Professor: Felipe Wergete Cruz
Data: 14/10/2014 **Horário**: das 16:00h às 18:00h

1ª Avaliação de Métodos Matemáticos

Instruções

◇ Confira que há **5 questões** no caderno de prova.
◇ Não é permitido qualquer tipo de consulta.
◇ Todos os aparelhos eletrônicos deverão permanecer desligados durante a prova.
◇ Leia atentamente o enunciado das questões antes de tentar solucioná-las.
◇ A interpretação da questão faz parte do processo de avaliação.
◇ As respostas somente serão aceitas com **justificativas**.
◇ Não será permitida a saída durante a prova, exceto se entregue em definitivo.

Questões

1. **(a)** $(1,0$ ponto) Descreva o conjunto de pontos z no plano complexo que satisfazem a equação
$$|z-2| = \text{Re}(z).$$
(b) $(1,0$ ponto) Use a fórmula de De Moivre para calcular a seguinte potência: $(1+i\sqrt{3})^9$.

2. **(a)** $(1,0$ ponto) Determine a forma algébrica das três raízes cúbicas da unidade.
(b) $(0,5$ ponto) Seja w a raiz cúbica da unidade correspondente a $k=1$. Qual é a relação entre w e w^2?
(c) $(0,2$ ponto) Por um cálculo direto, comprove que $1+w+w^2=0$.
(d) $(0,3$ ponto) Use o fato que $w^3=1$ e conclua, fatorando, o mesmo resultado do item (c).

3. **(a)** $(1,0$ ponto) Esboce, no plano complexo, o gráfico da equação $|\text{Re}(1+i\,\bar{z})| = 3$.
(b) $(1,0$ ponto) Determine a imagem da reta $y=1$ sob a transformação complexa $w=z^2$.

4. **(a)** $(1,0$ ponto) Sejam $a \in \mathbb{C}^*$ e $f(z) = |z|^2$. Mostre que **não** existe o limite
$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}.$$
(b) $(0,5$ ponto) Mostre que $f'(0)=0$.
(c) $(0,5$ ponto) A função f é analítica em $z=0$? Justifique!

5. **(a)** $(0,5$ ponto) A função $g(z)=\bar{z}$ é derivável? [Dica: Use as equações de Cauchy-Riemann]
(b) $(1,0$ ponto) Seja $f=(u,v)$ a função inteira que satisfaz
$$f(0)=1 \quad \text{e} \quad v(z) = [y\cos y + (x-1)\,\text{sen}\, y]\,e^x.$$
Mostre que $f(z) = (z-1)\exp z + 2$.
(c) $(0,5$ ponto) A equação $\cos z = i\,\text{sen}\, z$ admite solução em $\mathbb{C}$? Justifique!