

Cálculo Numérico

Interpolação Polinomial Parte I

Prof. Jorge Cavalcanti – jorge.cavalcanti@univasf.edu.br

MATERIAL ADAPTADO DOS SLIDES DA DISCIPLINA CÁLCULO
NUMÉRICO DA UFCG - www.dsc.ufcg.edu.br/~cnum/

Interpolação Polinomial

- A necessidade de obter um valor intermediário que não consta de uma tabela ocorre comumente.
- Dados experimentais, tabelas estatísticas e de funções complexas são exemplos desta situação.
- **Solução:** uso de métodos numéricos - **Interpolação.**

Interpolação Polinomial

- Dado um conjunto de dados $\{x_i, f(x_i)\}$ tal como na tabela abaixo:

| | | | | | |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x_i | 0 | 1,5 | 3,0 | 4,5 | 6,0 |
| $f(x_i)$ | 0,001 | 0,016 | 0,028 | 0,046 | 0,057 |

- Como obter o valor de $f(x)$ para um valor de x que não tenha sido medido, como por exemplo, $x=2.0$?
- Quando se deseja saber o valor de $f(x)$ para um x intermediário entre duas medidas, isto é, $x_i < x < x_{i+1}$, pode-se usar as técnicas da interpolação.

Interpolação Polinomial

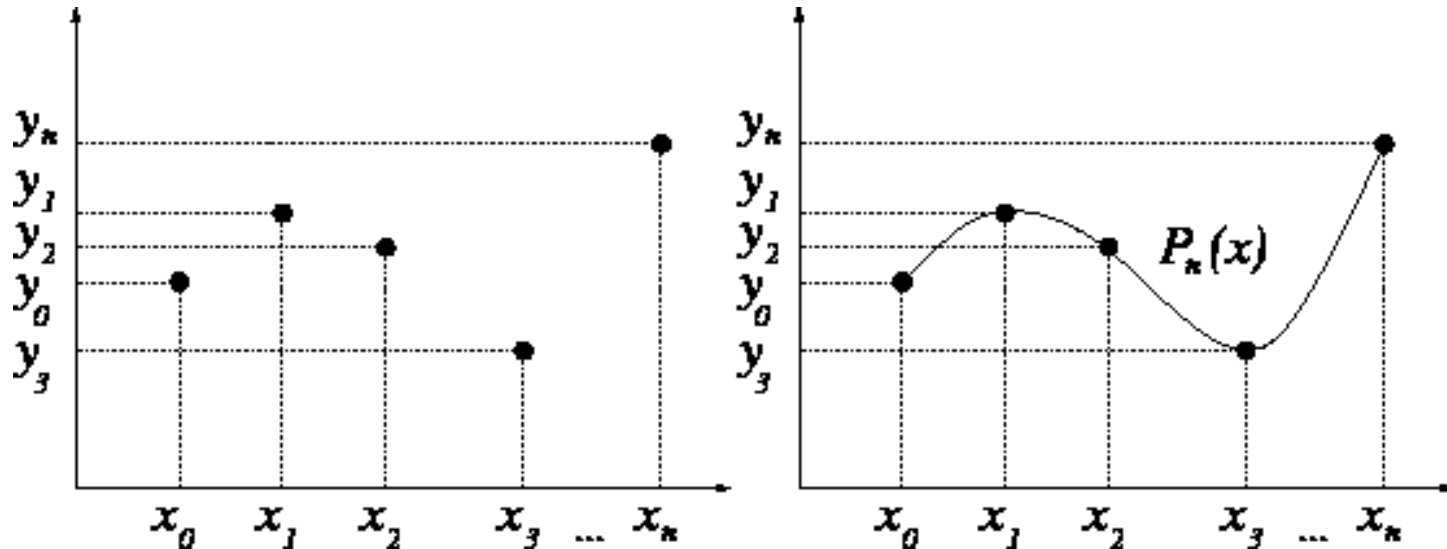
- A interpolação consiste em determinar uma função, que assume valores conhecidos em certos pontos (***nós de interpolação***).
- A classe de funções escolhida para a interpolação é, *a priori*, arbitrária, e deve ser adequada às características que pretendemos que a função possua.
- Função a ser considerada:
 - **Polinômios \Rightarrow Interpolação Polinomial**

Interpolação Polinomial

- Métodos de interpolação polinomial são utilizados para aproximar uma função $f(\mathbf{x})$, principalmente nas seguintes situações:
 - conhece-se apenas valores de $f(\mathbf{x})$ em apenas pontos discretos x_0, x_1, x_2, \dots
 - $f(\mathbf{x})$ é extremamente complicada e de difícil manejo,
 - $f(\mathbf{x})$ não é conhecida explicitamente.

Interpolação Polinomial

- O problema geral da interpolação por meio de polinômios consiste em:



- **Interpolar** um ponto x a um conjunto de $n+1$ dados $\{x_i, f(x_i)\}$, significa calcular o valor de $f(x)$, sem conhecer a forma analítica de $f(x)$ ou ajustar uma função analítica aos dados.

Interpolação Polinomial

- **Interpolação polinomial** consiste em se obter um polinômio $p(x)$ que passe por **todos os pontos** do conjunto de $(n+1)$ dados $\{x_i, f(x_i)\}$, isto é:

$$p(x_0) = f(x_0)$$

$$p(x_1) = f(x_1)$$

...

$$p(x_n) = f(x_n)$$

Obs: contagem começa em zero, portanto tem-se $n+1$ pontos na expressão.

Interpolação Polinomial

- Polinômio $p(x)$ - **polinômio interpolador**.
 - Pode-se demonstrar que existe um único polinômio $p(x)$ de grau menor ou igual a n que passa por todos os $(n+1)$ pontos do conjunto $\{x_j, f(x_j)\}$.

- Portanto, pode-se escrever:

$$p_n(x_0) = a_0 + a_1 \cdot x_0 + a_2 \cdot x_0^2 + \dots + a_n \cdot x_0^n = f(x_0)$$

$$p_n(x_1) = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_1^2 + \dots + a_n \cdot x_1^n = f(x_1)$$

■■■

$$p_n(x_n) = a_0 + a_1 \cdot x_n + a_2 \cdot x_n^2 + \dots + a_n \cdot x_n^n = f(x_n)$$

- O conjunto de equações corresponde a um sistema linear de $n+1$ equações e $n+1$ variáveis.

Obtenção do Polinômio $P_n(x)$

■ Interpolação linear

- O polinômio que interpola $f(x)$ em x_0, x_1, \dots, x_n é único.
- Existem diversas formas de se obter o polinômio. Uma delas é resolvendo o sistema linear obtido anteriormente $P_n(x_n) = f(x_n)$.
- Teoricamente, todas as formas conduzem ao mesmo polinômio. A escolha depende da estabilidade do sistema, do tempo computacional etc.

Obtenção do Polinômio $P_n(x)$

■ Interpolação linear

- Ex. 01- Encontrar o polinômio que interpola os pontos da tabela abaixo:

| | | | |
|------|----|---|----|
| x | -1 | 0 | 2 |
| f(x) | 4 | 1 | -1 |

1. Grau do polinômio – como se conhecem os valores da função em três pontos ($n+1$, $n=2$), pode-se usar um polinômio de 2º Grau.

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

2. Construção do sistema linear:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = f(x_1) \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 = f(x_2) \end{cases}$$

Obtenção do Polinômio $P_n(x)$

■ Interpolação linear

| | | | |
|------|----|---|----|
| x | -1 | 0 | 2 |
| f(x) | 4 | 1 | -1 |

3. Substituindo os valores da tabela dada:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = f(x_1) \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = f(x_2) \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 = 4 \\ a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 = 1 \\ a_0 + a_1(2) + a_2(2)^2 = -1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 - a_1 + a_2 = 4 \\ a_0 = 1 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = -1 \end{array} \right. \longrightarrow \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_1 = -7/3 \\ a_2 = 2/3 \end{array}$$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Obtenção do Polinômio $P_n(x)$

■ Interpolação linear

4. Então:

$$p(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$$

É o polinômio que interpola $f(x)$ em $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$

- A determinação dos coeficientes do polinômio interpolador por meio da resolução de um sistema de equações lineares, apesar de ser conceitualmente simples, requer um certo esforço computacional.
- Não podemos esperar que essa seja a forma para qualquer sistema.
- Deve-se procurar metodologia alternativa ao modo da solução de sistemas de equações lineares.
- Outras formas:
 - a **forma de Lagrange**
 - a forma de Newton

Obtenção do Polinômio $P_n(x)$

- Ex. 02 – Seja a seguinte tabela de valores da função $f(x)=e^x$. Encontre uma aproximação para o ponto $x=1,32$.

| | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| x | 1,3 | 1,4 | 1,5 |
| e^x | 3,669 | 4,055 | 4,482 |

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$$

$$a_0+a_1x_0+a_2x_0^2=f(x_0)$$

$$a_0+a_1x_1+a_2x_1^2=f(x_1)$$

$$a_0+a_1x_2+a_2x_2^2=f(x_2)$$

Interpolação Polinomial

■ Forma de Lagrange

- Seja um conjunto de $n+1$ dados $\{x_i, f(x_i)\}$. Encontrar um polinômio interpolador $p(x)$, de grau n que passe por todos os pontos distintos $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.
 - A Forma de Lagrange representa o polinômio interpolador diretamente, a partir dos pontos originais.
- Seja um polinômio de grau n , dado pela forma genérica:

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^n L_i(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}_i)$$

$$p(x) = L_0(x) \cdot f(x_0) + L_1(x) \cdot f(x_1) + \dots + L_n(x) \cdot f(x_n)$$

- Onde:

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \dots (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdot (x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

Interpolação Polinomial

■ Forma de Lagrange

- Para ilustrar e facilitar a compreensão do método, considere a seguinte tabela:

| | | | | |
|--------|-------|-------|-------|-------|
| x | x_0 | x_1 | x_2 | x_3 |
| $f(x)$ | y_0 | y_1 | y_2 | y_3 |

- Os polinômios L_i são dados por:

$$L_0(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_3)}{(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_3)}$$

$$L_1(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_3)}{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3)}$$

$$L_2(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_3)}{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3)}$$

$$L_3(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)}{(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2)}$$

Obtenção do Polinômio $P_n(x)$

■ Forma de Lagrange

- Ex. Encontrar o polinômio que interpola os pontos da tabela abaixo:

| | | | |
|------|----|---|----|
| x | -1 | 0 | 2 |
| f(x) | 4 | 1 | -1 |

$$P_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 2)}{(-1 - 0)(-1 - 2)} = \frac{x^2 - 2x}{3}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x + 1)(x - 2)}{(0 - (-1))(0 - 2)} = \frac{x^2 - x - 2}{-2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x + 1)(x - 0)}{(2 + 1)(2 - 0)} = \frac{x^2 + x}{6}$$

Obtenção do Polinômio $P_n(x)$

■ Forma de Lagrange

- Continuação Exemplo.

| | | | |
|------|----|---|----|
| x | -1 | 0 | 2 |
| f(x) | 4 | 1 | -1 |

$$P_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$$

$$P_2(x) = 4\left(\frac{x^2 - 2x}{3}\right) + 1\left(\frac{x^2 - x - 2}{-2}\right) + (-1)\left(\frac{x^2 + x}{6}\right)$$

$$P_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$$

Obtenção do Polinômio $P_n(x)$

■ Forma de Lagrange

- Ex2. Encontrar o polinômio que interpola os pontos da tabela abaixo:

| | | | |
|------|----|---|----|
| x | -1 | 0 | 3 |
| f(x) | 15 | 8 | -1 |

$$P_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$$

Interpolação Polinomial

■ Forma de Newton

- A Forma de Newton usa o *Operador Diferenças Divididas*, na definição do seu polinômio interpolador.

■ Operador Diferenças Divididas

- Seja $f(x)$ uma função tabelada em $n+1$ pontos distintos: X_0, X_1, \dots, X_n .
- O Operador Diferenças Divididas é definido por:

$$f[x_0] = f(x_0) \rightarrow \text{Ordem Zero}$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \rightarrow \text{Ordem 1}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \rightarrow \text{Ordem 2}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} \rightarrow \text{Ordem 3}$$

Interpolação Polinomial

■ Forma de Newton

- A fórmula do polinômio interpolador de Newton com diferenças divididas é:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\ + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots \\ + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

- Em que os coeficientes correspondem aos seus respectivos operadores.

$$f[x_0] = a_0$$

$$f[x_0, x_1] = a_1$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = a_2$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = a_n$$

Interpolação Polinomial

■ Forma de Newton

□ Operador Diferenças Divididas

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \rightarrow \text{Ordem } n$$

- Podemos tabelar de forma conveniente as diferenças divididas, para facilitar seu cálculo e recuperação.

| x | Ordem 0 | Ordem 1 | Ordem 2 | Ordem 3 |
|----------------------|-------------------------|--|---|--|
| x₀ | f[x₀] | | | |
| x₁ | f[x₁] | f[x₀, x₁] | f[x₀, x₁, x₂] | f[x₀, x₁, x₂, x₃] |
| x₂ | f[x₂] | f[x₁, x₂] | f[x₁, x₂, x₃] | |
| x₃ | f[x₃] | f[x₂, x₃] | | |

■ Forma de Newton

□ Operador Diferenças Divididas

- Ex. Determine a tabela dos operadores de diferenças para os dados abaixo:

| | | | |
|------|----|---|----|
| x | -1 | 0 | 2 |
| f(x) | 4 | 1 | -1 |

$$f[x_0] = f(x_0) \rightarrow f(-1) = 4$$

$$f[x_1] = f(x_1) \rightarrow f(0) = 1$$

$$f[x_2] = f(x_2) \rightarrow f(2) = -1$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{1 - 4}{0 - (-1)} = -3$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - 1}{2 - 0} = -1$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{-1 - (-3)}{2 - (-1)} = \frac{2}{3}$$

| X | Ord 0 | Ord 1 | Ord 2 |
|-------|-------|-------|-------|
| x_0 | 4 | | |
| x_1 | 1 | -3 | |
| x_2 | -1 | -1 | 2/3 |

Interpolação Polinomial

■ Forma de Newton

□ A Forma de Newton geral para o polinômio interpolador, considerando os operadores de diferenças divididas é dada por:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

$$\begin{aligned} f[x_0] &= a_0 \\ f[x_0, x_1] &= a_1 \\ f[x_0, x_1, x_2] &= a_2 \\ f[x_0, x_1, \dots, x_n] &= a_n \end{aligned}$$

| x | <u>Ord 0</u> | <u>Ord 1</u> | <u>Ord 2</u> |
|-------|--------------|--------------|--------------|
| x_0 | 4 | | |
| x_1 | 1 | -3 | |
| x_2 | -1 | -1 | 2/3 |

□ Para $n=2$:

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$P_2(x) = 4 + (x + 1)(-3) + (x + 1)(x - 0)(2/3)$$

$$P_2(x) = 2/3x^2 - 7/3x + 1$$

Obtenção do Polinômio $P_n(x)$

■ Exercícios

- Seja a seguinte tabela de valores da função $f(x)=e^x$, a partir da qual se deseja obter a aproximação para o ponto $x=1,32$.

| | | | |
|------|-------|-------|-------|
| x | 1,3 | 1,4 | 1,5 |
| f(x) | 3,669 | 4,055 | 4,482 |

- Encontre o polinômio interpolador nas formas linear, Lagrange e Newton e encontre a respectiva aproximação do ponto x dado.