\big),\ n = 3$

27. Seja f uma função duas vezes derivável e $g(x) = f(e^{2x})$. Calcule $g''(x)$.

28. Se $y = x\,e^{2x}$, mostre que $y'' - 4\,y = 4\,e^{2x}$.

29. Para $y = cos(\alpha x)$ e $y = sen(\alpha x)$, mostre que $y'' + \alpha^2\,y = 0$.

30. Se $y = e^{-x}\,cos(2\,x)$, mostre que $y'' + 2\,y' + 5\,y = 0$.

31. Determine α tal que $y = e^{\alpha x}$ verifique a equação: $y'' - 4\,y = 0$.

32. Seja $y = a\,e^{x} + b\,e^{-x} + c\,x + x^5$. Verifique que:
$$x^3\,y^{(3)} + 5\,x^2\,y'' + (2\,x - x^3)\,y' - (2 + x^2)\,y = 40\,x^3 - 4\,x^5.$$

33. Calcule $y''(x)$ se:

(a) $x^4 + y^4 = 16$

(b) $x^2 + 6\,x\,y + y^2 = 8$

(c) $x^2\,y^2 = (y+1)^2(y - y^2)$

(d) $y^2 = x^3\,(2 - x)$

(e) $sen(y) + sen(x) + sen(x\,y) = x$

(f) $cos(y) - sen(x) = x$

34. Calcule $f^{(3)}(5)$, se $f(x) = \sqrt{x-1}\,g(x)$, $g(5) = -1$, $g'(5) = \dfrac{1}{3}$, $g''(5) = 2$ e $g^{(3)}(5) = 10$.

35. Calcule $\phi''(-2)$, se $\phi(x) = \sqrt{1 - g(x)}$, $g(-2) = -3$, $g'(-2) = 3$ e $g''(-2) = 5$

36. Determine a linearização no ponto $x_0 = 0$, das seguintes funções:

(a) $sen(x)$

(b) $cos(x)$

(c) $tg(x)$

(d) $\sqrt{x+3}$

(e) e^{-2x}

(f) $\sqrt[3]{x+1}$

(g) $\dfrac{x}{x^2+1}$

(h) $ln(x^3 + 5\,x + 5)$

(i) $(4\,x^3 + 3\,x - 1)^7$

37. Calcule aproximadamente:

(a) $\sqrt[3]{0.126}$

(b) $\sqrt[4]{17}$

(c) $sen(61^0)$

(d) $(1.002)^7 + sen(1.002 \times \pi)$

(e) $\sqrt[3]{(8.01)^4} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{8.01}}$

(f) $2^{2.002}$

38. Determine as aproximações quadrática e cúbica no ponto $x_0 = 0$, das seguinetes funções:

(a) $f(x) = \sqrt{x+3}$

(b) $f(x) = e^{-2x}$

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$

(d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

(e) $f(x) = ln(x^3 + 5\,x + 5)$

(f) $f(x) = (4\,x^3 + 3\,x - 1)^7$

39. **Polinômio de Taylor de ordem n no ponto $\mathbf{x_0}$:** Seja f uma função n vezes derivável no ponto x_0. O polinômio de Taylor de ordem n, ($n = 0, 1, 2, ...$), no ponto x_0 é denotado por $P_n(x)$ e definido por:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n.$$

Verifique que o polinômio de Taylor de ordem n, no ponto $x_0 = 0$, das funções:

(a) $f(x) = sen(x)$ é $P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2\,k+1)!}$.

(b) $f(x) = e^x$ é $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$.

(c) $f(x) = \frac{1}{x}$ é $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, k!\,(x-1)^k$.

(d) Esboce o gráfico de f, $P_1(x)$, $P_3(x)$ e $P_5(x)$ no mesmo sistema de coordenadas.

(e) Compare $P_n(x)$ e $l(x)$. Que conclusões pode tirar? É possível utilizar P_n para fazer aproximações de f?

40. Calcule o valor aproximado do volume de um cubo, se o comprimento de cada aresta varia de $10\,cm$ para $10.1\,cm$.

41. Influências externas produzem aceleração numa partícula de tal forma que a equação de seu movimento é $y = \frac{4}{t^2} + t$, onde y é o deslocamento e t é o tempo.

(a) Quais são as equações da velocidade e da aceleração da partícula num tempo t?

(b) Quando a partícula para de mover-se?

42. Um estoque de sangue é guardado num freezer no instante $t = 0$. Após t horas, sua temperatura, em graus centígrados, é $T(t) = 30 + (t+1)^{-1} - 3\,t^2$. Qual é a velocidade de resfriamento após 10 horas?

43. Deve-se drenar uma piscina. Se Q é o número de litros de água na piscina t minutos após o início da drenagem e $Q(t) = 200\,(30 - t)^2$, qual é a velocidade de escoamento da água após $10\,min$?

44. Um corpo em queda livre tem como equação do movimento: $s(t) = \frac{g\,t^2}{2}$, onde $g = 9.8\,m/seg^2$, $s(t)$ é a distância, (em metros), percorrida pelo corpo em t segundos, desde o início da queda. Determine a velocidade e a aceleração do corpo em queda livre.

45. Uma partícula lançada verticalmente para cima com velocidade de $a\,m/seg$, atinge a altura de $s(t) = a\,t - 4.9\,t^2$ após t segundos. Qual deve ser a velocidade inicial para que a partícula atinja $44\,m$ antes de iniciar a queda?

46. O lado de um triângulo equilátero mede $a\,cm$ e cresce à razão de $k\,cm/h$. Com que velocidade crescerá a área do triângulo?

47. Qual é a variação das diagonais de um cubo se os lados crescem a uma razão de $2\,cm/seg$?

48. O raio da base de um cone cresce à razão de $1\,cm/min$ e sua altura decresce à razão de 2 cm/min. Como variará o volume total do cone quando o raio é $4\,cm$ e sua altura $6\,cm$?

49. Um balão esférico está sendo inflado. Seu volume cresce à razão de $100\,cm^3/seg$. Determine a razão com que varia o raio no instante em que o diâmetro é de $50\,cm$.

50. Mostre que a função logística $L = L(t)$ satisfaz à equação $\frac{dL}{dt} = C\,L\left(1 - \frac{L}{A}\right)$. Se $L = L(t)$ representa o crescimento populacional, quando a população se estabiliza?

51. A redução de oxigênio na água de uma lagoa, devido ao despejo de esgoto, só volta a níveis normais t dias após o despejo do esgoto. Sabendo que a quantidade de oxigênio que permanece, após t dias é dada por:

$$P(t) = 500\,\frac{t^2 + 10\,t + 100}{t^3 + 20\,t^2 + 200},$$

medido em $\%$ do nível normal de oxigênio, determine a velocidade com que a quantidade de oxigênio está sendo reduzida, após 1, 10, 20 e 50 dias após o despejo.

52. Ao meio dia o barco A está $64\,km$ a oeste do barco B. O barco A navega para o leste a $20\,km/h$ e o barco B navega para o norte a $25\,km/h$. Qual é a taxa de variação da distância entre os barcos às $13\,h$ e $12\,min$?

53. A frequência da vibração da corda de um violino é dada por

$$f = \frac{1}{2\,L}\sqrt{\frac{T}{\rho}},$$

onde L é o comprimento da corda, T é a tensão sobre a corda e ρ é densidade linear de massa da corda. Determine a taxa de varição de f em relação a L (com T e ρ constantes); a taxa de varição de f em relação a T (com L e ρ constantes); a taxa de varição de f em relação a ρ (com L e T constantes) e interprete os resultados.