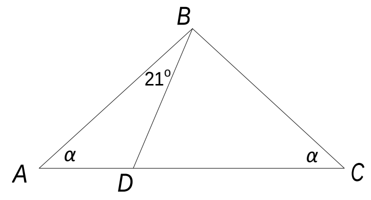
SOLUÇÕES

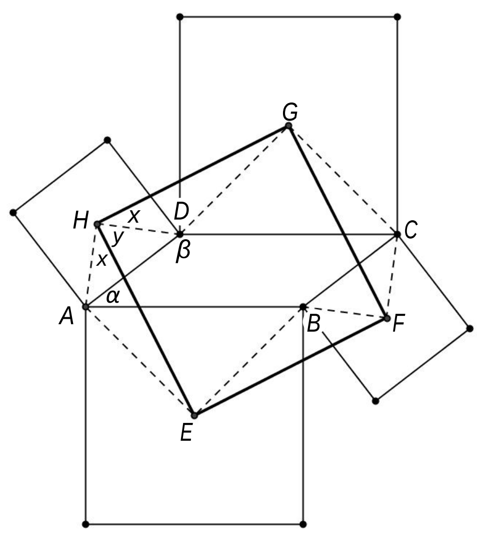
Questão 1. *(pontuação: 2)*
O ponto D pertence ao lado AC do triângulo ABC. Sabe-se que $AB = BC = CD$ e que o ângulo ABD mede 21^o. Determine a medida do ângulo ABC.



Uma solução:

Como $AB = BC$, seja $\alpha = \angle BAC = \angle BCA$. O ângulo BDC é externo do triângulo ABD. Então, $\angle BDC = 21^o + \alpha = \angle DBC$, pois $BC = CD$. No triângulo BDC temos $21^o + \alpha + 21^o + \alpha + \alpha = 180^o$, ou seja, $\alpha = 46^o$. O ângulo ABC mede $21^o + 21^o + \alpha = 42^o + 46^o = 88^o$.

Questão 2. *(pontuação: 2)*
Quadrados foram construídos sobre os lados de um paralelogramo como mostra a figura abaixo. Mostre que os centros desses quatro quadrados são vértices de outro quadrado.



Uma solução:

No paralelogramo $ABCD$ os quadrados construídos sobre os lados AB, BC, CD e DA têm centros E, F, G e H, respectivamente.

Os triângulos AEB, BFC, CGD e DHA são retângulos e isósceles. O primeiro e o terceiro são congruentes e o segundo e o quarto são também congruentes.

Sejam $\angle BAD = \alpha$ e $\angle ADC = \beta$ dois ângulos internos vizinhos do paralelogramo. Sabemos que $\alpha + \beta = 180^o$.

Observemos que $\angle HAE = 45^o + \alpha + 45^o = 90^o + \alpha$ e que $\angle HDG = 360^o - 45^o - 45^o - \beta = 270^o - (180^o - \alpha) = 90^o + \alpha = \angle HAE$.

Reunindo as informações anteriores concluímos que os triângulos HAE, HDG, FCG e FBE são todos congruentes e, portanto, $EH = HG = GF = FE$ e o quadrilátero $EFGH$ possui os quatro lados iguais.

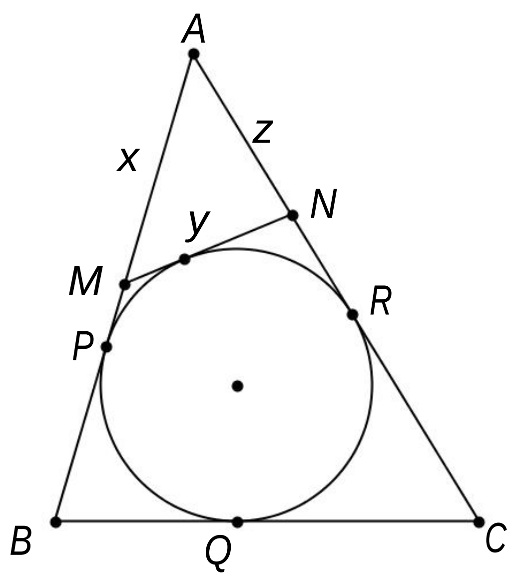
Da congruência dos triângulos HAE e HDG temos $\angle AHE = \angle DHG = x$ e seja $\angle EHD = y$. Por um lado, $\angle AHE + \angle EHD = x + y = 90^o$, pois o ângulo AHD é reto.

Por outro lado, $\angle EHG = \angle DHG + \angle EHD = x + y = 90^o$.

Assim, o quadrilátero $EFGH$ possui os quatro lados iguais e um ângulo reto. Logo, é um quadrado.

Questão 3. *(pontuação: 2)*
No triângulo ABC de lados $AB = 8$, $BC = 7$ e $AC = 9$, os pontos M e N dos lados AB e AC, respectivamente, são tais que o segmento MN é tangente à circunferência inscrita no triângulo ABC. Mostre que o perímetro do triângulo AMN é constante e calcule seu valor.

Uma solução:



Sejam $AM = x$, $MN = y$ e $NA = z$ os lados do triângulo AMN. Temos $MB = 8 - x$ e $CN = 9 - z$. Como o quadrilátero $BCNM$ é circunscritível temos, pelo teorema de Pitot (Unidade 7, Teorema 4), $BC + MN = MB + NC$

ou seja, $7+y = 8-x+9-z$. Logo $x+y+z = 10$. Portanto o perímetro do triângulo AMN é igual a 10, independente da posição do segmento MN.

Outra solução:

A circunferência inscrita em ABC é uma circunferência exiscrita ao triângulo AMN. Sabemos que o semiperímetro do triângulo AMN é o segmento AP que é constante, ou seja, não depende da posição do segmento MN (Unidade 7, Proposição 22). Fazendo $AP = AR = a$, $BP = BQ = b$ e $CQ = CR = c$, temos as equações:

$$\begin{cases} a+b=8 \\ b+c=7 \\ c+a=9 \end{cases}$$

Resolvendo, encontramos $a = 5$ que é o semiperímetro do triângulo AMN. Logo, o perímetro de AMN é 10.

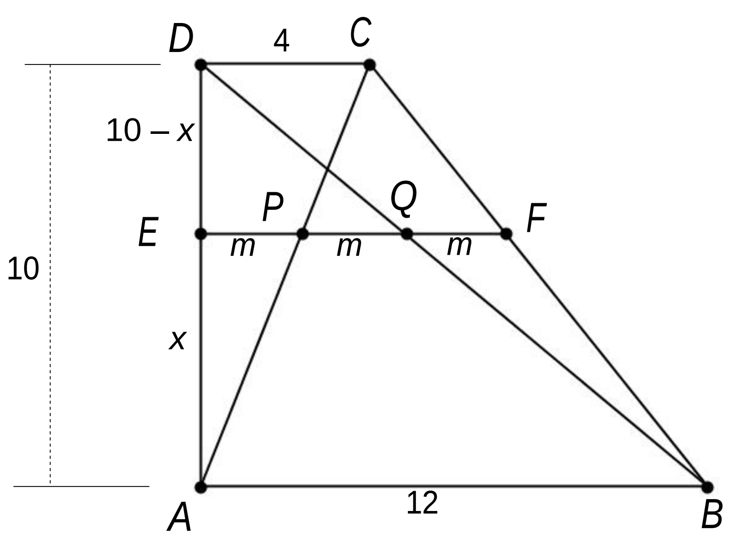
Questão 4. *(pontuação: 2)*

No trapézio $ABCD$ os ângulos A e D são retos, $AB = 12$, $CD = 4$ e $AD = 10$. O ponto E pertence ao lado AD e o ponto F pertence ao lado BC. Sabe-se que as retas EF e AB são paralelas e que o segmento EF fica dividido em três partes iguais pelas diagonais do trapézio. Calcule a distância entre as retas AB e EF.

Uma solução:

O problema tem duas soluções pois há duas possibilidades: quando EF está abaixo do encontro das diagonais do trapézio e quando EF está acima do encontro das diagonais do trapézio. Qualquer uma das soluções está igualmente correta.

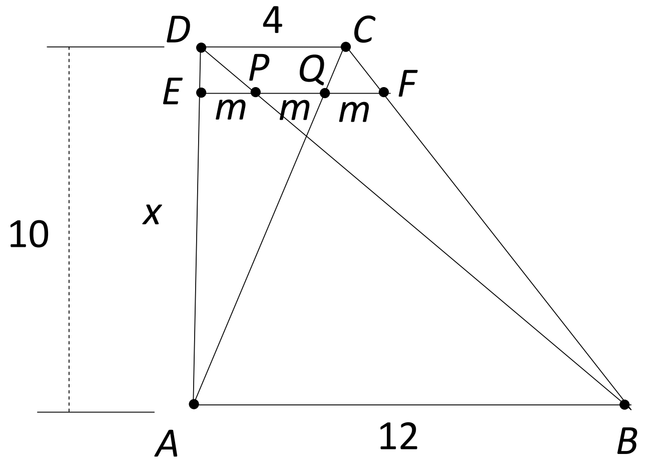
Primeira situação:



Na figura acima, seja $AE = x$. Então, $ED = 10 - x$. Como as diagonais dividem EF em três partes iguais sejam $EP = PQ = QF = m$. Da semelhança dos triângulos AEP e ADC temos: $\frac{m}{4} = \frac{x}{10} \Rightarrow m = \frac{2x}{5}$. Da semelhança dos triângulos DEQ e DAB temos: $\frac{2m}{12} = \frac{10-x}{10} \Rightarrow m = \frac{3(10-x)}{5}$.

Igualando temos $2x = 3(10 - x)$, o que dá $x = 6$.

Segunda situação:



Na figura acima, seja $AE = x$. Então, $ED = 10 - x$. Como as diagonais dividem EF em três partes iguais sejam $EP = PQ = QF = m$. Da semelhança dos triângulos QEA e CDA temos: $\frac{2m}{x} = \frac{4}{10} \Rightarrow m = \frac{x}{5}$. Da semelhança dos triângulos DEP e DAB temos: $\frac{10-x}{m} = \frac{10}{12} \Rightarrow m = \frac{12(10-x)}{10}$.

Igualando obtemos $x = \frac{60}{7}$.

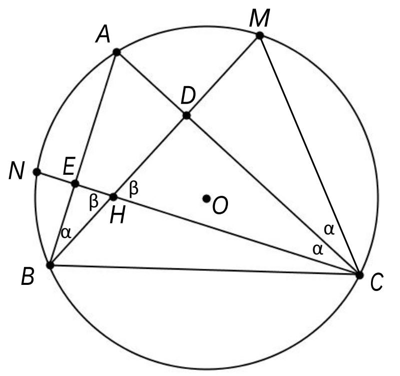
Questão 5. *(pontuação: 2)*

A figura abaixo mostra o triângulo acutângulo ABC inscrito na circunferência de centro O. A reta BD é perpendicular em D a AC e encontra a circunferência em M. A reta CE é perpendicular em E a AB e encontra a circunferência em N. As alturas BD e CE intersectam-se em H, ortocentro do triângulo.

a) Mostre que $HD = DM$.

b) Mostre que MN é perpendicular a OA.

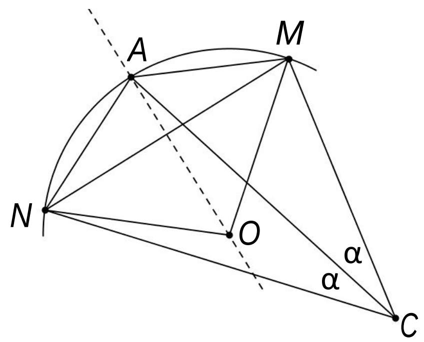
Uma solução:



a) Considerando a figura acima, sejam $\angle DCH = \alpha$ e $\angle DHC = \beta$. Como o ângulo HDC é reto então α e β são complementares. Temos $\angle EHB = \beta$ (oposto pelo vértice de DHC) e $\angle HBE = \alpha$ pois o ângulo BEH é reto. Escrevemos $\angle ABM = \angle HBE = \alpha$. Como os ângulos inscritos ABM e ACM subtendem o mesmo arco AM, então são iguais, ou seja, $\angle ACM = \alpha$.

Os triângulos retângulos CDH e CDM são congruentes. Assim $HD = DM$, como queríamos demonstrar.

b)



Os arcos AM e AN são iguais porque $\angle ACM = \angle ACN = \alpha$. Como arcos iguais subtendem cordas iguais o ponto A equidista dos pontos M e N. Entretanto o ponto O, centro da circunferência também equidista de M e N. Assim, A e O são pontos da mediatriz do segmento MN o que significa dizer que a reta AO é a mediatriz do segmento MN. Logo, OA é perpendicular a MN.