GABARITO

1º (a) $$h(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{[z-(1+i)]+(1+i)} =$$

$$= \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-(1+i)}{1+i}} =$$

$$= \frac{1}{1+i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-1-i}{1+i}\right)^n,$$

desde que

$$\left|\frac{z-1-i}{1+i}\right| < 1, \text{ i.e., } |z-1-i| < |1+i| = \sqrt{2}.$$

Assim,

$$h(z) = \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}} (z-1-i)^n,$$

$\forall z \in \mathbb{C}$ tal que $|z-1-i| < \sqrt{2}$. Logo, o raio de convergência é $\sqrt{2}$.

(b) Seja $a_n = \frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}$. Sabemos que o raio de convergência, R, é dado por:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Desta forma, como

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}} \cdot \frac{(1+i)^{n+2}}{(-1)^{n+1}}\right| = |1+i| = \sqrt{2},$$

segue que $R = \sqrt{2}$.

2º) Usando frações parciais, é fácil ver que

$$g(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}.$$

Sejam $\phi(z) = -\frac{1}{z}$ e $\varphi(z) = \frac{1}{z-1}$. Note que

$$g(z) = \phi(z) + \varphi(z). \quad (*)$$

Desta forma:

$$\phi(z) = -\frac{1}{2+z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-2}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-2}{2}\right)^n,$$

desde que $\left|\frac{z-2}{2}\right| < 1$, i.e., $|z-2| < 2$.

Assim:

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} (z-2)^n, \text{ se } |z-2| < 2. \quad (\#)$$

Para a função φ, temos:

$$\varphi(z) = \frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+z-2} = \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z-2}} =$$

$$= \frac{1}{z-2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z-2}\right)^n, \text{ desde que}$$

$\left|\frac{1}{z-2}\right| < 1$, i.e., $|z-2| > 1$. Logo,

$$\boxed{\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+1}}, \text{ se } |z-2| > 1.} \quad (\S)$$

Por $(*)$, $(\#)$ e $(\S)$, concluímos que

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} (z-2)^n =$$

$$= \cdots - \frac{1}{(z-2)^2} + \frac{1}{z-2} - \frac{1}{2} + \frac{z-2}{2^2} - \frac{(z-2)^2}{2^3} + \cdots,$$

desde que $1 < |z-2| < 2$.

3º (a) Note que

$$f(z) = \frac{z^4 + 2z^2 + 1}{z^2(z-z_1)(z-z_2)}, \text{ onde}$$

$z_1 = i(3+2\sqrt{2})$ e $z_2 = i(3-2\sqrt{2})$. Logo,

$z_0 = 0$, z_1 e z_2 são os pontos singulares de f.

De acordo com o teorema 6.4.2 do livro-texto (visto em sala de aula), concluímos que

$$\begin{cases} z_0 \text{ é um pólo de ordem 2; e que} \\ z_1 \text{ e } z_2 \text{ são pólos simples.} \end{cases}$$

(b)

(i) $\displaystyle \operatorname{Res}(f(z), z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz}\left[(z-z_0)^2 f(z)\right] =$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz}\left(\frac{z^4+2z^2+1}{(z-z_1)(z-z_2)}\right) =$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{(4z^3+4z)(z^2-6iz-1) - (z^4+2z^2+1)(2z-6i)}{(z^2-6iz-1)^2}$$

$$= 6i.$$

(ii) $\displaystyle \operatorname{Res}(f(z), z_1) = \lim_{z \to z_1} (z-z_1) f(z) =$

$$= \lim_{z \to z_1} \frac{z^4+2z^2+1}{z^2\left[z-i(3-2\sqrt{2})\right]}$$

$$= 4\sqrt{2}\, i.$$

(iii) $\displaystyle \operatorname{Res}(f(z), z_2) = \lim_{z \to z_2} (z-z_2) f(z) =$

$$= \lim_{z \to z_2} \frac{z^4 + 2z^2 + 1}{z^2 [z - i(3 + 2\sqrt{2})]} = -4\sqrt{2}\, i$$

(c) Fazendo a mudança $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, obtemos

$\cos\theta = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$, $\text{sen}\,\theta = \frac{1}{2i}(z - z^{-1})$ e $d\theta = \frac{dz}{iz}$.

Seja $I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{3 - \text{sen}\,\theta}\, d\theta$. Fazendo as devidas substituições, obtemos:

$$I = -\frac{1}{2} \oint_{|z|=1} f(z)\, dz, \quad (I)$$

onde $f(z) = \dfrac{z^4 + 2z^2 + 1}{z^2 (z^2 - 6iz - 1)}$.

Note que apenas z_0 e z_2 estão no interior de $|z| = 1$.

Pelo teorema dos resíduos, temos que

$$\oint_{|z|=1} f(z)\, dz = 2\pi i \left[\text{Res}(f(z), z_0) + \text{Res}(f(z), z_2) \right] =$$

$$= 2\pi i (6 - 4\sqrt{2})\, i = -2\pi(6 - 4\sqrt{2}).$$

Por (I), temos que

$$I = -\frac{1}{2} \cdot \left[-2\pi\left(6-4\sqrt{2}\right)\right], \text{ i.e.,}$$

$$I = \left(6-4\sqrt{2}\right)\pi$$