

GABARITO

1º $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$

$$v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (0, 2, 1), v_3 = (0, 0, 1)$$

Vamos obter uma base β , ortormal, a partir da base α .

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

• $\mu_1 = v_1 = (1, 1, 1)$

• $\mu_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, \mu_1 \rangle}{\langle \mu_1, \mu_1 \rangle} \mu_1 = (0, 2, 1) - \frac{3}{3} (1, 1, 1) = (-1, 1, 0)$

• $\mu_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, \mu_1 \rangle}{\langle \mu_1, \mu_1 \rangle} \mu_1 - \frac{\langle v_3, \mu_2 \rangle}{\langle \mu_2, \mu_2 \rangle} \mu_2 \Rightarrow$

• $\mu_3 = (0, 0, 1) - \frac{0}{2} (-1, 1, 0) - \frac{1}{3} (1, 1, 1) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Normalizando os vetores μ_1, μ_2 e μ_3 , obtemos a base β , i.e.,

$$\beta = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

-11-
2º (a) Como γ é uma base ortormal e, além disso, $[T]_{\gamma}^{\gamma} = ([T]_{\gamma}^{\gamma})^t$,

segue que T é auto-adjunto. É fácil ver que

$$([T]_{\gamma}^{\gamma})^{-1} = ([T]_{\gamma}^{\gamma})^t$$

Portanto, o operador T é ortogonal.

(b) Se $T: V \rightarrow V$ é um operador linear auto-adjunto sobre um espaço vetorial V de dimensão finita, então existe uma base ortonormal de V formada por autovetores de T , em relação à qual a matriz de T é diagonal. Além disso, os elementos da diagonal principal da matriz serão exatamente os autovalores de T .

(c) Segue do fato de T ser auto-adjunto, juntamente com o teorema espectral.

-11-

3º A eq. da cônica pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{Q(u)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 6\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{L(u)} - 4 = 0$$

onde $u = (x, y)$

1º diagonalização da forma quadrática

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)$$

$$\bullet \lambda_1 = 0 \Rightarrow v_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\bullet \lambda_2 = 2 \Rightarrow v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Seja $\beta = \{v_1, v_2\}$. A forma quadrática

$$Q(u) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

se reduz a

$$Q(u) = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \text{ onde } \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = [u]_{\beta}$$

2º Passo: Relação entre $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$.

Seja α a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Então

$$[u]_{\alpha} = [I]_{\alpha}^{\beta} [u]_{\beta}.$$

Logo:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

Voltando à eq. original, obtemos:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + [2\sqrt{2} \quad 6\sqrt{2}] \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - 4 = 0.$$

$$\Rightarrow 2y_1^2 + 4x_1 + 8y_1 - 4 = 0$$

ou

$$y_1^2 + 4y_1 + 2x_1 - 2 = 0 \Rightarrow (y_1 + 2)^2 + 2x_1 = 6$$

$$\Rightarrow (y_1 + 2)^2 = -2(x_1 - 3)$$

ou $y_2^2 = -2x_2$, onde $y_2 = y_1 + 2$ e $x_2 = x_1 - 3$.

Parábola

$$\textcircled{4^\circ} \begin{bmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \text{ ou}$$

$$\frac{dX}{dt}(t) = A X(t), \text{ onde } A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

Buscamos solução da forma

$$X(t) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^{\lambda t},$$

onde $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = u$ é autovetor da matriz A e λ é o respectivo autovalor.

É fácil ver que $P_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$.

$$\bullet \lambda_1 = 1 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \lambda_2 = -2 \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, as soluções LI do sistema são:

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t \text{ e } X_2(t) = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}.$$

Portanto, a solução geral do sistema é

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^t + 4c_2 e^{-2t} \\ c_1 e^t + c_2 e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Impondo as condições $x(0) = -1$ e $y(0) = 2$, obtemos:

$$c_1 = 3 \text{ e } c_2 = -1.$$

Logo, a solução do PVI é:

$$\begin{cases} x(t) = 3e^t - 4e^{-2t} \\ y(t) = 3e^t - e^{-2t} \end{cases}$$

-11-

(5º) Seja α a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e $\beta = \{(1,1), (4,1)\}$ a base de autovetores da matriz A (ver questão 4).

Seja $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ a matriz diagonal de A a partir da base β . Então:

$$A = [I]_{\alpha}^{\beta} D [I]_{\beta}^{\alpha}$$

$$\text{Como } [I]_{\alpha}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } [I]_{\beta}^{\alpha} = \left([I]_{\alpha}^{\beta} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

$$\text{segue que } A^{2016} = [I]_{\alpha}^{\beta} D^{2016} [I]_{\beta}^{\alpha}.$$

Fazendo as contas, obtemos:

$$A^{2016} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{2018} \\ 1 & 2^{2016} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \text{ i.e.,}$$

$$A^{2016} = \begin{pmatrix} \frac{2^{2018} - 1}{3} & \frac{4 - 2^{2018}}{3} \\ \frac{2^{2016} - 1}{3} & \frac{4 - 2^{2016}}{3} \end{pmatrix}$$

-11-