Professor: Felipe Wergete Cruz
Data: 25/10/2012 **Horário**: das 10:00h às 12:00h

Aluno: ______________________ **CPF**: ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

2ª Avaliação de Álgebra Linear

Instruções

◇ Observe que há uma questão no verso desta folha.
◇ Não é permitido qualquer tipo de consulta.
◇ Leia atentamente o enunciado das questões antes de tentar solucioná-las.
◇ As respostas somente serão aceitas com **justificativas**.
◇ Escreva **todos** os detalhes dos cálculos que o levarem a uma solução.

Questões

1. $(2,0$ pontos) Sejam V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot\,,\cdot \rangle$ e $\alpha = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ uma base ortonormal de V. Seja $\vec{u} \in V$ tal que $\langle \vec{u}\,, 2\vec{v}_1 \rangle = 4$, $\langle \vec{u}\,, \vec{v}_2 \rangle = -1$ e $\langle \vec{u}\,, \vec{v}_3 \rangle = 3$. Determine as coordenadas $[\vec{u}]_\alpha$.

2. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = \left(x - \sqrt{3}\,y,\ -\sqrt{3}\,x - y\right)$.

   (a) $(0,5$ ponto) Mostre que T é uma aplicação autoadjunta com relação ao produto interno usual $\langle \cdot\,,\cdot \rangle$ de $\mathbb{R}^2$.

   (b) $(1,0$ ponto) Encontre os autovalores e autovetores de T.

   (c) $(0,5$ ponto) Exiba, se possível, uma **matriz** de T na forma diagonal, bem como a **base** na qual está sendo escrita esta matriz.

3. $(1,0$ ponto) Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ o operador linear dado por

   $$T(x,y,z,t) = (3x + 2z + t,\ 5y - z + 3t,\ 2x - y + 4z,\ x + 3y + 5t).$$

   Considere o produto interno usual de $\mathbb{R}^4$. Existe uma base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ formada por autovetores de T? Por que? (Não é preciso calcular autovalores e autovetores)

4. $(2,0$ pontos) Seja $T : V \to V$ um operador ortogonal em um espaço V com produto interno $\langle \cdot\,,\cdot \rangle$. Prove que se $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são autovetores de T associados aos autovalores 1 e -1 respectivamente, então $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são ortogonais.

5. Seja $V = \mathbb{R}^3$ munido com o produto interno usual. Seja $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2z = 0\}$.

   (a) $(1,0$ ponto) Determine $W^{\perp}$.

   (b) $(1,0$ ponto) Determine bases ortonormais de W e $W^{\perp}$.

   (c) $(1,0$ ponto) Seja $P : \mathbb{R}^3 \to W$ a projeção ortogonal sobre o subespaço W. Calcule $P(x, y, z)$.