# GABARITO

**1º** Se $z = 1+\sqrt{3}\,i$, então $|z| = \sqrt{1+3} = 2$ e

$\cos\theta = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, onde $\theta = \arg z$.

Assim: $\operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}$ rad. Daí:

De Moivre

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow z^5 = 2^5\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right).$$

Como $\operatorname{Log} w = \ln|w| + i\operatorname{Arg}(w)$, e $|z^5| = 2^5$, bem

como $\operatorname{Arg}(z^5) = \frac{5\pi}{3} \in [0, 2\pi)$, segue que

$$\operatorname{Log}\left[(1+\sqrt{3}\,i)^5\right] = \ln 2^5 + i\,\frac{5\pi}{3} = 5\ln(2) + \frac{5\pi}{3}\,i$$

—||—

**2º** (a) Por definição, temos

$$(1+\sqrt{3}\,i)^i = e^{i\log(1+\sqrt{3}\,i)}.$$

Como $|1+\sqrt{3}\,i| = 2$ e $\arg(1+\sqrt{3}\,i) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$,

com $k\in\mathbb{Z}$, segue que

$$(1+\sqrt{3}\,i)^i = e^{i[\ln|1+\sqrt{3}\,i| + i\arg(1+\sqrt{3}\,i)]} =$$

$$= e^{i[\ln 2 + i(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)]} = e^{i\ln 2}\cdot e^{-(\frac{\pi}{3}+2k\pi)} =$$

$$= e^{-(\frac{\pi}{3}+2k\pi)}\left[\cos(\ln 2) + i\operatorname{sen}(\ln 2)\right],\ k\in\mathbb{Z}.$$

(b) $f(z) = z^{2i}$

$\Rightarrow f'(z) = 2i \cdot z^{2i-1} \quad \therefore \quad f'(i) = 2i \cdot i^{2i-1}$

$\Rightarrow f'(i) = 2 i^{2i} = 2(i^2)^i = 2 \cdot (-1)^i$ (*)

Mas:

$(-1)^i = e^{i \operatorname{Log}(-1)} = e^{i(\ln|-1| + i \operatorname{Arg}(-1))} =$

$= e^{i \cdot i \pi} = e^{-\pi}$

Por (*): $f'(i) = 2e^{-\pi}$

—||—

3º (a) $\begin{cases} \alpha(t) = (-t, 2+t^2), \ t \in [0,2] \\ f(z) = 2\bar{z} - z = x - 3yi, \text{ onde } z = x + iy \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} f(\alpha(t)) = -t - 3(2+t^2)i = -3it^2 - t - 6i \\ \alpha'(t) = (-1, 2t) = -1 + 2it \end{cases}$

Logo,

$f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = 6t^3 + 13t + i(t^2 + 6)$

Portanto:

$$\int_\alpha (2\bar{z} - z)\,dz = \int_0^2 f(\alpha(t))\cdot \alpha'(t)\,dt =$$

$$= \int_0^2 (6t^3 + 13t)\,dt + i\int_0^2 (t^2+6)\,dt =$$

$$= \left(\frac{3}{2}t^4 + \frac{13}{2}t^2\right)\Big|_0^2 + i\left(\frac{t^3}{3} + 6t\right)\Big|_0^2 =$$

$$= (24 + 26) + i\left(\frac{8}{3} + 12\right) = 50 + \frac{44}{3}i$$

—//—

(b) É fácil ver que $\dfrac{2z+1}{z^2+z} \overset{\text{frações parciais}}{=} \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z+1}$.

Assim:

$$\oint_\beta \frac{2z+1}{z^2+z}\,dz = \underbrace{\oint_\beta \frac{1}{z}\,dz}_{I_1} + \underbrace{\oint_\beta \frac{1}{z+1}\,dz}_{I_2}. \quad (\#)$$

Uma vez que $\beta$ é um contorno fechado simples e a função $\dfrac{1}{z+1}$ é analítica em $\beta$ e em todos os pontos de seu interior, segue, do teorema de Cauchy-Goursat que

$$I_2 = \oint_\beta \frac{1}{z+1}\,dz = 0.$$

Por outro lado, como $\beta(t) = \frac{1}{2} e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$,

$z=0$ está dentro do contorno fechado simples $\beta$

segue que

$$I_1 = \oint_\beta \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{1}{2} e^{it}} \cdot \frac{1}{2} i e^{it} dt = 2\pi i.$$

Por (#): $\displaystyle\oint_\beta \frac{2z+1}{z^2+z} dz = 2\pi i.$

-11-

(c) Note que $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^3(z-4)} dz = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{z-4}}{z^3} dz.$

Tome $f(z) = \frac{1}{z-4}$, $z_0 = 0$ e $\beta$ a circunferência $|z|=1$.

Uma vez que $f$ é analítica no contorno fechado simples $\beta$ e em todos os pontos no interior de $\beta$ e, ademais, $z_0 = 0$ é um ponto no interior de $\beta$, segue da fórmula integral de Cauchy para derivadas que

$$\oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{z-4}}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(0) \quad (\S).$$

Como $f(z) = \frac{1}{z-4}$, então $f'(z) = -\frac{1}{(z-4)^2}$.

Daí: $f''(z) = \frac{2}{(z-4)^3} \Rightarrow f''(0) = -\frac{1}{32}$.

Por (§): $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^3(z-4)}\,dz = -\frac{\pi i}{32}$

—||—

4º Uma vez que

$u_x(x,y) = y+1, \quad u_y(x,y) = x+2,$

segue que $u_{xx}(x,y) = 0 = u_{yy}(x,y), \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Portanto, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Isso nos diz que a função $u$ é harmônica em $\mathbb{C}$.

Se $v$ é a conjugada harmônica de $u$, então $u$ e $v$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, i.e.:

$$\begin{cases} y+1 = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] x+2 = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Integrando a 1ª eq. do sistema acima com relação a $y$, obtemos:

$$v(x,y) = \frac{y^2}{2} + y + \varphi(x).$$

Derivando $v$ com relação a $x$, vem: $v_x(x,y) = \varphi'(x)$.

Mas: $v_x(x,y) = -x-2$. Logo:

$$\varphi'(x) = -x-2.$$

Integrando com relação a $x$, obtemos:

$$\varphi(x) = -\frac{x^2}{2} - 2x + C, \text{ onde } C \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $v(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + y - \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$ é a conjugada harmônica de $u$.

A função analítica correspondente é

$$f(z) = xy + x + 2y - 5 + i\left(\frac{1}{2}y^2 + y - \frac{1}{2}x^2 - 2x + C\right).$$

Isso nos diz que

$$f(2i) = f(0,2) = 0 + 0 + 4 - 5 + i(2 + 2 - 0 - 0 + C)$$
$$= -1 + (4 + C)i$$

Mas: $f(2i) = -1 + 5i$.

$$\Rightarrow 4 + C = 5 \therefore C = 1.$$

Portanto:

$$f(z) = xy + x + 2y - 5 + i\left(\frac{1}{2}y^2 + y - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1\right).$$