Professor: Felipe Wergete Cruz
Data: 25/10/2012 **Horário**: das 14:00h às 16:00h

Aluno: ____________________ **CPF**: ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

2ª Avaliação de Álgebra Linear

Instruções

◇ Observe que há uma questão no verso desta folha.
◇ Não é permitido qualquer tipo de consulta.
◇ Leia atentamente o enunciado das questões antes de tentar solucioná-las.
◇ As respostas somente serão aceitas com **justificativas**.
◇ Escreva **todos** os detalhes dos cálculos que o levarem a uma solução.

Questões

1. $(2,0$ pontos) Sejam V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\alpha = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ uma base de V. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v} \in V$ tais que

$$[\vec{u}]_\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ e } [\vec{v}]_\alpha = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Se $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2$, a base α é ortonormal?

2. $(2,0$ pontos) Seja $T : V \to V$ um operador ortogonal em um espaço V com produto interno $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$. Prove que se $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são autovetores de T associados aos autovalores 1 e -1 respectivamente, então $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são ortogonais.

3. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x + y,\ x - y,\ -z)$.
(a) $(0,5$ ponto) Mostre que T é uma aplicação autoadjunta com relação ao produto interno usual $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ de $\mathbb{R}^3$.

(b) $(1,0$ ponto) Encontre os autovalores e autovetores de T.

(c) $(0,5$ ponto) Exiba, se possível, uma **matriz** de T na forma diagonal, bem como a **base** na qual está sendo escrita esta matriz.

4. $(1,0$ ponto) Justifique, sem fazer nenhuma conta, por que o operador T do exercício anterior é diagonalizável.

5. Seja $V = \mathbb{R}^3$ munido com o produto interno usual. Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + 3z = 0\}$.

   (a) $(1,0$ ponto) Determine $S^{\perp}$.

   (b) $(1,0$ ponto) Determine bases ortonormais de S e $S^{\perp}$.

   (c) $(1,0$ ponto) Seja $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow S$ a projeção ortogonal sobre o subespaço S. Calcule $P(x, y, z)$.