Introdução à complexidade de algoritmos

Tempo de Execução

A avaliação de desempenho de um algoritmo quanto executado por um computador pode ser feita a posteriori ou a priori.

Uma avaliação a posteriori envolve a execução propriamente dita do algoritmo, medindo-se o tempo de execução. Só podendo ser exata se forem conhecidos detalhes da arquitetura da máquina, da linguagem de programação usada, do código gerado pelo compilador, etc. De fato, o tempo deve ser medido fisicamente para um certo algoritmo, compilador e computador. Obtêm-se assim medidas até certo pondo empíricas, ainda que guiadas por conjuntos de testes preparados para tal, chamados *benchmarks*.

UNIVASF

Tempo de Execução

Já uma avaliação a priori de um algoritmo, feita sem sua execução, de forma analítica, é possível se considerarmos dois itens:

- a entrada (os dados fornecidos) e
- o número de instruções executadas pelo algoritmo.

Em geral, o aspecto importante da entrada é seu "tamanho", que pode ser dado como número de valores num vetor, o número de registros num arquivo, enfim, um certo número de elementos que constituem a entrada de dados para o algoritmo. De modo que o tempo de execução de um algoritmo pode ser dado como uma função **T(n)** do tamanho **n** da sua entrada.

UNIVASF

Tempo de Execução

Por exemplo, um programa pode ter tempo de execução **$T(n) = n^2 + n + 1$**. A unidade de **$T(n)$** é em princípio instrução executada. Uma instrução neste contexto é uma sequência de operações cujo tempo de execução pode ser considerado constante (de certa forma, cada "passo" do algoritmo).

Por exemplo, o algoritmo a abaixo:

```
void somaVetor (int v[n], int *k)      {
    int i;
    *k=0;
    for (i=0; i<n; i++)
            *k = (*k) + v[i];
}
```

Tempo de Execução

Sendo **v** a entrada, de tamanho **n**, pode-se ver facilmente que a soma **k+v[i]** será efetuada **n** vezes. Consequentemente, **T(n) = n+1**, incluindo o passo de inicialização. O tempo de execução (em instruções) variará conforme variar **n**, numa proporção linear.

No entanto, como já se frisou, o tempo de execução vai depender de outros fatores, ligados à máquina, linguagens usadas, etc., e mesmo, por vezes, é função de aspectos adicionais de uma particular entrada e não apenas do seu tamanho, conforme veremos no exemplo do slide a seguir.

Conforme Ziziani (2004), é importante enfatizar que **T(n)** não representa diretamente o tempo de execução, mas o número de vezes que certa operação relevante é executada.

Tempo de Execução

```
int localiza (int v[n], int x)
{
    int i;
    for (i=0; i<n; i++)
        if (x==v[i])
            return i;
    return -1;
}
```

O teste pode ser executado apenas uma vez, se o valor procurado estiver no primeiro elemento do vetor. E é executado no máximo n vezes. Pode-se cogitar, então, a existência de tempos mínimos, médios e máximos.

Tempo de Execução

Acontece que, em geral, tempos mínimos são de pouca utilidade e tempos médios são difíceis de calcular (dependem de se conhecer a probabilidade de ocorrência das diferentes entradas para o algoritmo).

Consideraremos **T(n)** como uma medida assintótica máxima, ou seja, uma medida do ***pior caso*** de desempenho, que ocorre com a entrada mais desfavorável possível. No caso anterior, **T(n) = n + 1**, incluindo o passo de retorno, que sempre acontece uma vez.

UNIVASF

Tempo de Execução

Porém, a título ilustrativo, vamos analisar o problema de se efetuar uma busca sequencial em um vetor (função localiza). O melhor caso da busca sequencial em um vetor ocorre quando o valor a ser procurado é o primeiro a ser consultado. Já o pior caso ocorre quando o valor procurado é o último a ser consultado ou quando o mesmo não encontra-se no vetor.

Sendo assim temos:

Melhor caso: T(n) = 1

Pior caso: T(n) = n

Tempo de Execução

Para determinar o tempo do caso médio, consideraremos $\mathbf{p_i}$ a probabilidade de localizar o *i*-ésimo valor. Como para encontrar o *i*-ésimo valor são necessárias ***i*** comparações, temos que:

$$\mathbf{T(n)} = 1 \cdot \mathbf{p_1} + 2 \cdot \mathbf{p_2} + 3 \cdot \mathbf{p_3} + ... + n \cdot \mathbf{p_n}$$

Considerando que a probabilidade de cada um dos valores ser encontrado é 1/n, temos que:

$$\mathbf{T(n)} = 1 \cdot 1/n + 2 \cdot 1/n + 3 \cdot 1/n + ... + n \cdot 1/n$$

$$\mathbf{T(n)} = 1/n \cdot (1 + 2 + 3 + ... + n) \qquad \text{(PA)}$$

$$\mathbf{T(n)} = 1/n \cdot (n \cdot (n + 1))/2$$

$$\mathbf{T(n)} = (n + 1)/2$$

Complexidade

A avaliação analítica de um algoritmo pode ser feita com vistas a se obter uma estimativa do esforço de computação, não em termos de unidade de tempo propriamente, mais em termos de uma *taxa de crescimento* do tempo de execução em função do "tamanho do problema", i.e., do tamanho da entrada.

Um exemplo típico desse relacionamento entre tamanho da entrada e tempo de processamento é o caso dos algoritmos de ordenação: nestes, os dados são vistos sempre como sequências de valores com um certo comprimento, e é natural concluir que quanto maior esse sequência, mais tempo consumirá a ordenação.

UNIVASF

Complexidade

Mas *quanto mais* tempo?

Vamos considerar o comportamento de dois algoritmos, **A1** e **A2**, que realizam a mesma tarefa em tempos T_{A1} e T_{A2}, para uma entrada de tamanho **n**. Teremos então os seguintes tempos de execução para diferentes tamanhos da entrada:

TAMANHO DA ENTRADA	TEMPO ALG. A1	TEMPO ALG. A2
n	T_{A1}	T_{A2}
2n	$2T_{A1}$	$4T_{A2}$
3n	$3T_{A1}$	$9T_{A2}$
4n	$4T_{A1}$	$16T_{A2}$

Complexidade

Conclusão: ao se multiplicar o tamanho da entrada por **k**, o tempo de **A1** cresceu segundo **k** e o de **A2** segundo $\mathbf{k^2}$. Ou seja, a taxa de crescimento do tempo de execução de **A1** é proporcional a **n**, e a de **A2**, proporcional a $\mathbf{n^2}$.

Essa taxa de crescimento proporcional é chamada ***complexidade*** do algoritmo. Ela permite uma classificação dos algoritmos segundo sua categoria de complexidade e permite também comparar qualitativamente algoritmos diferentes que realizam a mesma tarefa. Podendo ser considerada em termos de tempo de execução (**complexidade de tempo**) ou termos de espaço de memória utilizado (**complexidade de espaço**).

UNIVASF

Complexidade

Como já discutimos para o tempo de execução, pode-se ter complexidade de melhor, médio e pior caso. Em nosso estudo, a necessidade de espaço em memória será considerada constante e o termo *complexidade* designará *complexidade de tempo de pior caso.*

A expressão da complexidade de um algoritmo busca refletir suas condições intrínsecas, abstraindo aspectos ligados aos ambientes específicos de execução. Assim, não são consideradas constantes de soma ou multiplicação. Uma expressão como **k·n + c**, onde **k** e **c** são constantes, deve ser simplificada para **n**.

Complexidade

Outra condição que se assume é de que estamos considerando o comportamento assintótico do algoritmo, ou seja: a complexidade expressa uma *tendência a um limite* à medida que cresce o tamanho do problema. Supõe-se que a quantidade de dados a ser processada é suficientemente grande para essa tendência se evidenciar.

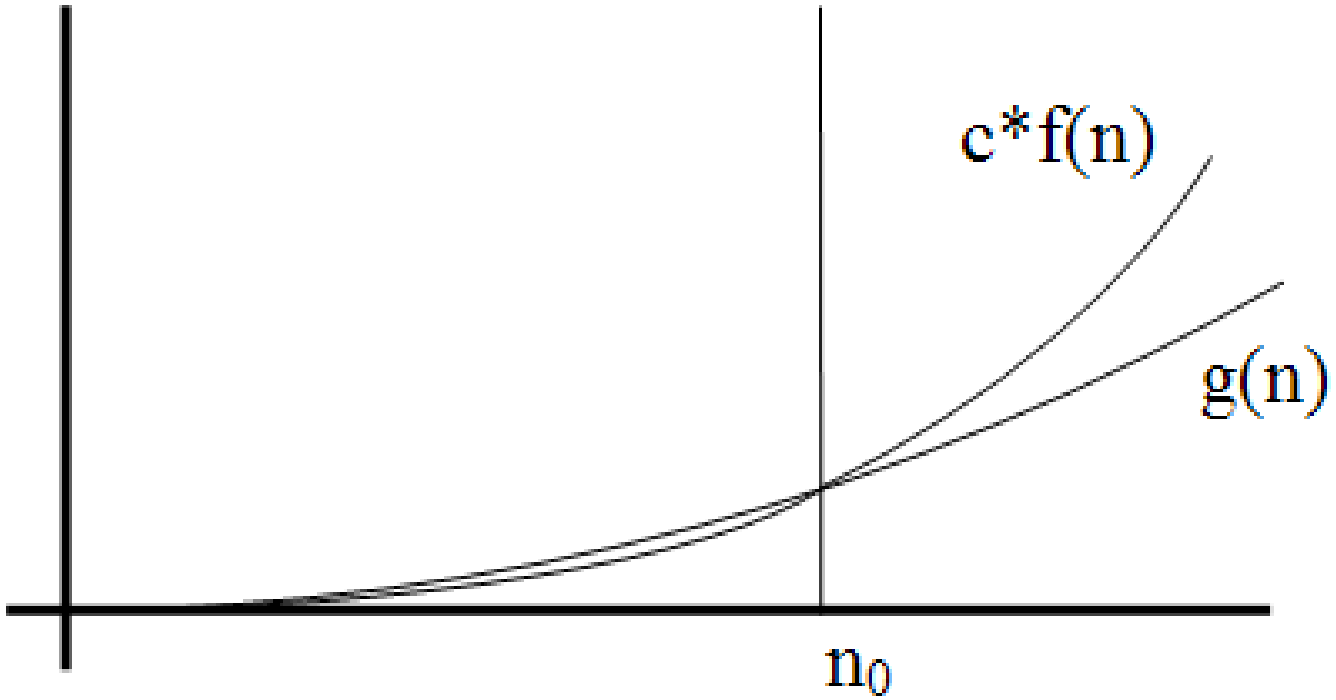
Isto leva a outra simplificação: ao se ter uma expressão polinomial **P(n)**, como os termos de menor grau podem ser desprezados (quando **n** é grande) diante do termo de maior grau, este é que será adotado como aproximação. Por exemplo: $\mathbf{an^3 + bn^2 - cn + d}$, onde **a**, **b**, **c** e **d** são constantes, será reduzido a $\mathbf{n^3}$.

Cabe aqui ressaltar a importância dessa análise. Apressadamente poder-se-ia supor que, com a incrível melhoria em desempenho dos equipamentos recentes frente aos de algum tempo atrás, e mesmo com a expectativa de ainda melhores *performances* no futuro, seria desnecessária uma preocupação com a qualidades de uma solução em termos de eficiência. No entanto, o que se observa é um crescimento também acelerado na dificuldade dos problemas submetidos ao computador, além de um aumento significativo na quantidade de dados (tamanho de entradas). Ou seja: as máquinas melhoram mas os problemas *pioram*, e até numericamente pode-se verificar que uma solução de baixa qualidade torna-se economicamente *imune* ao aumento da capacidade de processamento das máquinas. Por fim, certamente há um limite para o aumento de desempenho das máquinas. Então, a escolha da melhor solução se tornará crítica.

A notação O

Diz-se que uma função **g(n)** é **O(f(n))**, notando-se **g = O(f(n))** se existir alguma constante c > 0 e um inteiro n_0, tal que

n > n_0 implica **g(n) <= c* f(n).**



A notação O

Diz-se também que **g(n)** tem *taxa de crescimento proporcional a f(n)*, é de *ordem máxima f(n)*, de *magnitude f(n)*, de *complexidade f(n)* ou simplesmente que é **O** *de f(n)*.

Isto é interpretado como uma constatação de que **f** expressa um limite superior para valores assintóticos de **g**. Ou que **O**(*f(n)*) tem como valor uma quantidade não conhecida explicitamente, sabendo-se que não excede c**f*(*n*), se n for suficientemente grande ($n>n_0$). Este n_0 é então o ponto a partir do qual *g(n)* é seguramente menor que (ou é ultrapassada por) *f(n)*.

A notação O

Exemplo:

se *f(n)*= $n^2 + 1$, então *g(n)*=**O**(n^2);

também: *f(n)*=n^3+5n^2-3 é **O**(n^3);

f(n)=517 é **O**(1);

f(n)=$k2^n$ é **O**(2^n).

É bom ressaltar que *f(n)*=n^2+1 também é **O**(n^3) e **O**(n^4)... pois estas expressões satisfazem a relação estabelecida.*

Ao se tomar o tempo de execução T(n) de um algoritmo com uma função **g**, na implicação acima, pode-se naturalmente considerar sobre sua magnitude, ou sua complexidade **f**.

A notação O

No trabalho com estruturas de dados as complexidades costumeiras, em ordem crescente, são as seguintes:

- **O**(1) ou constante;
- **O**(log n) ou logaritímica;
- **O**(n) ou linear;
- **O**(n log n) ou n log de n;
- **O**(n^2) ou quadrática;
- **O**(n^3) ou cúbica.

Embora não se apresente aqui um método formal para determinação da magnitude de uma função, um conjunto de regras práticas pode ajudar. As considerações anteriores sobre simplificações da expressão da taxa de crescimento do tempo de

A notação O

execução valem para a determinação de **O**(f(n)) de algoritmos, pois atendem à propriedade descrita. **Por exemplo:**

a. regra da complexidade *polinomial*:

se P(n) é um polinômio de grau k, então P(n) = ***O****(n^k)***.**

Isto é certo, pois para valores grandes de *n,* os termos adicionais do polinômio podem ser desprezados, e se terá constantes *c* e n_0 tais que, para todo $n > n_0$, $P(n) <= c*n^k$. Além disso, é certo que:

b. *f(n) =* ***O****(f(n));*

A notação O

c. regra da constante:

O(c*f(n)) = c* **O**(f(n)) = **O**(f(n));

d. **O**(f(n)) + **O**(f(n)) = **O**(f(n));

e. regra da soma de **tempos**:

se $T_1(n) = \mathbf{O}(f(n))$ e $T_2(n) = \mathbf{O}(g(n))$ então $T_1(n) + T_2(n) = \mathbf{O}(\max(f(n),g(n)))$

Isto significa que a complexidade de um algoritmo com dois trechos em sequência com tempos de execução diferentes é dada como a complexidade do trecho de maior complexidade.

A notação O

f. regra do produto de **tempos**:

se $T_1(n) = \mathbf{O}(f(n))$ e $T_2(n) = \mathbf{O}(g(n))$ então

$T_1(n) * T_2(n) = \mathbf{O}(f(n) * g(n))$

Isto significa que a complexidade de um algoritmo com dois trechos aninhados, em que o segundo é repetidamente executado pelo primeiro, é dada como o produto da complexidade do trecho mais interno pela complexidade do trecho mais externo.

UNIVASF

Complexidade de algumas estruturas de controle

Regras rígidas sobre o cálculo da complexidade de qualquer algoritmo não existem, cada caso deve ser estudado em suas condições.

No entanto, as estruturas de controle clássicas da programação estruturada permitem uma estimativa típica de cada uma.

A partir disso, algoritmos construídos com combinações delas podem ter sua complexidade mais facilmente estabelecida.

UNIVASF

a. **comando simples –** tem um tempo de execução constante, **O**(c) = **O**(1).

b. **sequência –** tem um tempo igual à soma dos tempos de cada comando da sequência; se cada comando é **O**(1), assim, também será a sequência; senão, pela regra da soma, a sequência terá a complexidade do comando de maior complexidade.

c. **alternativa –** qualquer um dos ramos pode ter complexidade arbitrária; a complexidade resultante é a maior delas; isto vale para alternativa dupla (*if-else*) ou múltipla (*switch*).

UNIVASF

d. repetições

i. *repetição contada*: é aquela em que cada iteração (ou "volta") atualiza o controle mediante uma *adição* (geralmente, quando se usa uma estrutura do tipo *for*, que especifica incremento/decremento automático de uma variável inteira).

Se o número de iterações é independente do tamanho do problema, a complexidade de toda a repetição é a complexidade do corpo da mesma, pela regra da constante (ou pela regra da soma de tempos).

```
for (i=0; i<k ; i++)          // se k não é f(n) então
    trecho com O(g(n))        // o trecho é O(g(n))
```

```
for (i=0; i<10 ; i++) // isto é O(1), logo toda
{                     // a repetição é O(1)
        x = x+v;
        printf ("%d", x);
}
```

Se o número de iterações é função de **n**, pela regra do produto teremos a complexidade da repetição como a complexidade do corpo multiplicada pela função que descreve o número de iterações. Isto é:

```
for (i=0; i<n ; i++)  // como o número de iterações é f(n)=n
   trecho com O(g(n))  // então o trecho é O(n*g(n))
```

Exemplo:

```
for (i=0; i<k*n ; i++)       // o trecho é O(f(n)*g(n)), no caso
    trecho com O(log n) // O(k*n*log n), ou seja: O(n log n)
```

Uma aplicação comum da regra do produto é a determinação da complexidade de repetições aninhadas.

Exemplo:

```
for (i=0; i<n ; i++)        // o trecho é O(f(n)*g(n)), no caso
   for (j=0; j<n ; j++)     // g(n)=n*1 (laço interno); logo,
      trecho com O(1)       // O(n*n), ou seja: O(n²)
```

Exemplo:

```
for (i=1; i<=n ; i++)       // o laço interno é executado 1+2+3
   for (j=1; j<=i ; j++)    // +...n-1 +n=n*(n+1)/2 vezes, logo,
      trecho com O(1)       // O(n*(n+1)/2), ou seja:
                            // O(0.5(n²+n)) ou seja O(n²)
```

Exemplo:

```
for (i=1; i<=n ; i++)// o laço interno é executado n+n-1
    for (j=n; i<=j ; j--) // +n-2+...+2+1=n*(n+1)/2 vezes, ou
        trecho com O(1)  // seja: O(n²) como no caso anterior
```

Os dois últimos exemplos podem ser generalizados para quaisquer aninhamentos de repetições contadas em *k* níveis, desde que todos os índices dependam do tamanho do problema. Nesse caso, a complexidade da estrutura aninhada será da ordem de n^k.

Exemplo:

```
for (IndExt=1; IndExt<=n ; IndExt++) // o laço mediano é
  for (IndMed=IndExt; IndMed<=n ; IndMed++) // executado
    for (IndInt=1; IndInt<=IndMed; IndInt++) // n+n-1+n-2+...
      trecho com O(1) // +2+1=(n²+n)/2 vezes; o laço mais
       // interno será executado no máximo n vezes; logo,
       // tem-se O((n²+n)*n), ou seja: O(n³)
```

ii. *repetição multiplicativa:* é aquela em que cada iteração atualiza o controle mediante uma *multiplicação* ou *divisão*.

Exemplo:

```
limite=1;          // o número de iterações depende
while (limite<=n) //  de n; limite vai dobrando a cada
{    // iteração; depois de k iterações, limite = 2^k e
   trecho com O(1) // k = log2 limite; como o valor
   limite = limite*2; // máximo de  limite é n, então
}    // o trecho é O(log2n) = O(log n)
```

OBS: Na verdade **O**(log n) independe da base do logaritmo, pois $\log_a n = \log_a b * \log_b n = c * \log_b n$.

Exemplo:

```
int limite;
for (limite=n; limite!=0; limite /=2)
    trecho com O(1)
```

/* o número de iterações depende de n; limite vai-se subdividindo a cada iteração; depois de $k=\log_2 n$ iterações, encerra; então o trecho é O(log n)*/

Os dois exemplos anteriores também podem ser generalizados, adotando-se um fator genérico de multiplicação *fator*. Nesse caso, o número de iterações será dado por $k = \log_{fator} limite$ = **O**(log f(n)), se o limite é função de n.

Exemplo:

```
int limite=n;
while (limite!=0)
{
    for (i=1; i<=n; i++)
        trecho com O(1)
    limite = limite/2;
}
```

/* o número de iterações depende de n; limite vai-se subdividindo a cada iteração; o laço interno é O(n), o externo O (log n); logo, o trecho é O (n log n)*/

e. Chamada de Procedimento

Pode ser resolvida considerando-se que o procedimento também tem um algoritmo com sua própria complexidade. Esta é usada como base para cálculo da complexidade do algoritmo invocador.

Por exemplo: se a invocação estiver num ramo de uma alternativa, sua complexidade será usada na determinação da máxima complexidade entre os dois ramos; se estiver no interior de um laço, será considerada no cálculo da complexidade da sequência repetida, etc.

A questão se complica ao se tratar de uma chamada recursiva.

Embora não haja um método único para esta avaliação, em geral a complexidade de um algoritmo recursivo será função de componentes como: a *complexidade da base* e do *núcleo* da solução e a *profundidade da recursão.* Por este termo entende-se o *número de vezes que o procedimento é invocado recursivamente.* Este número, usualmente, depende do *tamanho do problema* e da *taxa de redução do tamanho do problema* a cada invocação. E é na sua determinação que reside a dificuldade da análise de algoritmos recursivos.

Como exemplo, considere o algoritmo para o cálculo do fatorial.

```
int fatorial (int n)
{
   if (n==0)
      return 1;                    // Base
   else
      return n*fatorial(n-1);    //Núcleo
}
```

A redução do problema se faz de uma em uma unidade, a cada reinvocação do procedimento, a partir de *n,* até alcançar *n = 0.* Logo, a profundidade da recursão é igual a *n*. O núcleo da solução (que é repetido a cada reinvocação) tem complexidade **O**(1), pois se resume a uma multiplicação. A base tem complexidade **O**(1), pois envolve apenas uma atribuição simples. Nesse caso, conclui-se que o algoritmo tem um tempo *T(n) = n*1+1* = **O**(n).

f. Desvio Incondicional

A discussão anterior subentendeu que os algoritmos sejam construídos com as estruturas da programação disciplinada. O uso indiscriminado de desvios incondicionais há de incrementar a dificuldade do cálculo da complexidade. No entanto o **go to** não causará problemas em casos de uso restrito:

- quando for usado como desvio para a frente, associado a uma condição de parada, apenas para sair de um laço de repetição, diretamente para o comando subsequente ao corpo da repetição;

nesse caso, o tempo do pior caso não é afetado, pois se assume que o pior caso é quando tal desvio nunca é executado e a repetição ocorre um número máximo de vezes;

- quando for um desvio para trás, estabelecendo uma repetição adequadamente estruturada (ou seja: desde que os laços estejam separados ou completamente aninhados); nesse caso, a análise pode ser feita sobre a estrutura de repetição resultante.

UNIVASF

Comparação Quantitativa

Pode-se ter uma idéia do que alguns autores chamam de "tirania da taxa de crescimento" observando-se o comportamento de diversos algoritmos de complexidade diferente, todos dedicados à solução do mesmo problema, sob as mesmas condições de processamento.

Nos valores a seguir, assume-se que uma operação elementar é executável em um décimo de microssegundo *(0,1 * 10^{-6}s).*

UNIVASF

FUNÇÃO DE COMPLEXIDADE	n (tamanho do problema)		
	20	40	60
n	0.0002 s	0.0004 s	0.0006 s
$n \log_2 n$	0.0009 s	0.0021 s	0.0035 s
n^2	0.0040 s	0.0160 s	0.0360 s
n^3	0.0800 s	0.6400 s	2.1600 s
2^n	10.0000 s	27 dias	3660 séculos
3^n	580 minutos	38550 séculos	$1.3*10^{14}$ séculos

É digna de nota a taxa de crescimento dos algoritmos de ordem exponencial. Em geral, seu desempenho torna-se de custo proibitivo, devendo ser usados apenas quando não se conheça solução de menor complexidade.

Complementarmente, pode-se considerar o efeito do *aumento da capacidade de processamento* sobre

o *tamanho do maior problema solucionável em um certo tempo*. A tabela a seguir apresenta resultados para os mesmos algoritmos, executados na máquina original e em máquinas 100 e 1000 vezes mais rápidas, tomando-se como básico o tamanho do problema solucionável em 1 hora de processamento.

FUNÇÃO DE COMPLEXIDADE	Tamanho da maior instância solucionável em 1 hora		
	máquina original	máquina 100 vezes mais rápida	máquina 1.000 vezes mais rápidas
n	N	100 N	1.000 N
$n \log_2 n$	N1	22.5 N1	140.2 N1
n^2	N2	10 N2	31.6 N2
n^3	N3	4.6 N3	10 N3
2^n	N4	N4 + 6	N4 +10
3^n	N5	N5 + 4	N5 + 6

Como já se citou anteriormente, algoritmos de alta complexidade têm um ganho pouco significativo em função da capacidade da máquina.

Os algoritmos exponenciais, principalmente, são quase imunes: no exemplo da tabela, o algoritmo com $O(2^n)$ tem um ganho de apenas *10 unidades* no tamanho do problema solucionável com uma máquina *1000 vezes* mais rápidas!

Na prática, são consideradas aceitáveis complexidades no máximo polinomiais na ordem de n^2.

Exercício: O algoritmo a seguir calcula o valor do somatório de um determinado número de termos da série:

$$0, -\frac{1}{4!}, +\frac{1}{6!}, -\frac{2}{8!}, +\frac{3}{10!}, -\frac{5}{12!}, \ldots$$

Sendo que o número de termos a serem somados é fornecido pelo usuário.

```
algoritmo "Exemplo"
var
   ind, i, fat, fib, aux, n: inteiro
   s: real
inicio
   s <- 0
   escreva ("Entre com o número de
     termos a serem somadas: ")
   leia (n)
   para ind de 1 ate n faca
      fat <- 1
      para i de 2 ate ind*2 faca
         fat <- fat * I
      fimpara
      i <- ind
      fib <- 0
      aux <- 1
      enquanto (i>1) faca
         aux <- fib + aux
         fib <- aux - fib
         i <- i - 1
      fimenquanto
      s <- s + -1^(ind+1) * fib / fat
   fimpara
   escreval ("O valor do somatório
     é: ", s)
fimalgoritmo
```