Métodos Matemáticos - ELET0024 - Turma E5 - 1º Exercício Escolar

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

Professor: Felipe Wergete Cruz **Data**: 14/10/2014

Nome legível: GABARITO **CPF**: ______

Assinatura: ______ **Curso**: ______

1ª Questão: ___ 2ª Questão: ___ 3ª Questão: ___ 4ª Questão: ___ 5ª Questão: ___

Nota: ______

1º (a) Seja $z = x + iy$ um nº complexo. Então

- $|z-2| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$;
- $Re(z) = x$.

Daí:

$$|z-2| = Re(z) \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 \Rightarrow -4x + 4 + y^2 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 = 4(x-1).$$

Trata-se, portanto, de uma parábola de vértice $V = (1,0)$, foco $F = (2,0)$, reta diretriz $x = 0$ (eixo y) e parâmetro $p = 2$.

—||—

(b) Seja $w = 1 + \sqrt{3}\,i$. É fácil ver que $|w| = 2$ e $Arg(w) = \frac{\pi}{3}$. Ou seja: $w = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$. Pela fórmula de De Moivre

$$w^9 = 2^9\left(\cos\frac{9\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{9\pi}{3}\right) = 2^9(-1 + i\cdot 0) = -2^9 = -512.$$

② (a) Vamos determinar as raízes da equação $z_k^3 = 1$.

Se $z_k = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, então como $1 = 1(\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi)$, temos:

$$z_k^3 = r^3(\cos(3\theta) + i \operatorname{sen}(3\theta)) = 1 \cdot (\cos 2k\pi + i \operatorname{sen} 2k\pi)$$

$$\Rightarrow r = 1 \text{ e } \theta = \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Daí:

$$z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{3}\right), \quad k \in \{0, 1, 2\}.$$

Logo, as raízes cúbicas da unidade são:

$$z_0 = 1, \quad z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e}$$

$$z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

—//—

(b) Seja $w := z_1$. Então $w^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = z_2 = \overline{z_1} = \overline{w}$.

Logo, a relação entre w e w^2 é que um é o conjugado do outro.

—//—

(c) Note que

$$1 + w + w^2 = 1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

—//—

(d) $w^3 = 1 \Rightarrow w^3 - 1 = 0$

$$\Rightarrow (w-1)(w^2 + w + 1) = 0.$$

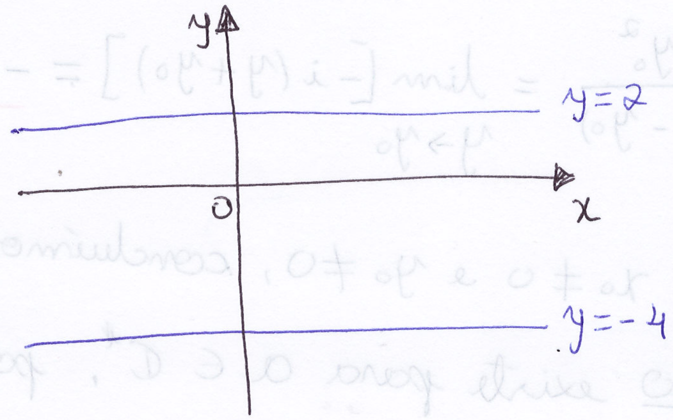
Como $w \neq 1$, segue que $1 + w + w^2 = 0$.

3º (a) Seja $z = x + iy$. Então:

$$1 + i\bar{z} = 1 + i(x - iy) = 1 + y + ix.$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(1 + i\bar{z}) = 1 + y.$$

Logo: $|\operatorname{Re}(1+i\bar{z})| = 3 \iff |1+y| = 3 \iff y = -4$ ou $y = 2$.



Plano de Argand-Gauss

—//—

(b) Se $z = x + iy$, então $w = f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$.

Para um ponto da forma $z = x + i$, i.e., $y = 1$, temos

$$\begin{cases} u = u(x,1) = x^2 - 1 \\ \quad \text{e} \\ v = v(x,1) = 2x \end{cases}$$

u ← Parte real de w

v ← Parte imaginária de w

Como $x = \frac{v}{2}$, temos $u = \left(\frac{v}{2}\right)^2 - 1 = \frac{v^2}{4} - 1$.

Ou seja, a reta horizontal $y = 1$ é mapeada na parábola $u = \frac{v^2}{4} - 1$ pela transformação complexa $w = z^2$.

—//—

4º (a) Seja $a = (x_0, y_0) \neq 0$. Então se $z = (x, y)$, temos

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{(x^2 + y^2) - (x_0^2 + y_0^2)}{(x - x_0) + i(y - y_0)}.$$

- Cálculo do limite ao longo da reta $y = y_0$

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}(x+x_0) = 2x_0$$

- Cálculo do limite ao longo da reta $x = x_0$

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \lim_{y\to y_0} \frac{y^2-y_0^2}{i(y-y_0)} = \lim_{y\to y_0}[-i(y+y_0)] = -2y_0 i$$

Uma vez que $a \neq 0$, i.e., $x_0 \neq 0$ e $y_0 \neq 0$, concluímos que o limite $\lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ não existe para $a \in \mathbb{C}^*$, pois obtivemos valores distintos para o limite ao longo de caminhos diferentes.

—//—

(b) $f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{z\to 0} \frac{|z|^2}{z} =$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{z.\bar{z}}{z} = \lim_{z\to 0} \bar{z} = 0.$$

—//—

(c) Dos itens (a) e (b) concluímos que a função $f(z) = |z|^2$ é derivável apenas em $z=0$. Logo não existe nenhuma vizinhança da origem na qual f é derivável, i.e., f não é analítica em $z=0$.

5º (a) $g(z) = \overline{z} = x - iy$, se $z = x + iy$.

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = x \\ v(x,y) = -y \end{cases}$$

Daí: $u_x(x,y) = 1$, $u_y(x,y) = 0$, $v_x(x,y) = 0$ e $v_y(x,y) = -1$.

Embora $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$, para todo (x,y), claramente

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \neq \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \ \forall (x,y).$$

Logo, as equações de Cauchy-Riemann não são satisfeitas em nenhum ponto de $\mathbb{C}$. Portanto, g não é derivável em todo o plano complexo.

—11—

(b) Se $f = (u,v)$ é inteira, então u e v satisfaz as equações de Cauchy-Riemann. É fácil ver que:

$$\begin{cases} v_x(x,y) = (y\cos y + x \operatorname{sen} y)e^x \\ \text{e} \\ v_y(x,y) = (x\cos y - y\operatorname{sen} y)e^x \end{cases}$$

Portanto:

$$\begin{cases} u_x(x,y) = (x\cos y - y\operatorname{sen} y)e^x & (1) \\ u_y(x,y) = -(y\cos y + x\operatorname{sen} y)e^x & (2) \end{cases}$$

Integrando por partes, é fácil ver que $\int x e^x dx = xe^x - e^x$.

Portanto, integrando (1) com relação a x, obtemos:

$u(x,y) = \cos y(xe^x - e^x) - y\operatorname{sen} y\, e^x + \varphi(y)$. (#)

Derivando u com relação a y, obtemos:

$$u_y(x,y) = -\operatorname{sen} y(x e^x - e^x) - (\operatorname{sen} y + y\cos y)e^x + \varphi'(y)$$

$$\Rightarrow u_y(x,y) = -(y\cos y + x\operatorname{sen} y)e^x + \varphi'(y).$$

Comparando com (2), concluímos que $\varphi'(y) = 0$.

Logo, $\varphi(y) = C$ = cte real.

Por (#):

$$u(x,y) = \cos y(xe^x - e^x) - y\operatorname{sen} y e^x + C.$$

Como $f(0) = 1$, segue que $u(0,0) = 1$. Mas $u(0,0) = -1 + C$.

Daí: $C = 2$. Portanto:

$$f(z) = \cos y(xe^x - e^x) - y\operatorname{sen} y e^x + 2 + i(y\cos y + (x-1)\operatorname{sen} y)e^x$$

$$= xe^x(\cos y + i\operatorname{sen} y) - e^x(\cos y + i\operatorname{sen} y) +$$

$$+ yie^x(\cos y + i\operatorname{sen} y) + 2 =$$

$$= xe^x e^{iy} - e^x e^{iy} + iye^x e^{iy} + 2 =$$

$$= xe^{x+iy} - e^{x+iy} + iye^{x+iy} + 2 =$$

$$= (x+iy-1)e^{x+iy} + 2 = (z-1)e^z + 2.$$

Portanto:

$$f(z) = (z-1)e^z + 2$$

—//—

(c) $\cos z = i\operatorname{sen} z \Rightarrow \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = i\,\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \Rightarrow e^{-iz} = -e^{-iz}$

$\Rightarrow e^{-iz} = 0 \Rightarrow e^{y}(\cos x - i\operatorname{sen} x) = 0$, o que não é possível, pois $e^y > 0\ \forall y \in \mathbb{R}$ e $(\cos x, -\operatorname{sen} x) \neq (0,0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.