

Laboratório de Física

Teoria dos Erros, uma Introdução.

UNIVASF
2006

Sumário

TEORIA DOS ERROS [].....	1
1 - ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS.....	1
1.1 - INTRODUÇÃO.....	1
1.2 - ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS.....	1
1.3 - NOTAÇÃO CIENTÍFICA.....	2
1.4 - OPERAÇÕES COM ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS.....	2
2 - INTRODUÇÃO À TEORIA DE ERROS.....	5
2.1 - INTRODUÇÃO.....	5
2.2 - DEFINIÇÕES.....	5
2.3 - OBJETIVOS DA TEORIA DE ERROS.....	7
2.4 - ERROS SISTEMÁTICOS E ERROS ESTATÍSTICOS.....	8
2.5 - HISTOGRAMA.....	8
2.6 - VALOR MAIS PROVÁVEL E VALOR MÉDIO.....	10
2.7 - ERRO SISTEMÁTICO.....	10
2.8 - DISPERSÃO E PRECISÃO.....	11
2.9 - ERROS ALEATÓRIOS.....	11
2.10 - DESVIOS OU RESÍDUOS.....	13
2.11 - DESVIO QUADRÁTICO MÉDIO (S_{RMS}).....	14
2.12 - DISTRIBUIÇÃO NORMAL OU DE GAUSS.....	15
2.13 - DESVIO PADRÃO (σ).....	17
2.14 - DESVIO PADRÃO DA MÉDIA ($\bar{\sigma}$).....	17
2.15 - INTERVALOS DE CONFIANÇA E NÍVEIS DE CONFIANÇA.....	18
2.16 - INCERTEZA PADRÃO FINAL.....	20
2.17 - ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS NA INCERTEZA PADRÃO.....	21
2.18 - ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS NA GRANDEZA.....	21
2.19 - PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS.....	22
REFERÊNCIAS:.....	24

Teoria dos Erros [1]

1 - ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS

1.1 - INTRODUÇÃO.

A sensibilidade e precisão de todo instrumento de medida está limitada na sua fabricação. Muitas vezes a leitura do valor de uma grandeza é intermediária a dois traços consecutivos da escala como na Fig. 1.

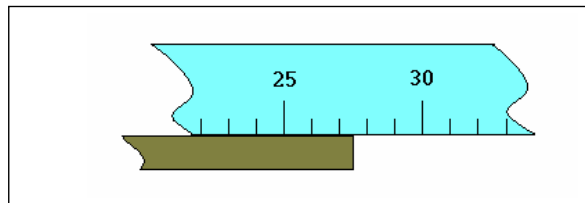


Fig.1- Exemplo de Medida de Distância.

1.2 - ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS

A barra que está sendo medida na Fig. 1 tem uma extremidade ajustada ao zero de uma régua marcada em centímetros. A outra extremidade da barra não está coincidindo com nenhum traço.

Observa-se que o valor deste comprimento é 27 cm mais alguns décimos de centímetro, mas não podemos afirmar com certeza o seu valor. Ou seja, podemos apenas estimar ou avaliar estes décimos de centímetro e a aproximação ao valor "verdadeiro" dependerá da perícia e da capacidade da avaliação do operador.

Por exemplo, suponha que três pessoas diferentes apresentem como resultado desta medida os seguintes valores: .

27,3 cm 27,4 cm 27,5 cm

Verificamos que há concordância com relação aos algarismos 2 e 7 e portanto um consenso de que eles são "**verdadeiros**" ou "**exatos**", enquanto que os algarismos 3, 4, e 5 são **duvidosos**. Os algarismos exatos de uma medida bem como os algarismos duvidosos, são denominados **algarismos significativos**. No exemplo acima, os três algarismos de cada medição são significativos exatos, mas os últimos algarismos de cada uma das medições (3, 4 e 5) são significativos duvidosos.

O termo duvidoso provém do fato que o mesmo apresenta uma incerteza, gerada pela própria grandeza medida, pela sensibilidade do instrumento bem como pela perícia do observador.

Qualquer grandeza física escalar pode ser escrita na forma:

$$A = (a \pm \sigma_a) u \quad \text{onde } a \text{ é seu valor numérico, } \sigma_a \text{ é a sua incerteza e } u \text{ é a sua unidade.}$$

Veremos primeiramente como escrever e operar com o valor numérico de A.

O valor numérico (a) poderá ser resultado de uma ou mais medições diretas ou indiretas. Entretanto, qualquer que seja a precisão adotada o seu número de algarismos estará limitado, devido às condições experimentais, a um certo número de algarismos que têm realmente significado, isto é, aos seus algarismos significativos.

1.3 - NOTAÇÃO CIENTÍFICA

A maneira de se escrever o valor numérico em trabalhos científicos é preferencialmente a **notação científica**. Nesta notação escreve-se o número referindo-se à potência de dez, **com a particularidade de se conservar à esquerda da vírgula, apenas um dígito, diferente de zero.**

Exemplos:

$$125 \quad \rightarrow \quad 1,25 \times 10^2 \quad \rightarrow \quad 3 \text{ algarismos significativos}$$

$$22,34 \quad \rightarrow \quad 2,234 \times 10 \quad \rightarrow \quad 4 \text{ algarismos significativos}$$

$$0,00350 \quad \rightarrow \quad 3,50 \times 10^{-3} \quad \rightarrow \quad 3 \text{ algarismos significativos}$$

$$1,0052 \quad \rightarrow \quad 1,0052 \quad \rightarrow \quad 5 \text{ algarismos significativos}$$

A razão de se preferir a notação científica a qualquer outra é que ela permite a rápida visualização da grandeza (a potência de 10) e do número de algarismos significativos.

1.4 - OPERAÇÕES COM ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS

Uma regra prática para a operação com algarismos significativos é adicionar aos valores um x à direita do último algarismo, realizar a operação e tomar como resultado os algarismos não afetados pelos x.

$$a) \quad 2,041 + 0,0498 + 98,00$$

$$\begin{array}{r} 2,041x \\ + 0,0498x \\ \hline 98,00x \\ \hline 100,09xxx \quad \text{====>} \quad 100,09 \end{array}$$

b) $20,00 - 0,1$

$$\begin{array}{r} 20,00x \\ - 0,1x \\ \hline 19,9xx \end{array} \implies 19,9$$

c) $15,421 - 0,0003$

$$\begin{array}{r} 15,421x \\ - 0,0003x \\ \hline 15,421xx \end{array} \implies 15,421$$

Multiplicação e Divisão:

a) $8,248 \times 3,1$

$$\begin{array}{r} 8,248x \\ \times 3,1x \\ \hline xxxxx \\ 8248x \\ \hline 25044x \\ 258xxxx \end{array} \implies 25,9$$

b) $109 \div 7,998$

$$\begin{array}{r} 109,xxxx \quad | \quad 7,998x \\ \hline 7998x \\ \hline 30xxxx \\ \hline 23994x \\ \hline 7xxxxx \\ \hline 47988x \\ \hline 3xxxxx \end{array} \quad 13,6$$

Outra prática de uso bastante generalizada é o de escrever o resultado de multiplicações, divisões e muitas vezes operações mais complexas, com o número de algarismos significativos de parcela mais pobre em significativos ou ainda, com o número de algarismos da mais pobre mais um algarismo.

Exemplos:

a) $y = 12e^{3,41} = 3,6 \times 10^2$ ou $y = 3,63 \times 10^2$

b) $y = 250 \operatorname{sen} 15^\circ = 6,5 \times 10$ ou $y = 6,47 \times 10$

c) $y = \frac{198 \ln 9,4}{344,1} = 1,3$ ou $y = 1,29$

IMPORTANTE: Esta regra (a do mais pobre em significativos) a rigor vale apenas para multiplicações e divisões. Um conhecimento mais profundo e coerente dos significativos será conseguido unicamente através da teoria de erros, cujos fundamentos veremos a seguir.

2 - INTRODUÇÃO À TEORIA DE ERROS

2.1 - INTRODUÇÃO

A nomenclatura sobre metrologia e as regras básicas sobre incerteza foram discutidas nos últimos anos por grupos de trabalho constituídos de especialistas indicados por diversas organizações internacionais (BIPM, ISO, IUPAC, IUPAP, IEC, OIML) e foram publicadas em dois importantes textos: *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurements* e *International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology*. Esta última publicação foi traduzida pela INMETRO em 1994.

Com a finalidade de tornar a exposição mais clara, e em conformidade com a Legislação Brasileira, serão apresentadas as definições e alguns comentários sobre termos mais usuais em Teoria dos Erros.

2.2 - DEFINIÇÕES

- **Medição:** conjunto de operações que têm por objetivo determinar o valor de uma grandeza.
- **Valor Verdadeiro:** Valor consistente com a definição de uma dada grandeza específica.

O valor verdadeiro de uma grandeza é o valor que seria obtido de uma medição perfeita e a determinação do mesmo pode ser entendida como o objetivo final da medição. Entretanto, deve ser observado que o valor verdadeiro é por natureza, indeterminado.

- **Resultado de uma medição:** valor atribuído ao mensurando, obtido por medição.
- **Mensurando:** grandeza específica submetida à medição.
- **Erro:** resultado de uma medição menos o valor verdadeiro do mensurando.

Isto é, é a diferença entre o resultado de uma medição e o valor verdadeiro dessa grandeza. Uma vez que o valor verdadeiro é uma quantidade desconhecida, resulta que o erro também o é, ao menos em princípio.

- **Desvio padrão experimental:** para uma série de medições de um mesmo mensurando, a grandeza σ , que caracteriza a dispersão dos resultados é dada pela fórmula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\delta x_i)^2}{n-1}}$$

onde δx_i representa a diferença entre o resultado da i-ésima medição e a média aritmética \bar{x} dos n resultados considerados.

- **Incerteza de medição:** parâmetro associado ao resultado de uma medição e que caracteriza a dispersão dos valores que podem ser fundamentalmente atribuídos ao mensurando.

Embora desconhecido, o **mensurando tem um valor verdadeiro único** por hipótese. Entretanto, diferentes valores podem ser "atribuídos" ao mensurando e a incerteza caracteriza a dispersão destes valores.

Evidentemente, a incerteza só pode ser obtida e interpretada em termos probabilísticos.

Existem várias formas de indicar a incerteza tais como a incerteza padrão, incerteza expandida e limite de erro.

- **Repetitividade:** grau de concordância entre resultados de sucessivas medições de um mesmo mensurando, efetuadas sob as mesmas condições de medições.
- **Reprodutibilidade:** grau de concordância entre resultados de medições de um mesmo mensurando, efetuadas sob condições de medições diferentes.
- **Valor médio verdadeiro ou média limite:** é o valor médio que seria obtido de um número infinito de medições em condições de repetitividade.
- **Erro estatístico:** resultado de uma medição menos o Valor Médio Verdadeiro (ou Média Limite).
- **Erro sistemático:** diferença entre o Valor Médio Verdadeiro e o Valor verdadeiro.

O Erro Sistemático é o erro do valor médio verdadeiro.

- **Exatidão ou Acurácia:** exatidão é o grau de concordância entre o resultado de uma medição e o valor verdadeiro do mensurando.
- **Precisão:** precisão é um conceito qualitativo para indicar o grau de concordância entre os diversos resultados experimentais obtidos em condições de repetitividade.

Assim, boa precisão significa erro estatístico pequeno, de forma que os resultados apresentam boa repetitividade. Note, entretanto, que mesmo com boa precisão a exatidão ou acurácia pode ser ruim caso exista erro sistemático grande.

- **Incerteza padrão:** é a incerteza em resultado final dada na forma de um desvio padrão.
- **Intervalo de confiança:** considerando um intervalo entre a e b , pode-se fazer a seguinte afirmativa em relação a uma quantidade desconhecida y :

$$a \leq y \leq b$$

Se a afirmativa tem probabilidade P de ser correta, o intervalo definido pelos valores a e b é um intervalo de confiança P para y .

- **Nível de confiança:** o coeficiente de confiança, nível de confiança ou confiança é a probabilidade P de para um determinado intervalo de confiança.

Por exemplo, se y_v é o valor verdadeiro de uma grandeza, y é um resultado experimental e σ é a incerteza padrão:

$$y - \sigma \leq y_v \leq y + \sigma \quad (\text{com } P \sim 68\%)$$

define intervalo com confiança de $P \sim 68\%$, para distribuição normal de erros e incerteza σ obtida a partir de número de graus de liberdade (número de medições) razoavelmente grande.

2.3 - OBJETIVOS DA TEORIA DE ERROS

Quando uma **grandeza física** experimental x é determinada a partir de uma medição, o resultado é uma aproximação para o valor verdadeiro, x_v , da grandeza. Os objetivos da teoria de erros podem ser resumidos em:

- a) Obter o melhor valor para o mensurando a partir dos dados experimentais disponíveis. Isto significa determinar em termos estatísticos a melhor aproximação possível para o valor verdadeiro.

- b) Obter a incerteza no valor obtido, o que significa determinar em termos estatísticos o grau de precisão e confiança na medida da grandeza física.

2.4 - ERROS SISTEMÁTICOS E ERROS ESTATÍSTICOS

Geralmente, ocorrem erros de vários tipos numa mesma medição. Estes erros podem ser agrupados em dois grandes grupos que são: os **erros sistemáticos** e **erros estatísticos (ou aleatórios)**.

Considerando o conjunto de x_i determinações ($i=1, 2, 3, \dots, n$) de um mensurando, os erros estatísticos e erros sistemáticos podem ser distinguidos como segue:

- a) **Erro sistemático:** é um erro que afeta igualmente todas as n medições x_i . Isto é, o conjunto completo das n medições x_i apresenta-se igualmente deslocada com relação ao valor verdadeiro x_v .

Erros sistemáticos podem ser de vários tipos como:

- **Erro sistemático instrumental:** erro que resulta da calibração do instrumento de medição.
- **Erro sistemático ambiental:** erro devido a efeitos do ambiente sobre a experiência. Fatores ambientais como temperatura, pressão, umidade e outros podem introduzir erros no resultado de medição.
- **Erro sistemático observacional:** erro devido a pequenas falhas de procedimentos ou limitações do observador. Por exemplo, o efeito de paralaxe na leitura de escalas de instrumentos.

- b) **Erro estatístico ou erro aleatório :** é a medida da dispersão dos n resultados x_i em torno do valor verdadeiro x_v .

Erros estatísticos (ou aleatórios) resultam de variações aleatórias nas medições, provenientes de fatores que não podem ser controlados ou que, por algum motivo, não foram controlados. Por exemplo, na medição de massa com balança, correntes de ar ou vibrações (fatores aleatórios) podem introduzir erros estatísticos na medição.

2.5 – HISTOGRAMA

Suponha que estejamos realizando a medição de uma quantidade (mensurando) x e que o aparelho empregado seja suficientemente sensível às condições experimentais, isto é, o aparelho é suficientemente sensível para detectar as variações aleatórias.

Se estivermos interessados em valores confiáveis, é natural que não nos contentemos com apenas uma única medição, e por isso devemos repetir a medição para

ganharmos confiança no valor encontrado. Porém, quantas medições da grandeza x deverão ser obtidas para que tenhamos um valor confiável?

Para respondermos satisfatoriamente a esta questão, necessitamos de toda uma teoria que é chamada **Teoria de Erros** da qual daremos aqui as noções básicas.

Sempre que efetuamos uma medição ela estará afetada de um erro experimental. Isto quer dizer que ao repetirmos o processo de medição ainda que com o mesmo experimentador, mesmo mensurando, com os mesmos instrumentos calibrados e nas mesmas condições ambientais poderemos obter valores diferentes devido às flutuações aleatórias.

Portanto, em geral, os resultados obtidos x_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) mostrarão uma **distribuição de valores**, isto é, os valores apresentarão uma **dispersão**, como a que é vista na tabela 1.

Para facilitar o entendimento e a interpretação dos resultados experimentais utiliza-se uma comumente a representação gráfica desses resultados, denominada **histograma**.

No histograma os resultados são distribuídos em **classes (intervalos)**. Contam-se quantos resultados caem em cada classe. O número de resultados de cada classe é chamado **freqüência absoluta**. Caso seja de nosso interesse, podemos usar a **freqüência relativa**, que será obtida dividindo-se a freqüência absoluta pelo número total dos resultados (n).

Representam-se as freqüências pela altura de retângulos verticais cujas bases são os intervalos dentro dos quais foram efetuadas as contagens dos resultados. Veja a figura 1 que mostra o histograma dos valores contidos na tabela 1.

X (u)	Número de ocorrências ou freqüência
1,51	1
1,52	3
1,53	6
1,54	8
1,55	10
1,56	7
1,57	8
1,58	4
1,59	3
1,60	0
1,61	1

Tabela 1

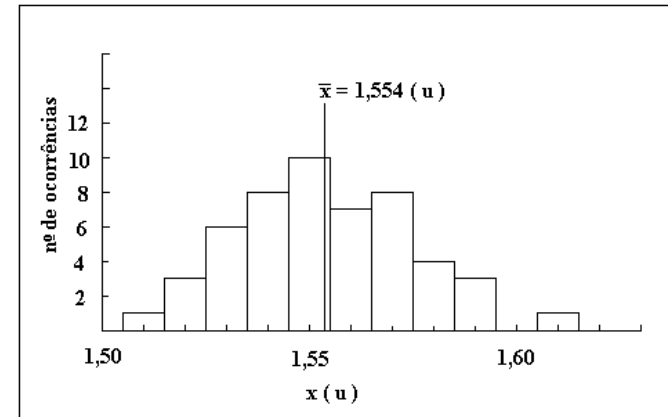


Fig.2 - Histograma dos valores da Tab.1

2.6 – VALOR MAIS PROVÁVEL E VALOR MÉDIO

A observação do histograma da Fig.1 mostra que existe um valor em torno do qual as medidas tendem a se aglomerar, este valor é o **valor mais provável**.

É estabelecido em geral, embora arbitrariamente, que o valor mais provável do mensurando é a sua **média aritmética**, ou seja, **o valor médio é o valor mais provável e é a que melhor representa a grandeza medida:**

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (1)$$

No exemplo da Tab.1 o valor mais provável ou valor médio é 1,554 u que está representado no histograma da Fig.2.

2.7 - ERRO SISTEMÁTICO

Suponhamos que conheçamos o **valor verdadeiro de x** e que ele seja no nosso exemplo 1,054 u. Observe que este valor não coincide com o valor mais provável calculado no item anterior. Isso pode ter sido ocasionado por um desvio sistemático. Supondo que seja isto que ocorreu, para que o valor mais provável seja o valor verdadeiro é necessário fazer coincidir-lhos e isto poderá ser realizado, corrigindo-se **sistematicamente** cada uma das determinações com o valor da diferença entre o valor médio e o valor verdadeiro.

No nosso exemplo: $(1,554 - 1,054) u = 0,500 u$ é o erro sistemático.

A minimização dos erros sistemáticos é a marca do bom experimentador, pois, com frequência, é difícil senão impossível eliminá-los. E a desenvoltura com que se lida com eles depende muito da vivência anterior. Algumas vezes os erros sistemáticos poderão ser minimizados pela calibração do instrumento.

2.8 - DISPERSÃO E PRECISÃO

Ao repetirmos uma medição muitas vezes, os resultados nem sempre coincidem. Esse espalhamento nos valores das medidas é chamado de **dispersão**.

A dispersão existente nos valores reflete a **precisão da medida**, isto é, o erro experimental associado à medida. **Quanto menor a dispersão maior a precisão e vice-versa**.

2.9 - ERROS ALEATÓRIOS

Dissemos que ao repetirmos as medições, elas não se reproduzirão exatamente. Suponhamos, portanto que uma outra série de medições tenha sido realizada e que o resultado tenha sido aquele apresentado na Tab.2. e nos histogramas da Fig.2a e Fig.2b.

A simples observação dos histogramas sugere que o resultado do conjunto 1 é mais confiável pois apresenta menor dispersão. Um dos objetivos principais da Teoria de Erros é estabelecer uma quantidade que meça as dispersões e conseqüentemente os níveis de confiança nos valores mais prováveis obtidos. Para isso, necessitamos examinar com atenção o resultado das medições.

X (u)	Conjunto 1 Número de ocorrências	Conjunto 2 Número de Ocorrências
0,99	---	1
1,00	---	1
1,01	1	2
1,02	3	3
1,03	6	5
1,04	8	5
1,05	10	9
1,06	7	6
1,07	8	7
1,08	4	5
1,09	3	3
1,10	0	1
1,11	1	1
1,12	---	1
1,13	---	1

Tabela 2

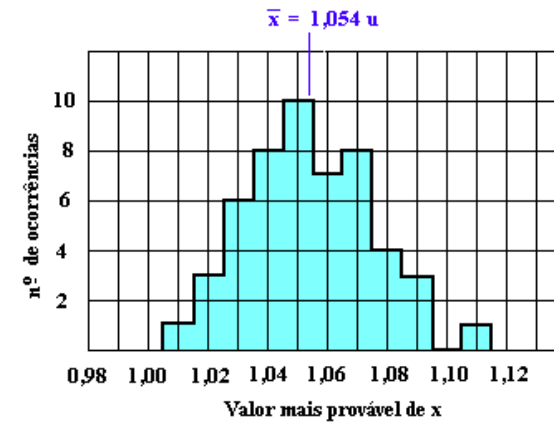


Fig. 2a

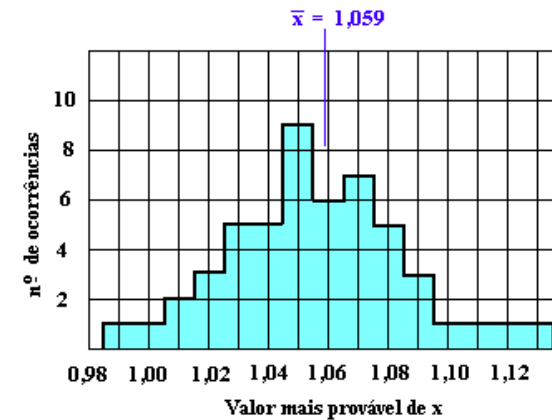


Fig. 2b

2.10 - DESVIOS OU RESÍDUOS

Dada uma série de medidas de uma grandeza as diferenças entre os valores medidos e o valor mais provável \bar{x} são chamados **desvios ou resíduos**:

$$\delta x_i = x_i - \bar{x} \quad (2)$$

A primeira idéia que surge para se obter uma quantidade que meça a dispersão é somar os desvios e tirar a média. Entretanto, se o valor mais provável é a média aritmética que é dada pela equação (1) a média dos desvios será nula pois:

$$\frac{\sum_{i=1}^n \delta x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \bar{x}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}}{n} = \bar{x} - \bar{x} = 0$$

Outra idéia seria a utilização da soma dos desvios tomados em valores absolutos, isto é, em módulos pois ela seria obviamente diferente de zero:

$$\frac{\sum_{i=1}^n |\delta x_i|}{n} \geq 0$$

Existe, entretanto, uma quantidade mais interessante que é a soma dos quadrados dos desvios. Ela é interessante, pois, neste caso, **se o valor mais provável é a média aritmética das medidas, a soma dos quadrados dos desvios é um mínimo**. Demonstramos; os quadrados dos desvios são:

$$(\delta x_1) = x_1^2 - 2x_1\bar{x} + \bar{x}^2$$

$$(\delta x_2) = x_2^2 - 2x_2\bar{x} + \bar{x}^2$$

$$(\delta x_3) = x_3^2 - 2x_3\bar{x} + \bar{x}^2$$

.....

$$(\delta x_i) = x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2$$

.....

$$(\delta x_n) = x_n^2 - 2x_n\bar{x} + \bar{x}^2$$

A soma dos quadrados dos desvios (S) será:

$$S = \sum_{i=1}^n (\delta x_i)^2 = \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + n\bar{x}^2$$

Vamos determinar a condição para que a soma S seja mínima. A derivada primeira com relação a \bar{x} é:

$$\frac{\partial S}{\partial \bar{x}} = -2 \sum_{i=1}^n x_i + 2n\bar{x}$$

como:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

temos:

$$\frac{\partial S}{\partial \bar{x}} = 0$$

Como a derivada segunda de S é:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \bar{x}^2} = 2n \geq 0 \quad \text{ficando provado que } S \text{ é um mínimo.}$$

Deste resultado, concluímos que **o valor mais provável é aquele para o qual a soma dos quadrados dos desvios é mínima e que a quantidade a ser empregada para a medida da dispersão dos dados, ou seja, a largura do histograma deve estar relacionada com a soma dos quadrados dos desvios**.

2.11 - DESVIO QUADRÁTICO MÉDIO (S_{rms})

Uma dessas quantidades que poderia ser utilizada para a medida da dispersão poderia ser o desvio quadrático médio ou *rms* (*root mean square deviation*), definida pela relação:

$$S_{rms} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\delta x_i)^2}{n}} \quad (3)$$

Infelizmente essa quantidade não tem o significado mais amplo possível porque ela indica simplesmente como um conjunto de n valores desviam-se de sua média. Um segundo conjunto de n medidas geralmente não fornecerá um valor médio idêntico ao primeiro e nem um conjunto idêntico de desvios. A isso chamamos de **flutuação estatística**.

Para estabelecermos a quantidade que poderá medir a dispersão da melhor forma possível, voltemos ao nosso exemplo e vejamos com mais cuidado a influência do número de medições n .

2.12 - DISTRIBUIÇÃO NORMAL OU DE GAUSS

É um fato experimental que a frequência dos resultados (o histograma) varia com o número de medições realizadas, bem como ao tomarmos outro conjunto com o mesmo número de medições n , como mostram a Tab.2 e Fig 2a e Fig. 2b

Observa-se que essas flutuações são mais acentuadas quando o número de medições é pequeno. Por outro lado, aumentando o número de medições as flutuações decrescem. Por exemplo, a distribuição dos resultados para 5 medições mostra-se, geralmente muito diferente da distribuição para 10 medições.

Existem diferenças, embora bem menos acentuadas, entre distribuição de 50 e de 100 medições e, ao compararmos os histogramas para 500 medições com o de 1000 medições veremos que as diferenças serão ainda menores.

Se formos melhorando a nossa técnica e obtendo mais alguns algarismos significativos em cada medição, poderemos utilizar valores cada vez menores para os intervalos Δx . Assim, quando o número de medições tenderem para o infinito e o intervalo Δx tender a zero, o histograma em geral tenderá para uma curva lisa e simétrica com um pico de máximo em \bar{x} .

Podemos concluir, então, que a distribuição dos resultados adquire uma forma cada vez mais definida em função do aumento do número de medições n e para sumarizar, dizemos que existe uma **distribuição limite** quando n tende para o infinito e que na ausência de erros sistemáticos, o valor \bar{x} tende para o valor verdadeiro. Fig. 3.

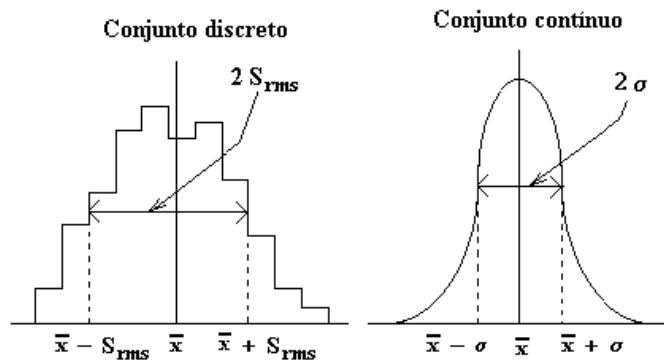


Fig. 3

No formalismo da Teoria de Erros, a curva da distribuição limite representa de uma forma compacta toda a informação que um experimento pode fornecer. Tanto o mensurando quanto o sistema de medição (incluindo aqui o experimentador como parte do sistema) determinam a posição e o formato da curva.

Veremos que o valor de x correspondente ao máximo da curva está relacionado com o valor verdadeiro da grandeza, e que a largura da curva está relacionada com a precisão dos resultados e é medida pelo desvio padrão.

Uma justificativa matemática de função gaussiana como distribuição de erros é encontrada no teorema do limite central, em sua forma mais geral. Numa linguagem bastante simplificada e adaptada ao problema em questão, este teorema diz que se o erro total é a soma de muitos erros elementares que têm distribuições quaisquer com variâncias finitas, a distribuição de probabilidade para o erro total tende a ser gaussiana.

A expressão analítica da **curva de Gauss** é:

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{x}} e^{-h^2 x^2} \quad (4)$$

onde h é chamado de índice de precisão. Quando h é grande a curva é estreita, indicando uma experiência de alta precisão e quando h é pequena a curva é larga indicando uma experiência de baixa precisão (Fig.4).

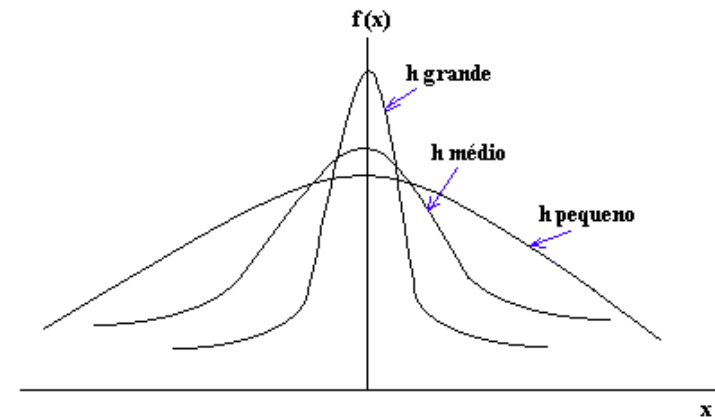


Fig.4 - Influência do índice de Precisão

2.13 - DESVIO PADRÃO (σ)

Para estabelecermos uma quantidade para a medida da dispersão com significado mais amplo, empregamos o conceito de que os dois conjuntos do nosso exemplo são duas amostras do universo de medidas, que poderiam ser realizadas, sendo infinito o número de medidas daquele universo.

A quantidade que é de interesse chama-se **desvio padrão (σ), que vem a ser o desvio médio quadrático das medidas com relação à média do universo de medidas.**

Como é impossível fazer todas as medidas do universo de medidas para determinarmos a sua média, o procedimento adotado será, a partir das n observações, por meio de considerações de ordem estatística, obter a melhor estimativa para o desvio padrão.

Desta forma, a melhor estimativa para o desvio padrão será:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\delta x_i)^2}{n-1}} \quad (5)$$

O significado do desvio padrão é que ele indica o erro que teríamos caso fizéssemos uma única observação. Ou, equivalentemente, o significado do erro padrão de um dado conjunto de n determinações é que uma dada observação tem 68% de probabilidade de estar no intervalo $\pm \sigma$ em torno do valor médio; 95% no intervalo $\pm 2\sigma$, etc.

2.14 - DESVIO PADRÃO DA MÉDIA ($\bar{\sigma}$)

Sabemos agora determinar a partir de n observações o desvio padrão de uma medida, isto é, sabemos estimar a partir da análise de n observações o erro que teríamos, com uma dada probabilidade, caso houvésssemos realizado uma única determinação.

Entretanto, tendo realizado n determinações o melhor valor disponível é a sua média (\bar{x}), e portanto estaremos mais interessados em estimar o erro em \bar{x} .

Com esse propósito, poderíamos então realizar vários conjuntos de n determinações, calcular os valores das respectivas médias e, em seguida, a média das médias e este desvio padrão da média das médias seria mais preciso.

Este raciocínio poderia ser utilizado novamente, calculando-se a média das médias e assim indefinidamente, sem um fim lógico? Felizmente é possível prever teoricamente o erro a que está sujeita a média de n valores medidos, sem ter que repetir o conjunto de medidas. Este desvio é chamado de desvio padrão da média:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\delta x_i)^2}{n(n-1)}} \quad (6)$$

Note que, quanto maior o número de observações n , menor será o desvio padrão da média e, portanto, maior a precisão do resultado. Este é um princípio fundamental da estatística.

O significado do erro padrão da média de um dado conjunto de n medidas é que o valor médio \bar{x} em 68% de chance de estar dentro do intervalo $\pm \bar{\sigma}$ em torno do valor médio \bar{x} ; 95% de estar no intervalo $\pm 2\bar{\sigma}$, etc.

Vemos então que o desvio padrão e o desvio padrão da média têm significados análogos:

O significado do $\left\{ \begin{array}{l} \text{desvio padrão da medida} \\ \text{desvio padrão da média} \end{array} \right\}$ de um dado conjunto de n determinações é que $\left\{ \begin{array}{l} \text{a medida} \\ \text{o valor médio} \end{array} \right\}$ tem 68% de chance de estar dentro do intervalo $\left\{ \begin{array}{l} \pm \sigma \\ \pm \bar{\sigma} \end{array} \right\}$ em torno do $\left\{ \begin{array}{l} \text{valor médio} \\ \text{valor verdadeiro} \end{array} \right\}$, 95% no intervalo $\left\{ \begin{array}{l} \pm 2\sigma \\ \pm 2\bar{\sigma} \end{array} \right\}$, etc.

Resumindo: A partir de um conjunto de n determinações de uma quantidade x , a melhor estimativa para o valor verdadeiro será dada pela sua média aritmética \bar{x} e pelo desvio padrão da média $\pm \bar{\sigma}$, isto é:

$$\bar{x} \pm \bar{\sigma}$$

onde o intervalo $\bar{x} - \bar{\sigma}$ a $\bar{x} + \bar{\sigma}$ delimita uma faixa 68, 27% de probabilidade de conter o valor verdadeiro.

2.15 - INTERVALOS DE CONFIANÇA E NÍVEIS DE CONFIANÇA

Nível de confiança P ou, simplesmente, confiança P de uma medida é a probabilidade P de que o valor apresentado esteja correto.

Portanto quando dizemos que o valor de uma quantidade x é: $(x \pm \sigma_x)$ com confiança de P%. Estamos afirmando que o valor verdadeiro de x tem probabilidade de P% de estar dentro do intervalo compreendido entre

$$x - \sigma_x, \quad x + \sigma_x$$

Para se chegar a esse resultado, basta integrar a densidade de probabilidade $f(x)$ dentro do intervalo $x - \sigma_x$ até $x + \sigma_x$.

No caso de distribuição Gaussiana a equação $f(x) = \frac{h}{\sqrt{x}} e^{-h^2 x^2}$, a integração dentro desse intervalo dá 0,6827, isto é, 68,27% de confiança.

Por outro lado podem-se obter intervalos de confiança diferentes, basta multiplicar σ_x por fatores convenientes. Damos na Tab. 3 os valores desses fatores para alguns níveis de confiança válidos para n grande.

Níveis de Confiança	Intervalos de Incerteza
0,50	0,674 σ
0,6827	1,000 σ
0,80	1,282 σ
0,90	1,645 σ
0,95	1,960 σ
0,9545	2,000 σ
0,99	2,576 σ
0,9973	3,000 σ

Tabela 3 - Níveis de confiança e intervalos de confiança para n grande.

Entretanto, frequentemente o número n de observações é pequeno e, portanto o desvio $\pm \sigma_x$ não é acuradamente conhecido; conseqüentemente será necessário levar em conta o número de observações. (Tabela 4).

Número de Observações	Nível de Confiança		
	50 %	90 %	95 %
2	1,00 σ	6,31 σ	12,71 σ
3	0,82 σ	2,92 σ	4,30 σ
4	0,77 σ	2,35 σ	3,18 σ
5	0,74 σ	2,13 σ	2,78 σ
6	0,73 σ	2,02 σ	2,54 σ
7	0,72 σ	1,94 σ	2,45 σ
8	0,71 σ	1,90 σ	2,37 σ
9	0,71 σ	1,86 σ	2,31 σ
10	0,70 σ	1,83 σ	2,26 σ
11	0,70 σ	1,81 σ	2,23 σ
16	0,69 σ	1,75 σ	2,13 σ
infinito	0,67 σ	1,64 σ	1,96 σ

Tabela 4- Intervalos de confiança para n pequenos.

2.16 - INCERTEZA PADRÃO FINAL

Idealmente, o instrumento de medida deve sempre estar calibrado e possuir sensibilidade suficiente para poder observar as flutuações estatísticas.

Alguns dos erros sistemáticos existentes podem, às vezes, serem corrigidos e, com isso, melhorar os resultados finais da medição. Erros Sistemáticos para os quais não é possível fazer correções são chamados **Erros Sistemáticos Residuais** e as incertezas correspondentes são denominadas **Incerezas Sistemáticas Residuais**.

No caso dos instrumentos de medidas não preencherem a condição acima, a de possuírem sensibilidade suficiente para observar as flutuações estatísticas, costuma-se especificar um **erro avaliado** adotando-se uma das regras práticas: o limite de erro de um instrumento de medição é dado pela menor divisão da escala ou metade da menor divisão da escala.

É necessário, entretanto, nesta avaliação, levar em conta que este valor será tomado como um desvio padrão, a fim de permitirem cálculos de propagação de erros coerentes. Portanto **essa avaliação não deve abranger 100% de confiança, mas sim um pouco mais da metade (68%)**.

As incertezas estatísticas são obtidas através do desvio padrão do valor médio (Eq. 6). Já as incertezas sistemáticas residuais σ_r ; advindas de multiplicidade de efeitos, são mais fáceis de serem obtidas e não existe nenhum método padrão bem estabelecido para isso, exceto o bom senso.

Para combinar a incerteza estatística e a incerteza sistemática residual afim de obter a incerteza padrão final σ_f de uma medição, usamos:

$$\sigma_f = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_r^2}$$

NOTE BEM:

- A partir de um conjunto de n determinações de uma quantidade x a melhor estimativa para o valor verdadeiro será dada pela sua média aritmética acompanhada do seu desvio padrão da média isto é:

$$\bar{x} \pm \bar{\sigma}_x$$

- O intervalo de $\bar{x} - \bar{\sigma}_x$ a $\bar{x} + \bar{\sigma}_x$ delimita uma faixa que tem 68,27% de probabilidade de conter o valor verdadeiro.
- Matematicamente, na curva de Gauss a completa certeza implica num intervalo de confiança com limites $\pm \infty$.

Fisicamente, existem limites impostos pela natureza. Por exemplo, na determinação de comprimento seria a posição do último átomo, posição esta que por sua vez não pode ser determinada com precisão absoluta.

- Observe que, podemos usar os valores das Tab.3 e Tab.4 indiferentemente para o desvio padrão ou desvio padrão da média.
- Na apresentação do valor de uma dada grandeza o desvio fornecido é aquele associado ao desvio padrão da média (incerteza padrão). Convém informar também o número de medidas feitas.
- Caso o nível de confiança utilizado seja diferente daquele associado ao desvio padrão da média (68,27%) devemos informar o seu valor.

Exemplos:

$$V = (2,53 \pm 0,02) \text{ m/s com } 95\% \text{ de confiança ou}$$

$$V = (2,53 \pm 0,02) \text{ m/s (95\%)}$$

$$S = (15,75 \pm 0,17) \text{ cm}^2 \text{ (50\%)}$$

2.17 - ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS NA INCERTEZA PADRÃO

Não existe uma regra muito bem definida para o número de algarismos que devem ser indicados para a incerteza padrão. A tendência atual é no sentido de indicar a incerteza padrão com 2 algarismos à esquerda. Entretanto, em muitos casos, não é possível atribuir mais de 1 algarismo para a incerteza padrão.

Podemos adotar as seguintes regras, nas quais os zeros à esquerda não são considerados.

- A incerteza padrão *deve* ser dada com 2 algarismo, quando o primeiro algarismo na incerteza for 1 ou 2.
- A incerteza padrão *pode* ser dada com 1 ou 2 algarismos, quando o primeiro algarismo na incerteza 3 ou maior.

Estas regras são justificadas na referência [2].

2.18 – ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS NA GRANDEZA

A seguir, são resumidas as regras para se determinar os algarismos significativos num resultado e para se escrever o resultado final.

- Se a incerteza padrão é dada por um único algarismo, o algarismo correspondente na grandeza é o último algarismo significativo. Se a incerteza

padrão é dada por com 2 algarismos, os 2 algarismos *correspondentes* na grandeza podem ser considerados com os 2 últimos algarismos significativos.

- Os algarismos não significativos à direita *nunca devem ser escritos num resultado final*.
- Zeros à esquerda são considerados algarismos não significativos e, como regra geral, deve-se evitar muitos zeros à esquerda. Isto pode ser feito por meio de mudança de unidades ou usando uma potência de 10 como fator multiplicativo.

Exemplo. Um resultado experimental e a respectiva incerteza padrão são calculados, obtendo-se:

$$y = 0,0004639178 \text{ m e}$$

$$\sigma = 0,000002503 \text{ m}$$

No caso, a incerteza padrão deve ter apenas 2 algarismos significativos:

$$\sigma = 0,0000025 \text{ m}$$

Os algarismos correspondentes em y (3 e 9) são os 2 últimos algarismos significativos. Assim, y deve ser escrito como

$$y = 0,0004639 \text{ m}$$

Muitos zeros à esquerda (não significativos) devem ser evitados trocando unidades ou utilizando-se fator multiplicativo:

$$y = 0,0004639 \text{ m} \quad \text{e} \quad \sigma = 0,0000025 \text{ m}$$

ou

$$y = 4,639 \times 10^{-4} \text{ m} \quad \text{e} \quad \sigma = 0,025 \times 10^{-4} \text{ m}$$

Deve ser observado que é bastante inconveniente usar unidades ou fatores multiplicativos diferentes para a grandeza e para a incerteza.

2.19 – PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS

Uma grandeza w, que é calculada como *função* de outras grandezas x, y, z, ..., pode ser representada por

$$w = w(x, y, z, \dots).$$

As grandezas x, y, z, \dots são admitidas como grandezas experimentais, sendo $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \dots$ as incertezas padrões correspondentes:

$$x \rightarrow \sigma_x \quad y \rightarrow \sigma_y \quad z \rightarrow \sigma_z.$$

Se os erros nas variáveis x, y, z, \dots são *completamente independentes* entre si, a incerteza padrão em w é, em primeira aproximação dada por

$$\sigma_w^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2 + \dots \quad (7)$$

No caso de uma única variável, a equação (7) se reduz à:

$$\sigma_w^2 = \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \sigma_x^2 \quad \text{ou} \quad \sigma_w = \left|\frac{dw}{dx}\right| \sigma_x. \quad (8)$$

Exemplo. *Incerteza do volume de um cilindro.*

O volume de um cilindro pode ser calculado medindo-se o comprimento L e o raio R . O volume V é calculado em função de L e R .

$$V = V(L, R) = \pi L R^2.$$

A equação entre as incertezas é dada, usando-se (7):

$$\sigma_V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial L}\right)^2 \sigma_L^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial R}\right)^2 \sigma_R^2.$$

Assim obtém-se

$$\sigma_V^2 = (\pi R^2)^2 \sigma_L^2 + (2\pi L R)^2 \sigma_R^2.$$

Dividindo-se os termos por $V^2 = (\pi L R)^2$, obtém-se:

$$\left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_R}{R}\right)^2.$$

Em termos das *incertezas relativas* ($\varepsilon_V = \frac{\sigma_V}{V}$, $\varepsilon_L = \frac{\sigma_L}{L}$, $\varepsilon_R = \frac{\sigma_R}{R}$):

$$\varepsilon_V = +\sqrt{\varepsilon_L^2 + 4\varepsilon_R^2}.$$

Nem sempre é possível obter uma expressão simples como esta, envolvendo somente as incertezas relativas.

Referências:

[1] Material baseado na apostila do Laboratório de Física do ITA, disponível em http://www.fis.ita.cta.br/labfis24/erros/errostextos/teor_erros1.htm

[2] Fundamentos da Teoria dos Erros – José Henrique Vuolo – Edgard Blucher LTDA.