1º De acordo com a matriz $[I]_\alpha^\gamma$, temos que

$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 + 4\vec{v}_2$ e $\vec{u}_2 = -2\vec{v}_2$. Daí:

$$\vec{v}_2 = -\frac{1}{2}\vec{u}_2$$ e

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 - 4\vec{v}_2 \therefore \vec{v}_1 = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$$

Como $\vec{u}_1 = (1,1)$ e $\vec{u}_2 = (-2,2)$, segue que

$\vec{v}_1 = (-3,5)$ e $\vec{v}_2 = (1,-1)$.

Assim, $\alpha = \{(-3,5), (1,-1)\}$.

Por outro lado, $\vec{u} = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$, i.e., $\vec{u} = (-1,3)$.

—//—

2º Como $(x,y) = \frac{x+y}{2}(1,1) + \frac{x-y}{2}(1,-1)$, então

$T(x,y) = \frac{x+y}{2}T(1,1) + \frac{x-y}{2}T(1,-1)$. Ou seja:

$T(x,y) = \frac{x+y}{2}(t^2-1) + \frac{x-y}{2}(t^3+1)$, ou ainda

$$T(x,y) = -y + \frac{x+y}{2}t^2 + \frac{x-y}{2}t^3$$

—//—

3º (a) $(x,y) \in \operatorname{Ker} T \Leftrightarrow T(x,y) = (0,0,0) \Leftrightarrow (2y, x-y, x) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$

$\operatorname{Ker}(T) = \{(0,0)\}$ e $\dim(\operatorname{Ker} T) = 0$.

(b) $Im\, T = \{(2y, x-y, x) \mid x, y \in \mathbb{R}^2\}$

$= \{(0,x,x) + (2y, -y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$= \{x(0,1,1) + y(2,-1,0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$= [(0,1,1), (2,-1,0)]$

Como os vetores $(0,1,1)$ e $(2,-1,0)$ são LI e geram a imagem de T, segue que $\{(0,1,1), (2,-1,0)\}$ é uma base para a imagem de T. Portanto, $\dim(Im\, T) = 2$.

(c) A aplicação T é injetiva, pois $Ker(T) = \{(0,0)\}$, mas não é sobrejetiva, já que $Im(T) \neq \mathbb{R}^3$. Portanto, T não é uma aplicação bijetiva.

—||—

4º (a) Seja α a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Então

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A.$$

O polinômio característico de T é

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Ou seja:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2).$$

(b) Os autovalores de T são as raízes do polinômio característico, ou seja, 1 e -2.

Autovetores • $\lambda_1 = 1 \Rightarrow (A - \lambda I)v = 0$

ou

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y$$

Logo, os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 1$ são da forma (x, x), $x \neq 0$.

- $\lambda_2 = -2 \Rightarrow (A - \lambda I)v = 0$ ou

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 4y.$$

Assim, os autovetores associados ~~ao~~ autovalor ~~es~~ $\lambda_2 = -2$ são da forma $(4y, y)$, com $y \neq 0$.

(c) e (d)

~~(b) e (c)~~ O operador T é diagonalizável pois o conjunto $\{(1,1), (4,1)\}$ é uma base de autovetores de T para $\mathbb{R}^2$.

Além disso, a matriz de T em relação a essa base é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$