Fundação Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF
Colegiado de Engenharia de Produção - CPROD
Prof. Felipe Wergete
2ª Lista de Exercícios de Álgebra Linear - 2012.1

1. Determine quais das seguintes aplicações são transformações lineares:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (x + y, x - y)$;

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $g(x, y) = xy$;

(c) $h : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, dada por $h(A) = \det(A)$;

(d) $k : P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$, dada por $k(a + bt + ct^2) = at + bt^2 + ct^3$;

(e) $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$R(x, y) = \det \begin{pmatrix} x & x_0 \\ y & y_0 \end{pmatrix},$$

onde x_0 e y_0 são números reais fixados.

2. Seja $V = (0, +\infty)$. Dados $x, y \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ defina $x \oplus y = xy$ (Soma em V) e $\lambda \odot x = x^\lambda$ (Produto por Escalar).

(a) Mostre que V, munido das operações definidas acima, é um espaço vetorial;

(b) Suponha $\mathbb{R}$ munido das operações usuais de soma e produto. Mostre que as funções $f : V \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to V$ definidas por $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = e^x$ são transformações lineares;

(c) Mostre que a função $h : V \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = x$ **não é linear** (Sugestão: use o fato que transformação linear leva vetor nulo em vetor nulo).

OBS: O objetivo da questão acima é ilustrar o fato de que a linearidade de uma função entre dois espaços vetoriais depende de como estão definidas as operações nesses espaços.

3. Em cada um dos itens abaixo encontre a transformação linear T de V em W tal que $T(\vec{u}_i) = \vec{w}_i$.

(a) Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$,

$$\vec{u}_1 = (1, 0, 0), \vec{u}_2 = (1, 1, 0), \vec{u}_3 = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$$

e

$$\vec{w}_1 = 1 - t^3, \vec{w}_2 = 1 + t, \vec{w}_3 = 2 - t^2 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R});$$

(b) Sejam $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $W = \mathbb{R}$,

$$\vec{u}_1 = t + t^2, \vec{u}_2 = 1 + t, \vec{u}_3 = 1 + t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$$

e

$$\vec{w}_1 = 1, \vec{w}_2 = 2, \vec{w}_3 = 3 \in \mathbb{R};$$

(c) Sejam $V = \mathbb{R}$ e $W = M_2(\mathbb{R})$, $\vec{u}_1 = -7 \in \mathbb{R}$ e $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 7 & -21 \\ -49 & 28 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$;

(d) Sejam $V = \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ e $W = M_2(\mathbb{R})$,

$$\vec{u}_1 = 1, \vec{u}_2 = 1+t, \vec{u}_3 = 1+t+t^2, \vec{u}_4 = 1+t+t^2+t^3, \vec{u}_5 = 1+t+t^2+t^3+t^4 \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$$

e

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \vec{w}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \vec{w}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R});$$

4. (a) Seja $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_k\}$ um conjunto L.I. de vetores em V. Mostre que se $T : V \to W$ é linear e injetiva, então $\{T(\vec{u}_1), \cdots, T(\vec{u}_k)\}$ é um conjunto L.I. de vetores em W.

(b) Seja $T : V \to W$ linear. Mostre que se $\{T(\vec{u}_1), \cdots, T(\vec{u}_m)\}$ é L.I. em W, então $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_m\}$ é L.I. em V.

5. Seja $T : V \to W$ linear. Mostre que:

(a) Se T é injetiva, então $\dim(V) \leq \dim(W)$;

(b) Se T é sobrejetiva, então $\dim(V) \geq \dim(W)$;

(c) Se T é bijetiva (e portanto isomorfismo), então $\dim(V) = \dim(W)$.

6. Dê exemplo de uma transformação linear que:

(a) Seja injetiva, mas não seja sobrejetiva;

(b) Seja sobrejetiva, mas não seja injetiva;

(c) Seja injetiva e sorejetiva;

(d) Não seja injetiva nem sobrejetiva.

7. Para cada uma das transformações lineares abaixo:

- Encontre uma base e a dimensão para o núcleo;
- Encontre uma base e a dimensão para a imagem;
- Verifique se é injetiva, sobrejetiva e/ou bijetiva.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por $T(x, y) = (2y, x - y, x)$;

(b) $S : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, definida por $S(a + bt + ct^2) = a + c + (b - c)t^2$;

(c) $R : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, definida por $R\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d$;

(d) $L_A : M_{3\times1}(\mathbb{R}) \to M_{3\times1}(\mathbb{R})$, definida por $L_A(X) = AX$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix};$$

(e) $D : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, definida por $D(p) = p'$, onde p' é a derivada de p.

8. Encontre a matriz de cada uma das transformações lineares da questão anterior, em relação às bases canônicas dos respectivos espaços dados.

9. Sejam $\alpha = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, $\beta = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ e $\gamma = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ bases de um espaço vetorial V. Suponha que α, β e γ estão relacionadas da seguinte forma:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \vec{u}_1 & = & \vec{w}_1 - \vec{w}_2 + \vec{w}_3 \\ \vec{u}_2 & = & -\vec{w}_2 + 2\vec{w}_3 \\ \vec{u}_3 & = & \vec{w}_1 + \vec{w}_3 \end{array}\right. \quad \text{e} \quad \left\{\begin{array}{lcl} \vec{w}_1 & = & \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \\ \vec{w}_2 & = & 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{w}_3 & = & 3\vec{e}_1 + \vec{e}_3 \end{array}\right.$$

(a) Determine $T : V \to V$ linear tal que

$$T(\vec{u}_1) = -\vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ T(\vec{u}_2) = \vec{e}_1 + \vec{e}_3,\ T(\vec{u}_3) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$$

(b) Encontre $[T]^{\alpha}_{\beta}$, $[T]^{\beta}_{\gamma}$, $[T]^{\alpha}_{\gamma}$, $[T]^{\beta}_{\alpha}$, $[T]^{\gamma}_{\beta}$, $[T]^{\gamma}_{\alpha}$,$[T]^{\alpha}_{\alpha}$, $[T]^{\beta}_{\beta}$ e $[T]^{\gamma}_{\gamma}$;

(c) Faça o mesmo com a transformação

$$T(a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3) = (a + b + c)\vec{u}_1 + (a - b + c)\vec{u}_2 + (a - b)\vec{u}_3;$$

(d) Para as transformações lineares dos itens (a) e (c) encontre o núcleo e a imagem.

10. Para cada uma das transformações lineares $T : V \to W$ definidas abaixo, encontre $[T]^{\beta}_{\gamma}$, onde β e γ são bases de V e W, respectivamente.

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (2x, 3x-2y+z)$, onde $\beta = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ e $\gamma = \{(1, 2), (2, 5)\}$;

(b) $T : \mathbb{R}^4 \to M_2(\mathbb{R})$ dada por $T(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, onde

$$\beta = \{(-1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, 1), (1, 1, -1, 1), (1, 1, 1, -1)\}$$

e

$$\gamma = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\};$$

(c) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, dada por $T(a + bt + ct^2) = a + 2b - 3c$, onde $\beta = \{1, 1 + t, (1 + t)^2\}$ e $\gamma = \{3\}$;

(d) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, dada por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + b + (c + d)t^2$, onde

$$\beta = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

e

$$\gamma = \{1, 1 - t, (1 - t)^2\}.$$

11. Em cada um dos itens abaixo encontre $T : V \to W$ tal que $[T]^{\beta}_{\gamma}$ é dada, bem como as bases β e γ de V e W, respectivamente.

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com

$$[T]^{\beta}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix},$$

onde $\beta = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ e $\gamma = \{(1,2),(2,5)\}$;

(b) $T : \mathbb{R}^4 \to M_2(\mathbb{R})$ com

$$[T]_\gamma^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

onde

$$\beta = \{(-1,1,1,1),(1,-1,1,1),(1,1,-1,1),(1,1,1,-1)\}$$

e

$$\gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\};$$

(c) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ com

$$[T]_\gamma^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

onde $\beta = \{1, 1+t, (1+t)^2\}$ e $\gamma = \{3\}$;

(d) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ com

$$[T]_\gamma^\beta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

e

$$\gamma = \{1, 1-t, (1-t)^2\}.$$

12. Sejam V e W espaços vetoriais e $T : V \to W$ um isomorfismo. Prove que T leva base em base, ou seja, se $\{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ é uma base de V então $\{T(\vec{v}_1), \cdots, T(\vec{v}_n)\}$ é uma base de W.

13. Sejam V e W espaços vetoriais e $T : V \to W$ um isomorfismo. Prove que T tem uma aplicação inversa $T^{-1} : W \to V$ que é linear, e também é um isomorfismo.

14. Determine as transformações lineares:

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to P_3(\mathbb{R})$ tal que $T(1,1) = t^2 - 1$ e $T(1,-1) = t^3 + 1$.

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $T(1,0,0) = 1 - t$, $T(0,1,0) = 1 + t$ e $T(0,0,1) = 1 - t^2$.

15. (a) Considere a transformação linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ dada por:

$$T(p(x)) = p'(x) + \int_0^x p(t)dt.$$

Determine $Ker(T)$ e uma base para $Im(T)$.

(b) Seja $U \subset M_3(\mathbb{R})$ o subespaço das matrizes diagonais. Considere a transformação linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to U$ definida por:

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{bmatrix} a - b + 2c & 0 & 0 \\ 0 & 2a + b & 0 \\ 0 & 0 & -a - 2b + 2c \end{bmatrix}$$

Determine uma base para $Ker(T)$ e uma base para $Im(T)$.

16. (a) Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$Ker(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$$

(b) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(2, 1) = (3, 0, 2) \quad , \quad T(1, 2) = (1, 1, 0).$$

Determine uma transformação linear $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $Ker(P) = Im(T)$.

(c) Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita, com $dim(V) = n$, e $T : V \to V$ um operador linear tal que $Im(T) = Ker(T)$. Mostre que n é par.

17. (a) Mostre que o operador linear T sobre $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$T(x, y, z) = (x - 2y, z, x + y)$$

é um isomorfismo de $\mathbb{R}^3$.

(b) Mostre que o espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$ é isomorfo ao subespaço S do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0\},$$

exibindo um isomorfismo T de $\mathbb{R}^2$ em S.

18. (a) Dado o elemento $q(t) = 3 + t \in P_1(\mathbb{R})$, considere o operador linear T sobre $P_2(\mathbb{R})$ definido por: $T(p(t)) = q(t)p'(t) + 2p(t)$ e a transformação linear $P : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definida por: $P(a + bt + ct^2) = (a + b, c, a - b)$. Determine a transformação linear $P \circ T$ e verifique se é um isomorfismo de $P_2(\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^3$.

(b) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y) = (2x, x - y, y)$$

e a transformação linear $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$P(x, y, z) = (y - z, z - x).$$

Verifique se $T \circ P$ é um automorfismo de $\mathbb{R}^3$. Em caso afirmativo, determine o automorfismo inverso.

19. (a) Considere o operador linear T sobre $\mathbb{R}^2$ definido por:

$$T(x, y) = (x + 2y, 2x + 4y).$$

Determine $[T]^{\alpha}_{\gamma}$, onde $\alpha = \{(1, -1), (0, 1)\}$ e $\gamma = \{(1, -1), (1, 1)\}$

(b) Mostre que a transformação linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$T(p(t)) = (p(-1), p(0), p(1))$$

é bijetora. Determine a matriz $[T]_\beta^\gamma$, onde γ é a base canônica de $P_2(\mathbb{R})$ e β é a base canônica de $\mathbb{R}^3$.