Cálculo Numérico

Resolução Numérica de Equações – Métodos – Parte II

Prof. Jorge Cavalcanti – jorge.cavalcanti@univasf.edu.br

MATERIAL ADAPTADO DOS SLIDES DA DISCIPLINA CÁLCULO NUMÉRICO DA UFCG - *www.dsc.ufcg.edu.br/~cnum/*

Cálculo Numérico – **Bissecção**

- Métodos Iterativos para a Obtenção de Zeros Reais de Funções
  - *Bissecção*
  - *Falsa Posição*
  - *Ponto Fixo*
  - *Newton-Raphson*
  - *Secante*

Cálculo Numérico – **Bissecção**

- Método da *Bissecção*

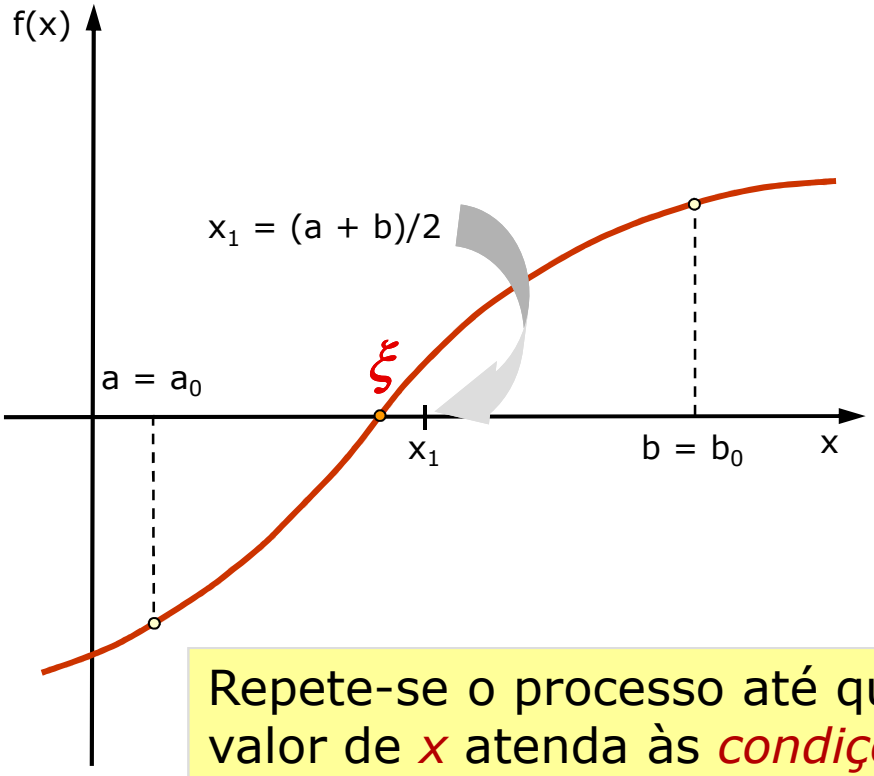
  Dada uma função f(x) contínua no intervalo [a,b] onde existe uma raiz única, é possível determinar tal raiz subdividindo sucessivas vezes o intervalo que a contém pelo ponto médio de a e b.

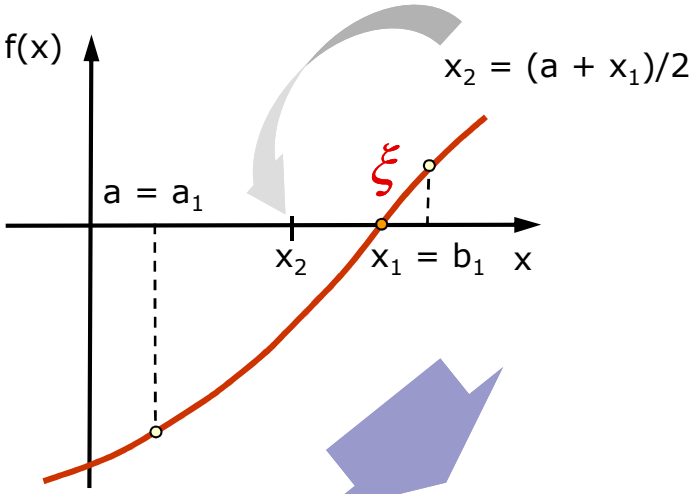
Cálculo Numérico – **Bissecção**

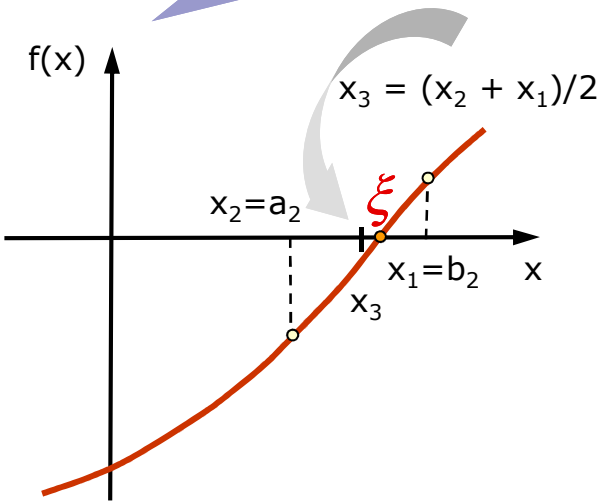
- Definição do Intervalo Inicial
  - Atribui-se *[a,b]* como *intervalo inicial*
    - $a_0 = a$
    - $b_0 = b$
  - Condições de Aplicação
    - $f(a)*f(b) < 0$
    - Sinal da derivada *constante*

Cálculo Numérico – **Bissecção**

- **Análise Gráfica**







Repete-se o processo até que o valor de *x* atenda às *condições de parada*.

Cálculo Numérico – **Bissecção**

- **Definição de Novos Intervalos**
  - Determina-se qual o subintervalo – $[a\ ,\ x_1]$ ou $[x_1\ ,\ b]$ – que contém a *raiz*
    - Calcula-se o produto $f(a)*f(x_1)$
    - Verifica-se se $f(a)*f(x_1) < 0$
      - Se *verdadeiro* ⇨ $\xi \in (a,\ x_1)$
        (Logo a = a e b = x_1)
      - *Caso contrario* ⇨ $\xi \in (x_1\ ,\ b)$
        (Logo a = x_1 e b = b)
  - Repete-se o processo até que o valor de x atenda às *condições de parada*.

Cálculo Numérico – **Bissecção**

- ***Tolerância*** **(** ε **)**
  - Aproximação de zero, dependente do equipamento utilizado e da precisão necessária para a solução do problema

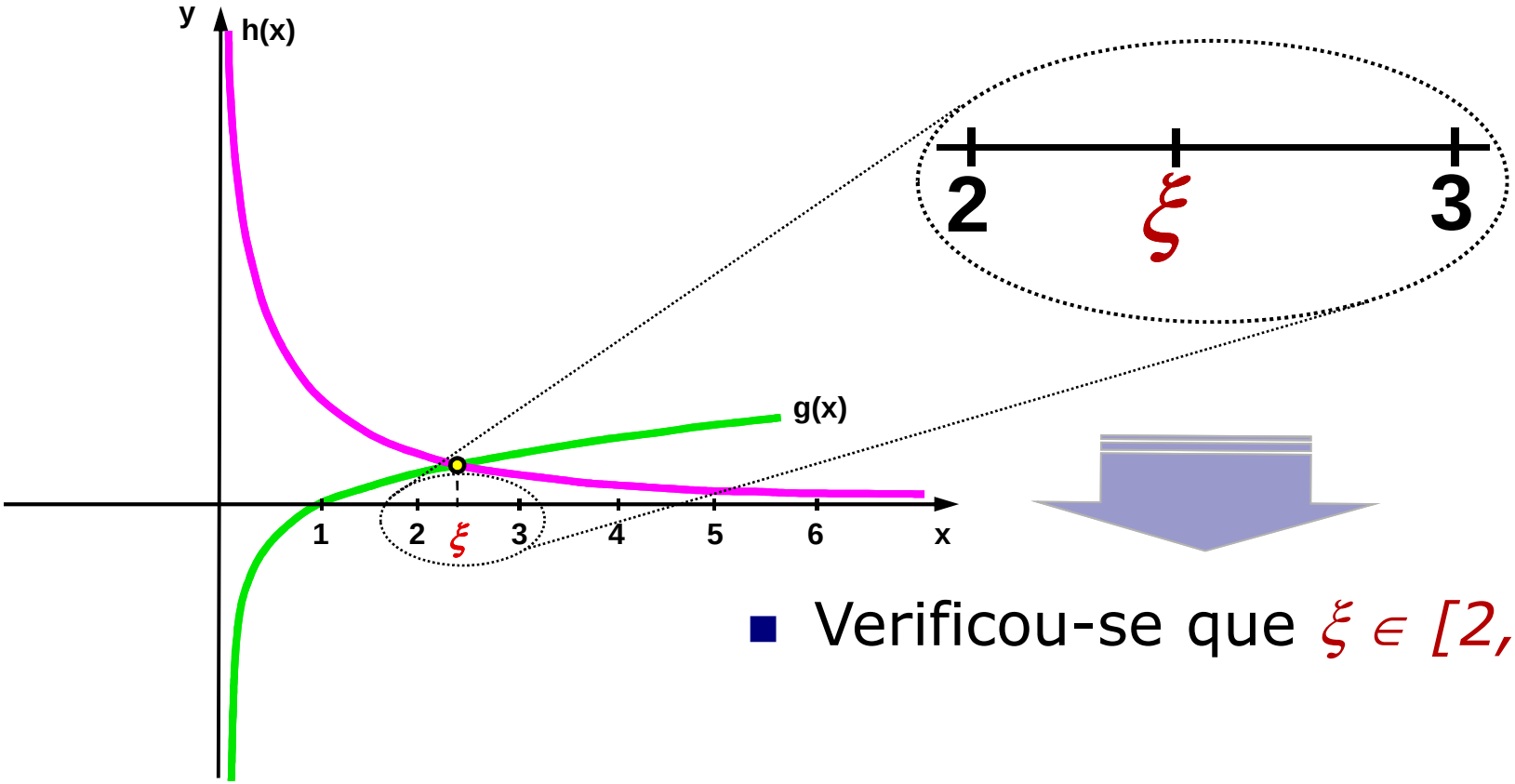
A *tolerância* é uma estimativa para o *erro absoluto* desta aproximação.

Cálculo Numérico – **Bissecção**

- **Condições de Parada**
  - Se os valores fossem *exatos*
    - $f(x) = 0$
    - $(x_k - x_{k+1})/x_k = 0$
  - Uma vez que são *aproximados*
    - $|f(x)| \leq$ *tolerância*
    - $|(x_k - x_{k+1})/x_k| \leq$ *tolerância*

Cálculo Numérico – **Bissecção**

Exemplo 06: Resgatando o Exemplo 05,
f(x) = xlogx - 1



- Verificou-se que $\xi \in [2, 3]$

Cálculo Numérico – **Bissecção**

Exemplo 06: *f(x) = xlogx - 1*

Considerando o *método da bissecção com tol = 0,002* e adotando $[a_0, b_0] = [2, 3]$ como *intervalo inicial*, tem-se:

- **Cálculo da 1ª aproximação**
  - $x_1 = (a_0 + b_0)/2 = (2{,}00000 + 3{,}00000)/2 \Rightarrow$
    $x_1 = 2{,}50000$
  - $f(x_1) = f(2{,}50000) = -0{,}00510$
  - $f(a_0) = f(2{,}00000) = -0{,}39794$
  - **Teste de Parada**
    - $|f(x_1)| = |-0{,}00510| = 0{,}00510 > 0{,}002$

Cálculo Numérico – **Bissecção**

Exemplo 06: *f(x) = xlogx - 1*

- **Cálculo da 2ª aproximação**
  - **Novo Intervalo**
    - **$f(a_0).f(x_1) = (-0{,}39794).(-0{,}00510) > 0$**

      logo: $a_1 = x_1 = 2{,}50000$ e $b_1 = b_0 = 3{,}00000$
  - $x_2 = (2{,}50000 + 3{,}00000)/2 =$
    $x_2 = 2{,}75000$
    - $f(2{,}50000) = -0{,}05100 < 0$
    - $f(3{,}00000) = 0{,}43140 > 0$
    - $f(2{,}75000) = 0{,}20820 > 0$
    - $\xi \in [2{,}5 ; 2{,}75]$

      $a_2 = a_1 = 2{,}50000$ e $b_2 = x_2 = 2{,}75000$

Cálculo Numérico – **Bissecção**

Exemplo 06:

- $x_3 = (2{,}50000 + 2{,}75000)/2 = 2{,}62500$
  - $f(2{,}50000) = -0{,}05100 < 0$
  - $f(2{,}75000) = 0{,}20820 > 0$
  - $f(2{,}62500) = 0{,}10020 > 0$

  - $\xi \in [2{,}5\ ,\ 2{,}625]$
    $a_3 = a_2 = 2{,}50000$
    $b_3 = x_3 = 2{,}62500$

- $x_4 = (2{,}50000 + 2{,}62500)/2 = 2{,}56250$
  - $f(2{,}50000) = -0{,}05100 < 0$
  - $f(2{,}62500) = 0{,}10020 > 0$
  - $f(2{,}56250) = 0{,}04720 > 0$
  - ⋮

  - $\xi \in [2{,}5\ ,\ 2{,}5625]$
    $a_3 = a_2 = 2{,}50000$
    $b_3 = x_4 = 2{,}56250$
    ⋮

Cálculo Numérico – **Bissecção**

Exemplo 06: *f(x) = xlogx - 1*

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$
0	2,00000	3,00000	-0,39794	0,43136	2,50000	-0,00510
1	2,50000	3,00000	-0,00515	0,43136	2,75000	0,20820
2	2,50000	2,75000	-0,00515	0,20816	2,62500	0,10021
3	2,50000	2,62500	-0,00515	0,10021	2,56250	0,04720
4	2,50000	2,56250	-0,00515	0,04720	2,53125	0,02090
5	2,50000	2,53125	-0,00515	0,02094	2,51563	0,00790
6	2,50000	2,51563	-0,00515	0,00787	*2,50781*	*0,00140*

$f(x_7) \leq \varepsilon = \mathbf{0{,}002}$

Cálculo Numérico – **Bissecção**

Algoritmo

$k := 0;\ a_0 := a;\ b_0 := b;\ x_0 := a;$
$x_{k+1} := (a_k + b_k)/2;$
while *critério de parada não satisfeito* *and* $k \leq L$
  if $f(a_k)f(x_{k+1}) < 0$ *then* /* *raiz em* $[a_k\ ,\ x_{k+1}]$ */
    $a_{k+1} := a_k;\ b_{k+1} := x_{k+1};$
  else /* *raiz em* $[x_{k+1},\ b_k]$ */
    $a_{k+1} := x_{k+1};\ b_{k+1} := b_k\ ;$
  endif
  $k := k + 1;\ x_{k+1} := (a_k + b_k)/2;$
endwhile
if $k > L$
  parada falhou
endif

Cálculo Numérico – **Bissecção**

- **Generalização**
  - Após *n* iterações, a raiz estará contida no intervalo:

$$[b_k - a_k] = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\left[b_k - a_k\right] = \left(\frac{b_0 - a_0}{2^k}\right)$$

Cálculo Numérico – **Bissecção**

- **Estimativa do número de iterações**
  - Deve-se obter o valor de **K**, tal que **$b_k - a_k < \varepsilon$,** ou seja,

$$\frac{b_0 - a_0}{2^k} < \varepsilon \Rightarrow 2^k > \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}$$

$$k.\log(2) > \log(b_0 - a_0) - \log(\varepsilon)$$

$$k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log(\varepsilon)}{\log(2)}$$

Cálculo Numérico – **Bissecção**

- **Estimativa do número de iterações**
  - Ex.: Considerando um intervalo [2,3] e $\varepsilon=10^{-2}$, calcular o número mínimo de iterações para que tenhamos b-a< ε (Critério de Parada).

$$k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log(\varepsilon)}{\log(2)}$$

$$k > \frac{\log(3-2) - \log(10^{-2})}{\log(2)}$$

$$k > \frac{\log(1) + 2\log(10)}{\log(2)} = \frac{2}{0.3010} \approx 6.64$$

$$k = 7$$

Cálculo Numérico – **Bissecção**

Vantagens:

- Facilidade de implementação;
- Estabilidade e convergência para a solução procurada;
- Desempenho regular e previsível.

O número de interações é *dependente* da *tolerância* considerada

Cálculo Numérico – **Bissecção**

Desvantagens:

- Lentidão do processo de convergência (requer o cálculo de *f(x)* em um elevado número de iterações);
- Necessidade de conhecimento prévio da região na qual se encontra a raiz de interesse (o que nem sempre é possível);
- Complexidade da extensão do método para problemas multivariáveis.

Cálculo Numérico – **Bissecção**

Exemplo 07: Seja $f(x) = x^3 - x - 1$

Intervalo inicial atribuído: [1, 2]

Considerando-se ε = 0,002

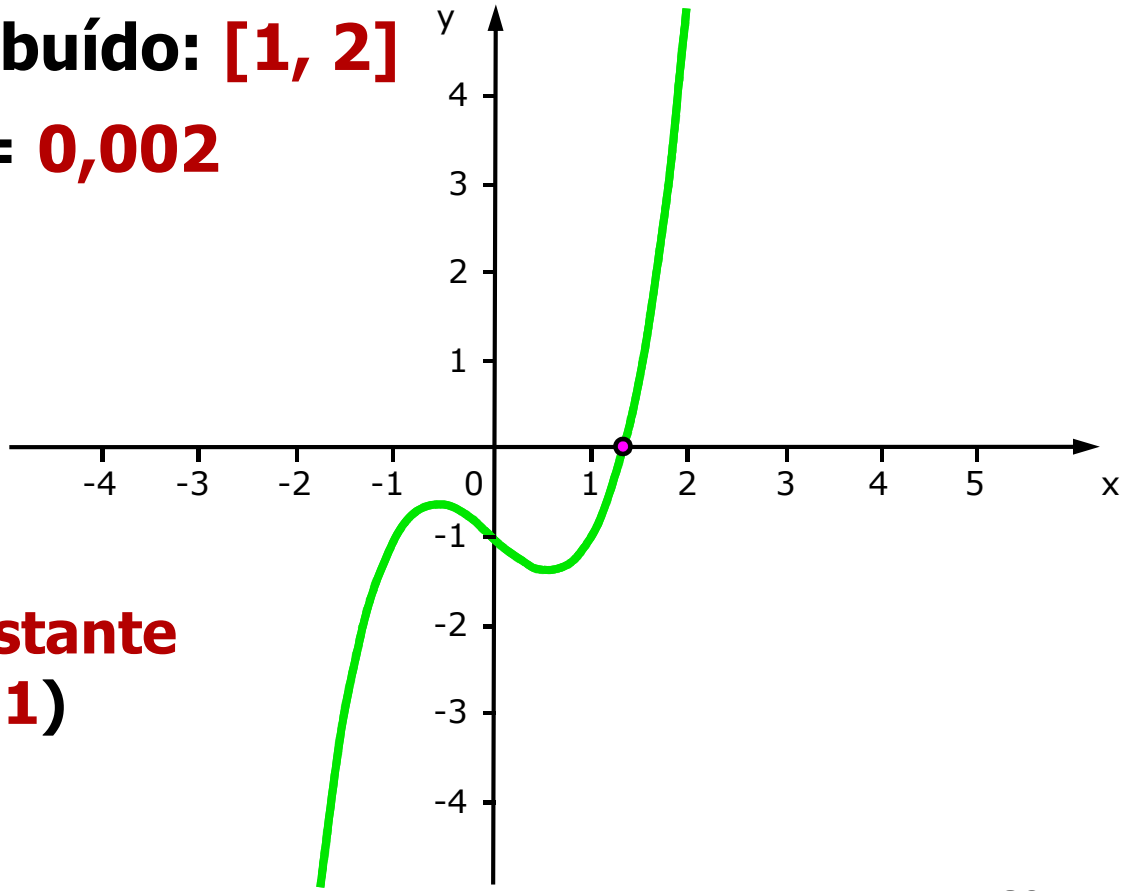
$f(a_0)$ = -1

$f(b_0)$ = 5

$f'(x) = 3x^2 - 1$

$f(a_0) * f(b_0) = -5 < 0$

Sinal da derivada constante
($f'(a_0) = 2$ e $f'(b_0) = 11$)



Cálculo Numérico – **Bissecção**

Exemplo 07: $f(x) = x^3 - x - 1$

- **Cálculo da 1ª aproximação**
  - $x_1 = (a_0+b_0)/2 = (1{,}000000+2{,}000000)/2 =$
    $x_1 = 1{,}500000$
  - $f(x_1) = 1{,}5^3 - 1{,}5 - 1 = 0{,}875000$
  - **Teste de Parada**
    - $|f(x_1)| = |0{,}875| = 0{,}875000 > 0{,}002$
  - **Escolha do Novo Intervalo**
    - $f(a_0).f(x_1) = (-1).0{,}875 = -0{,}875$

      logo: $a_1=a_0=1{,}000000$ e $b_1=x_1= 1{,}50000$

⋮

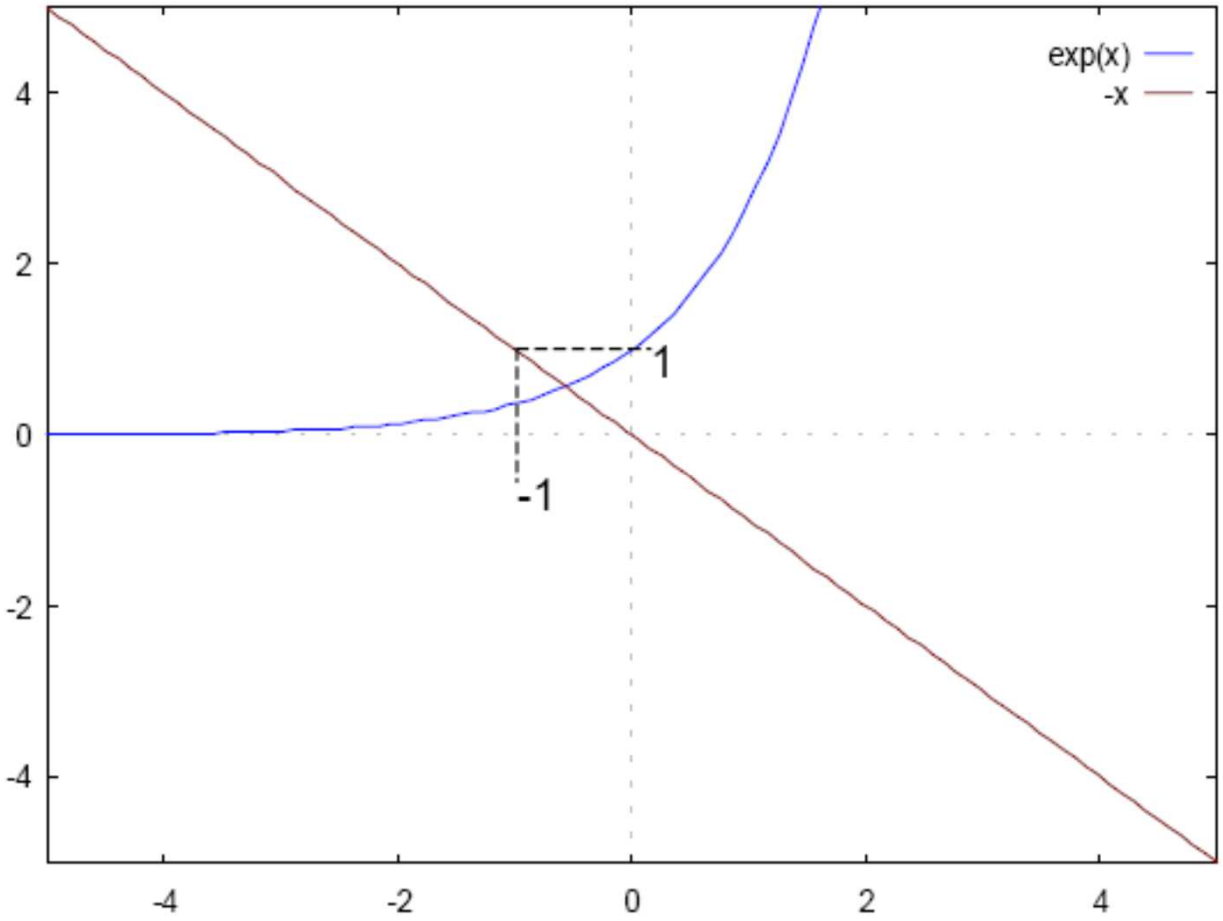
Cálculo Numérico – **Bissecção**

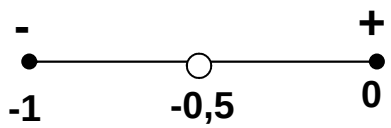
Exemplo 07: $f(x) = x^3 - x - 1$

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$
0	1,0000000	2,0000000	-1,000000	5,000000	1,50000000	0,875000
1	1,0000000	1,5000000	-1,000000	0,875000	1,25000000	-0,296875
2	1,2500000	1,5000000	-0,296875	0,875000	1,37500000	0,224609
3	1,2500000	1,3750000	-0,296875	0,224609	1,31250000	-0,051514
4	1,3125000	1,3750000	-0,051514	0,224609	1,34375000	0,082611
5	1,3125000	1,3437500	-0,051514	0,082611	1,32812500	0,014576
6	1,3125000	1,3281250	-0,051514	0,014576	1,32031250	-0,018711
7	1,3203125	1,3281250	-0,018700	0,014576	*1,32421875*	*-0,002128*

ε = ***0,002***

Exercício: Encontre uma estimativa para a raiz de $f(x) = e^x + x$, com $\varepsilon \leq 0{,}050$.



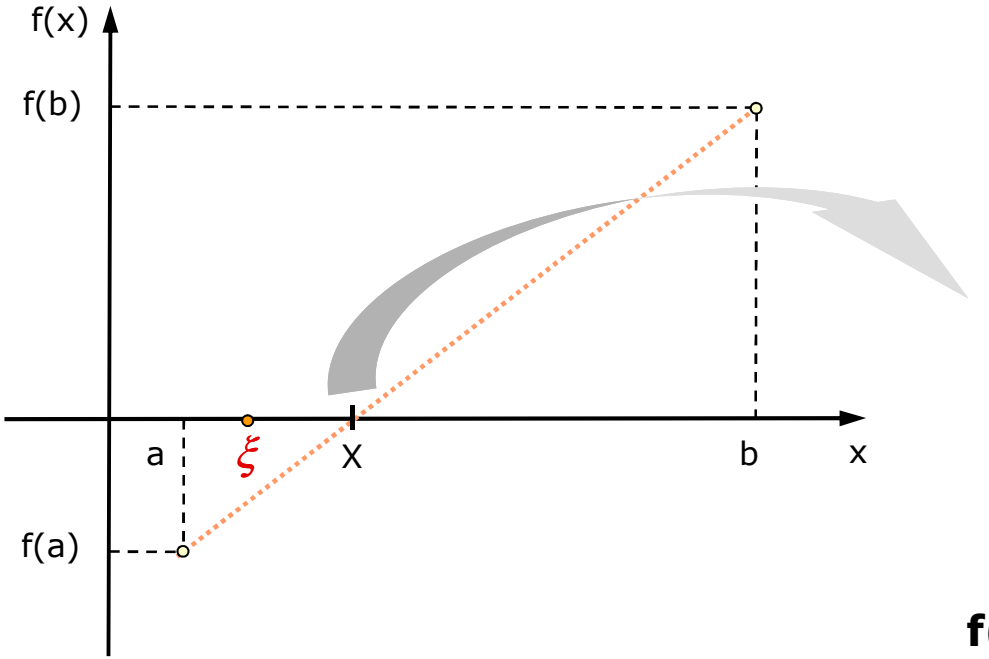


Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

- Método da *Bissecção*
  - Calcula a média aritmética dos limites do intervalo que contém a raiz ($[a, b]$)
- Método da *Falsa Posição*
  - Calcula a média ponderada dos limites do intervalo que contém a raiz ($[a, b]$)

Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

- Método da *Falsa Posição*
  - Calcula a média ponderada dos limites do intervalo que contém a raiz ([*a*, *b*])



$$X = \frac{a|f(b)| + b|f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|}$$

$$X = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

f(a) e f(b) têm sinais opostos

Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

- **Definição do Intervalo Inicial**
  - Atribui-se *[a,b]* como *intervalo inicial*
    - $a_0 = a$
    - $b_0 = b$
  - Condições de Aplicação
    - $f(a)*f(b) < 0$
    - Sinal da derivada *constante*

Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

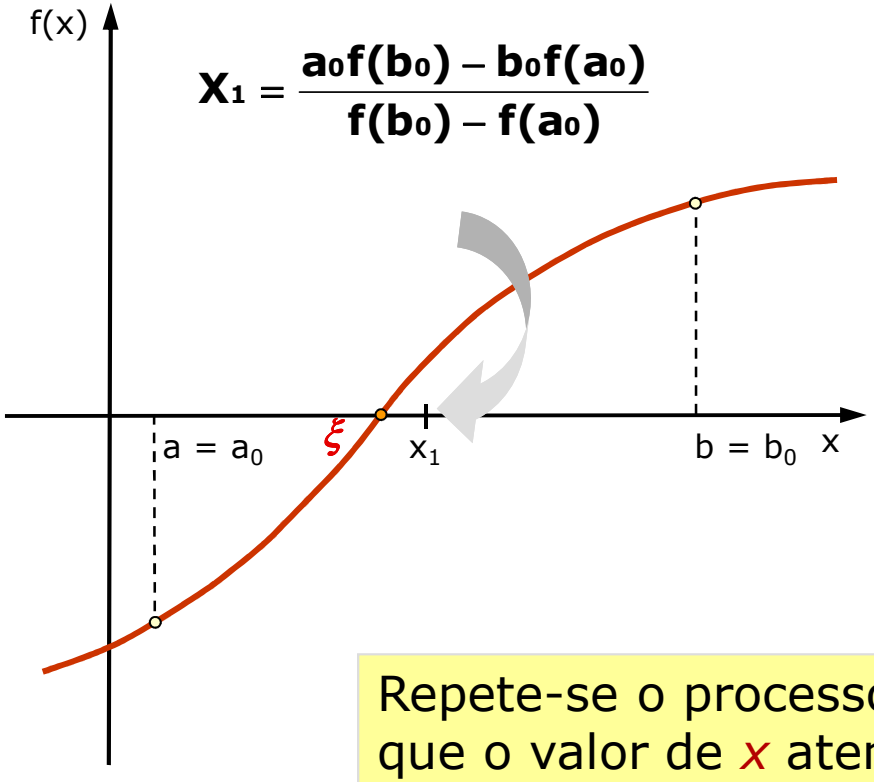
- **Definição dos Subintervalos**
  - Subdivide-se o intervalo pelo *ponto de intersecção* da reta que liga *f(a)* a *f(b)* e o eixo das abscissas
  - Verifica-se se, através do teste de parada, se x_1 é uma *aproximação da raiz* da equação (ξ)
    - Se *verdadeiro* ⇨ x_1 é a *raiz* procurada
    - Caso *contrário* ⇨ define-se um *novo* intervalo

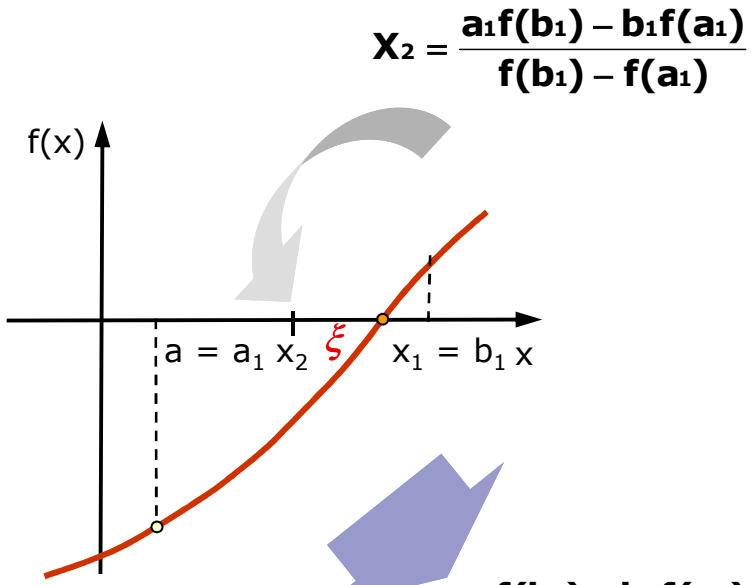
Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

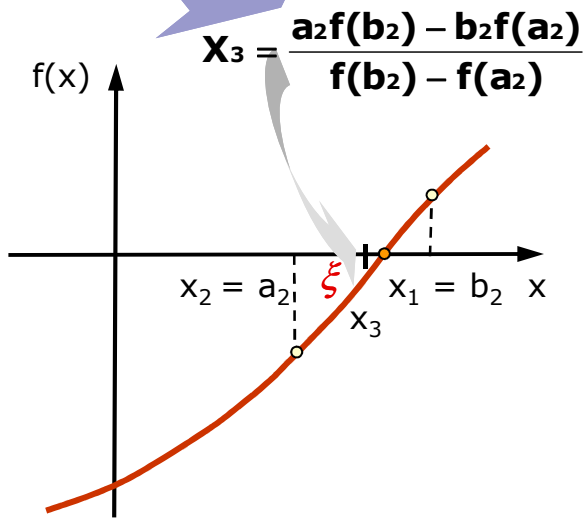
- **Definição do Novo Intervalo**
  - Determina-se qual subintervalo - $[a_0, x_1]$ ou $[x_1, b_0]$ - contém a raiz ξ
    - Calcula-se o produto $f(a)*f(x_1)$
    - Verifica-se se $f(a)*f(x_1) < 0$
      - Se *verdadeiro* ⇨ $\xi \in (a_0, x_1)$
        Logo: $a_1 = a_0$ e $b_1 = x_1$
      - Caso *contrario* ⇨ $\xi \in (x_1, b_0)$
        Logo $a_1 = x_1$ e $b_1 = b_0$
  - Repete-se o processo até que o valor de x atenda às *condições de parada*.

Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

- **Análise Gráfica**







Repete-se o processo até que o valor de *x* atenda às *condições de parada*.

Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

Algoritmo

$k := 0;\ a_0 := a;\ b_0 := b;\ x_0 := a;\ F_0 := f(a_0);\ G_0 := f(b_0);$

$x_{k+1} := a_k - F_k(b_k - a_k)/(G_k - F_k);$ ou $x_{k+1} := (a_kG_k - b_kF_k)/(G_k - F_k);$

while *critério de convergência não satisfeito* *and* $k \leq L$

  if $f(a_k)f(x_{k+1}) \leq 0$ *then* /* *raiz em* $[a_k, x_{k+1}]$ */

    $a_{k+1} := a_k;\ b_{k+1} := x_{k+1};$

  else /* *raiz em* $[x_{k+1}, b_k]$ */

    $a_{k+1} := x_{k+1};\ b_{k+1} := b_k;$

  endif

  $k := k + 1;\ x_{k+1} := a_k - F_k(b_k - a_k)/(G_k - F_k);$

endwhile

if $k > L$

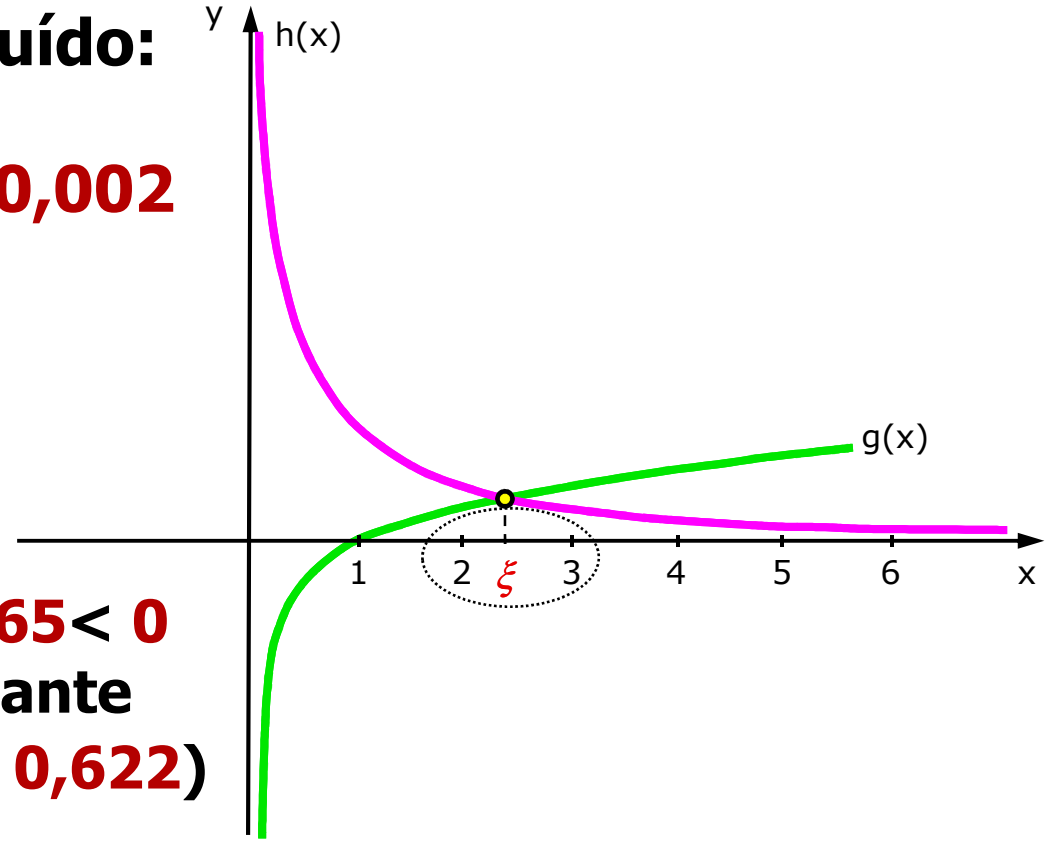
  convergência falhou

endif

Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

Exemplo 08: Considerando *f(x) = xlogx - 1*

Intervalo inicial atribuído:
[2, 3]
Considerando-se ε = 0,002
$f(a_0)$ = - 0,3979
$f(b_0)$ = 0,4314



f'(x) = logx + 1/xln10
$f(a_0) * f(b_0)$ = - 0,017165< 0
Sinal da derivada constante
($f'(a_0)$ = 0,52 e $f'(b_0)$ = 0,622)

Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

Exemplo 08:

- **Cálculo da 1ª aproximação: $a_0 = 2$ $b_0 = 3$**

  $f(a_0) = -0{,}3979 < 0$

  $f(b_0) = 0{,}4314 > 0$

  $$x_1 = \frac{[2.0{,}4314 - 3.(-0{,}3979)]}{[0{,}4314 - (-0{,}3979)]} = 2{,}4798$$

  - **Teste de Parada**
    - $|f(x_1)| = |-0{,}0219| = 0{,}0219 >$ **tolerância**
  - **Escolha do Novo Intervalo**
    - $f(a_0).f(x_1) = (-0{,}3979).(-0{,}0219) > 0$

      logo: $a_1 = x_1 = 2{,}4798$ **e** $b_1 = b_0 = 3$

Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

Exemplo 08:

- **Cálculo da 2ª aproximação: $a_1 = 2{,}4798$ $b_1 = 3$**

  $f(a_1) = -0{,}0219 < 0$

  $f(b_1) = 0{,}4314 > 0$

  $$x_2 = \frac{[2{,}4798.0{,}4314 - 3.(-0{,}0219)]}{[0{,}4314 - (-0{,}0219)]} = 2{,}5049$$

  - **Teste de Parada**
    - $|f(x_2)| = |-0{,}0011| = 0{,}0011 <$ **tolerância**
  - **Escolha do Novo Intervalo**
    - $f(a_1).f(x_2) = (-0{,}0219).(-0{,}0011) > 0$

      logo: $a_2 = x_2 = 2{,}5049$ e $b_2 = b_1 = 3$

Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

Exemplo 08:

- **Cálculo da 3ª aproximação a_2 = 2,5049 b_2 = 3**

  $f(a_2)$ = - 0,0011 < 0
  $f(b_2)$ = 0,4314 > 0

  $$x_3 = \frac{[2{,}5049 . 0{,}4314 - 3.(-0{,}0011)]}{[0{,}4314 - (-0{,}0011)]} = 2{,}5061$$

  - **Teste de Parada**
    - **$|f(x_3)| = |-7{,}0118.10^{-5}| = 7{,}0118.10^{-5} < tol$**

Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

Exemplo 08: *f(x) = xlogx - 1*

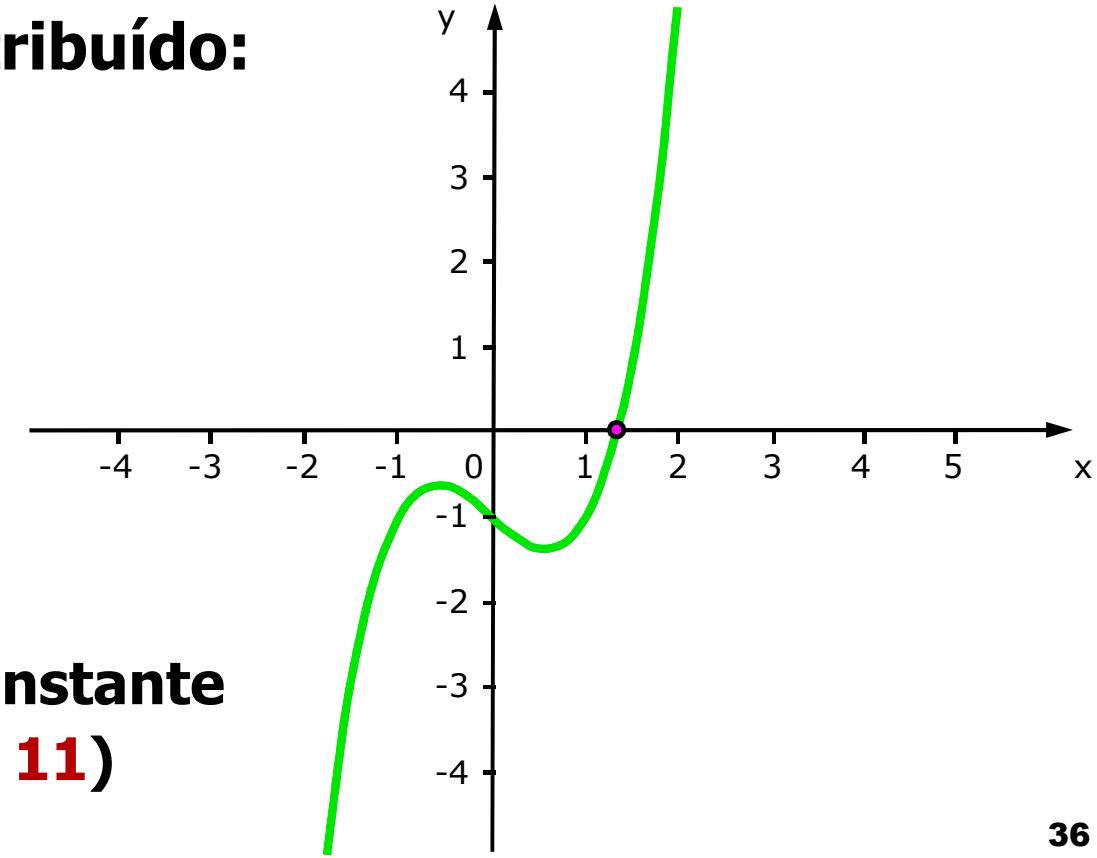
k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$
0	2,000000	3,000000	-0,3979000	0,431400	2,4798000	-0,021900
1	2,479800	3,000000	-0,0219000	0,431400	2,5049000	-0,001100
2	2,504900	3,000000	-0,0011000	0,431400	2,5061000	-0,000070

ε = ***0,002***

Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

Exemplo 09: Seja a função do Exemplo 07,
$f(x) = x^3 - x - 1$

Intervalo inicial atribuído:
[1, 2]
tol = 0,002
$f(a_0)$ = -1
$f(b_0)$ = 5



$f'(x) = 3x^2 - 1$
$f(a_0)*f(b_0) = -5 < 0$
Sinal da derivada constante
($f'(a_0) = 2$ e $f'(b_0) = 11$)

Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

Exemplo 09:

- **Cálculo da 1ª aproximação $a_0 = 1$ $b_0 = 2$**

  $f(a_0) = -1 < 0$

  $f(b_0) = 5 > 0$

  $$x_1 = \frac{[1.5 - 2.(-1)]}{[5 - (-1)]} = 1{,}16667$$

  - **Teste de Parada**
    - $|f(x_1)| = |-0{,}5787037| = 0{,}5787037 > tol$
  - **Escolha do Novo Intervalo**
    - $f(a_0).f(x_1) = (-1).(-0{,}5787037) > 0$

      logo: $a_1 = x_1 = 1{,}16667$ e $b_1 = b_0 = 2$

Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

Exemplo 09: $f(x) = x^3 - x - 1$

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$
0	1,000000	2,000000	-1,0000000	5,000000	1,1666667	-0,578704
1	1,166667	2,000000	-0,5787037	5,000000	1,2531120	-0,285363
2	1,253112	2,000000	-0,2853630	5,000000	1,2934374	-0,129542
3	1,293437	2,000000	-0,1295421	5,000000	1,3112812	-0,056588
4	1,311281	2,000000	-0,0565885	5,000000	1,3189885	-0,024304
5	1,318988	2,000000	-0,0243037	5,000000	1,3222827	-0,010362
6	1,322283	2,000000	-0,0103618	5,000000	1,3236843	-0,004404
7	1,323684	2,000000	-0,0044039	5,000000	1,3242795	-0,001869

ε = ***0,002***

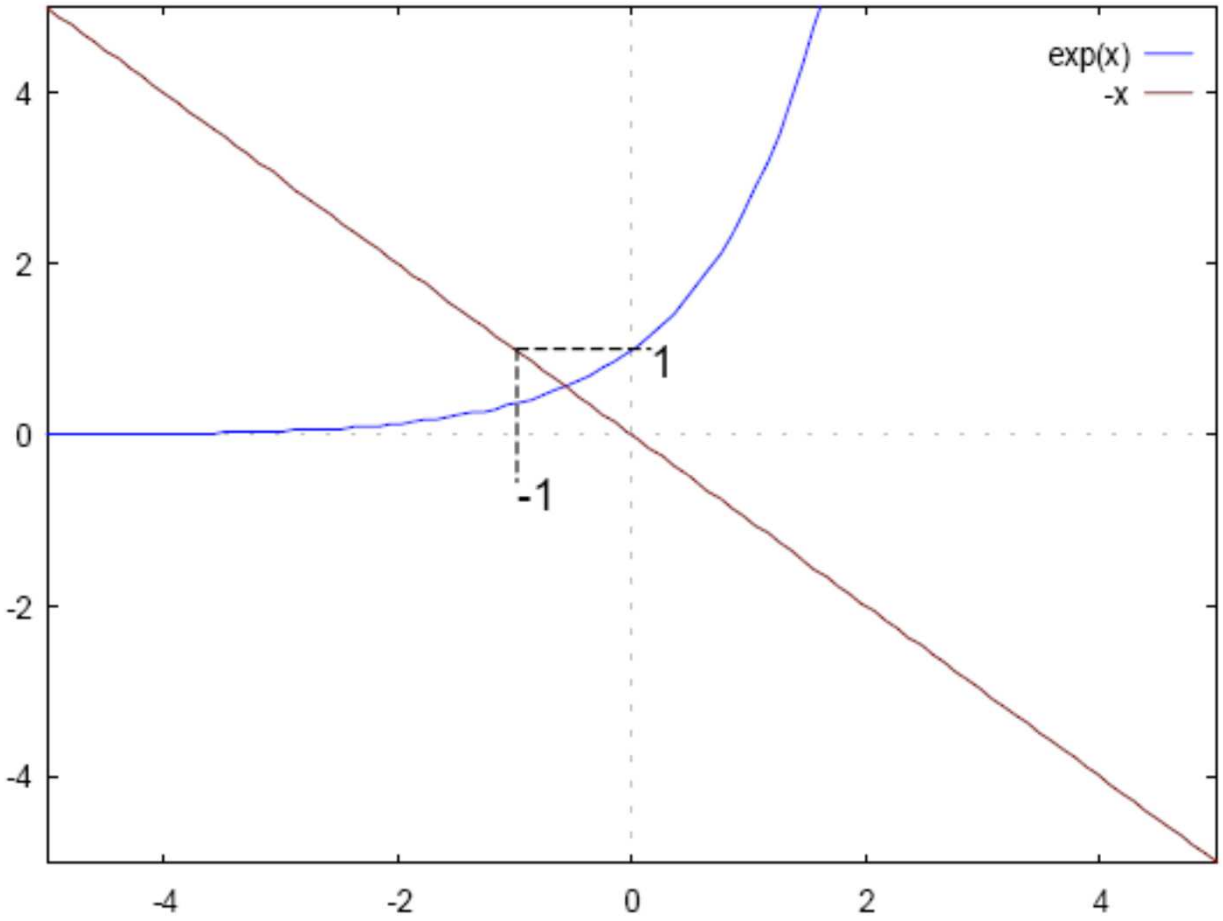
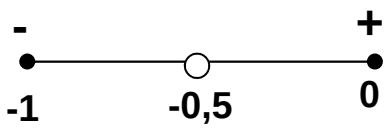
Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

Vantagens:

- Estabilidade e convergência para a solução procurada;
- Desempenho regular e previsível;
- Cálculos mais simples que o método de Newton.

Cálculo Numérico – **Falsa Posição**

Desvantagens:

- Lentidão do processo de convergência (requer o cálculo de *f(x)* em um elevado número de iterações);
- Necessidade de conhecimento prévio da região na qual se encontra a raiz de interesse (o que nem sempre é possível).

Exercício: Encontre uma estimativa para a raiz de $f(x) = e^x + x$, com $\varepsilon \leq 0{,}050$, usando o método da falsa posição.