

1º Se $M = \begin{pmatrix} 2 & \alpha^2 \\ 2\alpha-1 & 0 \end{pmatrix}$, então $M^t = \begin{pmatrix} 2 & 2\alpha-1 \\ \alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$.

Para que $M = M^t$, devemos ter $\alpha^2 = 2\alpha - 1$. Logo, $\alpha = 1$.

—//—

2º (a) Matriz ampliada: $\begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & \beta \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & \beta \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow -\frac{1}{4}L_1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ 5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & \beta \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \rightarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 5/2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \beta+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -4L_2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & \frac{1}{2} & \beta+1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \rightarrow L_1 + \frac{3}{4}L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & \beta+6 \end{pmatrix}$$

• se $\beta = -6$, a forma escada é $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

• se $\beta \neq -6$, facilmente teremos $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ como forma escada

(b) O nº de linhas ~~não~~ não-nulas da matriz ~~na forma~~ dos coeficientes na forma escada é 2, para todo $\beta \in \mathbb{R}$.
Logo, $p_c = 2, \forall \beta \in \mathbb{R}$.

(c) Se $\beta = -6$, vemos que $p_A = 2$. Já se $\beta \neq -6$, $p_A = 3$.

(d) O sistema será possível e determinado quando $\beta = -6$, pois, neste caso, $p_A = p_C = n^\circ$ de incógnitas. Através da forma escalonada, vemos que a solução do sistema é $x = -8$ e $y = -10$.

(e) Não, pois este seria o caso se o n° de incógnitas fosse maior do que o posto das matrizes dos coeficientes e ampliada (que são iguais).

(f) Para $\beta \neq 6$, pois $p_A \neq p_C$.

-11-

3º (a) Vamos encontrar A^{-1} .

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & 13 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 + 6L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 6 & 1 \end{array} \right) L_3 \rightarrow L_3 - 4L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 & 1 \end{array} \right) L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 & 1 \end{array} \right) \quad L_1 \rightarrow L_1 + 2L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Portanto:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$

Logo:

$$X = \begin{pmatrix} -8 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = 10, y = -1 \text{ e } z = 5.$$

—||—

4º (a) $(x_1, y_1) + \overbrace{(x_2, y_2)}^{\text{vetor nulo}} = (x_1, y_1)$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1, y_1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = x_1 \\ y_1 + y_2 = y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \vec{O} = (0, 0)$$

$$(b) \quad (x, y) + \overbrace{(a, b)}^{\text{inverso de } (x, y)} = \vec{0} = (1, 0)$$

$$\Leftrightarrow (ax, b+y) = (1, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax = 1 \\ b+y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{x} \\ b = -y \end{cases}$$

$$\text{Logo, se } u = (x, y), \quad -u = \left(\frac{1}{x}, -y\right).$$

(c) Sejam $u = (x, y), v = (a, b) \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então:

$$\lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot (xa, y+b) = ((\lambda a)^x, \lambda(y+b)) =$$

$$= (x^\lambda a^\lambda, \lambda y + \lambda b) =$$

$$= (x^\lambda, \lambda y) + (a^\lambda, \lambda b) = \lambda u + \lambda v.$$

-||-

5º Não, pois o vetor nulo de $\mathbb{R}^3$, $(0, 0, 0)$ não pertence a S , uma vez que $0-0-0+1 \neq 0$.

-||-

$$(6^\circ) (a) \quad \mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} x & -x \\ z & -z \end{pmatrix} \mid x, z \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mid x, z \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{u_2} \right].$$

u_1

u_2

Logo, as matrizes u_1 e u_2 são os vetores geradores de $\mathcal{U}$.

(b) Seja $w \in W$. Então, se $w = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, temos que

$$w = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Daí:}$$

$$w = \begin{pmatrix} b & a - 2b + c \\ -c & -2a + 2c \end{pmatrix}$$

Ou ainda:

$$\begin{cases} a - 2b + c = y \\ -2a + 2c = t \\ b = x \\ -c = z \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & y \\ -2 & 0 & 2 & t \\ 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & -1 & z \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ L_2 \rightarrow L_2 + 2L_1 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & y \\ 0 & -4 & 4 & t + 2y \\ 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & -1 & z \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 + 2L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 + 4L_3 \\ \\ L_4 \rightarrow -L_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & y + 2x \\ 0 & 0 & 4 & t + 2y + 4x \\ 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & -z \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 - L_4 \\ L_2 \rightarrow L_2 - 4L_4 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2x + y + z \\ 0 & 0 & 0 & 4x + 2y + 4z + t \\ 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & -z \end{array} \right)$$

Portanto:

$a = 2x + y + z$, $b = x$ e $c = -z$, desde que
 $4x + 2y + 4z + t = 0$. Ou seja:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid 4x + 2y + 4z + t = 0 \right\}.$$

Assim, os vetores de $U \cap W$ devem satisfazer:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z + t = 0 \\ 4x + 2y + 4z + t = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 3n, y = -3n, z = -2n, t = 2n.$$

$$\therefore U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} 3n & -3n \\ -2n & 2n \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{R} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \right].$$

(c) Temos que

$$U + W = \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mu_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\mu_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}_{\mu_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mu_4}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mu_5} \right].$$

É fácil ver, por exemplo, que

$$\mu_3 = 3\mu_1 - 2\mu_2 - 3\mu_4 - 2\mu_5.$$

$$\text{Logo: } U + W = [\mu_1, \mu_2, \mu_4, \mu_5].$$

Também é fácil ver que μ_1, μ_2, μ_4 e μ_5 são L.I.

Logo, os vetores μ_1, μ_2, μ_4 e μ_5 geram $U + W$.

(d) Não. Para ser soma direta, $U \cap W = \{\vec{0}\}$, o que não é verdade pelo item (b).

-11-

7º (a) $a p_1(x) + b p_2(x) + c p_3(x) = 0 \in P_2(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow a(1+x) + b(1+x+x^2) + c(x+x^2) = 0$$

$$(a+b) + (a+b+c)x + (b+c)x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a+b+c=0 \\ b+c=0 \end{cases} \therefore a=b=c=0.$$

Logo, γ é L.I..

(b) Seja $q(x) = a + bx + cx^2 \in P_2(\mathbb{R})$. Vamos mostrar que $q(x)$ é combinação linear de $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$.
Temos:

$$q(x) = A p_1(x) + B p_2(x) + C p_3(x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=a \\ A+B+C=b \\ B+C=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=b-c \\ B=a-b+c \\ C=b-a \end{cases}$$

Logo:

$$q(x) = (b-c)(1+x) + (a-b+c)(1+x+x^2) + (b-a)(x+x^2).$$

Portanto:

$$[p_1(x), p_2(x), p_3(x)] = P_2(\mathbb{R}).$$