

Professor: Felipe Wergete Cruz

Data: 07/10/2014

Horário: das 08:00h às 10:00h

Aluno: _____ **CPF:**

1ª Avaliação de Álgebra Linear

Instruções

- ◇ Escreva seu nome e o número de seu CPF no lugar indicado desta folha.
- ◇ Confira que há **7 questões** no caderno de prova.
- ◇ Não é permitido qualquer tipo de consulta.
- ◇ Todos os aparelhos eletrônicos deverão permanecer desligados durante a prova.
- ◇ Leia atentamente o enunciado das questões antes de tentar solucioná-las.
- ◇ A interpretação da questão faz parte do processo de avaliação.
- ◇ As respostas somente serão aceitas com **justificativas**.
- ◇ Escreva **todos** os detalhes dos cálculos que o levarem a uma solução.
- ◇ Não será permitida a saída durante a prova, exceto se entregue em definitivo.

Questões

1. (0,5 ponto) Considere a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 2 & \alpha^2 \\ 2\alpha - 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine o valor de α para que $M = M^t$, onde M^t denota a transposta da matriz M .

2. Considere o sistema

$$\begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ 5x - 4y = 0 \\ 2x - y = \beta \end{cases}.$$

- (a) (1,0 ponto) Escreva a matriz ampliada do sistema acima e a reduza à forma escada.
- (b) (0,5 ponto) Determine o posto da matriz dos coeficientes. A resposta obtida depende do valor de β ? Em caso afirmativo, dê a sua resposta em função de β .
- (c) (0,8 ponto) Determine o posto da matriz ampliada. A resposta obtida depende do valor de β ? Em caso afirmativo, dê a sua resposta em função de β .
- (d) (0,8 ponto) Determine o valor de β para que o sistema seja possível e determinado. Neste caso, exiba a única solução.
- (e) (0,5 ponto) É possível encontrar algum valor para β a fim de que o sistema seja possível e indeterminado? Justifique!
- (f) (0,4 ponto) Para quais valores de β o sistema não admitirá solução?

3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -6 & 4 & 13 \end{bmatrix}.$$

- (a) (1,0 ponto) Encontre a matriz A^{-1} , ou seja, a inversa de A .
 (b) (0,5 ponto) Usando a matriz A^{-1} , resolva o sistema $AX = B$, onde

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. Considere o espaço vetorial real $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\}$ com as operações:

- **adição de elementos:** $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 + y_2)$.
- **multiplicação por escalar:** $\lambda \cdot (x, y) = (x^\lambda, \lambda y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (a) (0,4 ponto) Exiba o vetor nulo de V .
 (b) (0,4 ponto) Exiba o inverso (ou simétrico) aditivo do elemento $(x, y) \in V$.
 (c) (0,5 ponto) Mostre que $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$, $\forall u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.
 5. (0,2 ponto) Seja $S = \{(x, y, z) / x - y - z + 1 = 0\}$ um subconjunto de $\mathbb{R}^3$. O conjunto S é um subespaço de $\mathbb{R}^3$? Justifique!
 6. Considere os seguintes subespaços de $M_2(\mathbb{R}) = \{\text{matrizes quadradas de ordem } 2\}$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} / x + y = 0 \text{ e } z + t = 0 \right\} \quad \text{e} \quad W = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right].$$

- (a) (0,3 ponto) Determine um sistema de geradores para o subespaço U .
 (b) (0,5 ponto) Determine um sistema de geradores para o subespaço $U \cap W$.
 (c) (0,5 ponto) Determine um sistema de geradores para o subespaço $U + W$.
 (d) (0,2 ponto) É verdade que $U \oplus W = M_2(\mathbb{R})$? Ou seja, o subespaço $U + W$ é uma soma direta? Justifique sua resposta.
 7. Considere o espaço $P_2(\mathbb{R}) = \{\text{polinômios de grau até } 2\}$ e os vetores

$$p_1(x) = 1 + x, \quad p_2(x) = 1 + x + x^2 \quad \text{e} \quad p_3(x) = x + x^2 \quad \text{de } P_2(\mathbb{R}).$$

- (a) (0,5 ponto) Mostre que o conjunto $\gamma = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ é linearmente independente.
 (b) (0,5 ponto) Mostre que $P_2(\mathbb{R}) = [p_1(x), p_2(x), p_3(x)]$.

OBS.: Este exercício mostra que o conjunto γ é uma *base* de $P_2(\mathbb{R})$, como veremos na próxima unidade.