Fundação Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF
Colegiado de Engenharia de Produção - CPROD
Prof. Felipe Wergete
1ª Lista de Exercícios de Álgebra Linear - 2012.1

1. Mostre que o conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{R}\}$ é um espaço vetorial real, com as operações usuais de adição de elementos e multiplicação por escalar.

2. Considere o espaço vetorial real $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x > 0\}$ com as operações:

- **adição de elementos**: $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1 + y_2)$.
- **multiplicação por escalar**: $\alpha \odot (x, y) = (x^\alpha, \alpha y)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Exiba o elemento neutro da operação adição.

(b) Exiba o elemento simétrico aditivo do elemento $(x, y) \in V$.

(c) Mostre que $\alpha \odot (\vec{u} \oplus \vec{v}) = \alpha \odot \vec{u} \oplus \alpha \odot \vec{v}$, $\vec{u}$, $\vec{v} \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Verifique se o subconjunto S de $M_n(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \{A \in M_n(\mathbb{R})/A^2 = A\},$$

o conjunto das matrizes idempotentes, é um subespaço vetorial de $M_n(\mathbb{R})$.

4. Mostre que o subconjunto de $M_2(\mathbb{R})$ dado por:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} / x - y - z = 0 \right\}$$

é um subespaço vetorial de $M_2(\mathbb{R})$.

5. Considere o espaço vetorial real $P_3(\mathbb{R})$. Mostre que o subconjunto

$$U = \{p(x) \in P_3(\mathbb{R}) \,/\, p(-1) = p(1) = 0\}$$

é um subespaço vetorial de $P_3(\mathbb{R})$.

6. Mostre que o seguinte subconjunto

$$S = \left\{ f \in C([0, 1]) \,/ \int_0^1 f(x)dx = 0 \right\}$$

é um subespaço do espaço vetorial $C([0, 1])$.

7. Mostre que os seguintes subconjuntos de $M_n(\mathbb{R})$ definidos por:

$$U = \{A \in M_n(\mathbb{R})/A^t = A\}$$

$$W = \{A \in M_n(\mathbb{R})/A^t = -A\}$$

são subespaços vetoriais de $M_n(\mathbb{R})$.

8. Considere o subespaço vetorial de $M_2(\mathbb{R})$ dado por:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} / \, x - y - z = 0 \right\} .$$

Determine um sistema de geradores para U.

9. Seja W o subespaço de $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ gerado pelas matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Verifique se a matriz A dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

pertence ao subespaço W.

10. Mostre que as matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

formam um sistema de geradores para o subespaço $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \, / \, A = A^t\}$.

11. Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ e os subespaços gerados

$$U = [(1,0,0),(1,1,1)] \text{ e } W = [(0,1,0),(0,0,1)].$$

Determine um sistema de geradores para o subespaço $V = U \cap W$.

12. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$

$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \, / \, x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$$
$$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \, / \, x - y - z + t = 0\}.$$

Pede-se:

(a) Determine um sistema de geradores para o subespaço $U \cap W$

(b) Determine um sistema de geradores para o subespaço $U + W$.

(c) O subespaço $U + W$ é uma soma direta? Justifique sua resposta.

13. Sejam U o subespaço do $\mathbb{R}^3$ gerado pelo elemento $\vec{u}_1 = (1,0,0)$ e W o subespaço do $\mathbb{R}^3$ gerado pelos elementos $\vec{w}_1 = (1,1,0)$ e $\vec{w}_2 = (0,1,1)$. Mostre que o espaço vetorial $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

14. Encontre o conjunto solução $S \subset \mathbb{R}^3$ do sistema linear homogêneo

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & + & 4y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 3y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$$

Mostre que S é um subespaço do $\mathbb{R}^3$. Dado o subespaço

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, / \, x - y + z = 0\},$$

determine um sistema de geradores para o subespaço $S \cap U$.

15. Verifique quais dos subconjuntos

(a) $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(2,2,5)\}$

(b) $\{(1,1,1),(1,2,1),(3,2,-1)\}$

são linearmente independentes no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$.

16. Verifique quais dos subconjuntos

(a) $\{1,\, x-1,\, x^2+2x+1,\, x^2\}$

(b) $\{x(x-1),\, x^3,\, 2x^3-x^2,\, x\}$

são linearmente independentes no espaço vetorial real $P_4(\mathbb{R})$.

17. Mostre que o conjunto

$$\gamma = \{(1,0,0,-1),(0,1,0,1),(0,0,1,1),(1,0,0,1)\}$$

é linearmente independente no espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$.

18. Verifique se os elementos $\vec{u}_1 = (1,1,1,1), \vec{u}_2 = (0,1,1,1), \vec{u}_3 = (0,0,1,1)$ e $\vec{u}_4 = (0,0,0,1)$ formam uma base para o espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$.

19. Encontre uma base para o subespaço W de $M_3(\mathbb{R})$ definido por:

$$W = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \,/\, A^t = -A\}.$$

20. Mostre que o conjunto $\gamma = \{1,\, 1-x,\, (1-x)^2,\, (1-x)^3\}$ é uma base para o espaço vetorial real $P_3(\mathbb{R})$.

21. Determine uma base para o subespaço vetorial de $M_2(\mathbb{R})$ dado por:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} / \, x - y - z = 0 \right\}.$$

22. Considere os seguintes subespaços vetoriais de $P_2(\mathbb{R})$

$$U = \{p(x) = a + bx + cx^2 \in P_2(\mathbb{R}) \,/\, a - 2c = 0\}$$

$$W = [1-x,\, x-x^2].$$

Determine uma base para o subespaço $U \cap W$.

23. Para quais valores de $a \in \mathbb{R}$ o conjunto

$$\beta = \{(a,1,0),(1,a,1),(0,1,a)\}$$

é uma base para o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$?

24. Mostre que os polinômios

$$p_1(x) = 1,\; p_2(x) = 1 + x,\; p_3(x) = 1 - x^2 \text{ e } p_4(x) = 1 - x - x^2 - x^3$$

formam uma base para o espaço vetorial $P_3(\mathbb{R})$.

25. Sejam U e W subespaços vetoriais de dimensão 3 do espaço vetorial $\mathbb{R}^4$. Considerando que

$$U \cap W = [(1,2,1,0), (-1,1,0,1), (1,5,2,1)],$$

qual é a dimensão do subespaço $U + W$?

26. Considere o espaço vetorial $P_3(\mathbb{R})$ com a base ordenada

$$\gamma = \{1,\ 1-x,\ (1-x)^2,\ (1-x)^3\}.$$

Sendo $p(x) = 3 - 2x - x^2$ encontre $[p]_\gamma$.

27. Considere a base $\beta = \{2,\ a+x,\ 1+bx^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Determine as constantes $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que as coordenadas do polinômio $p(x) = x + x^2$ em relação à base β seja dado por:

$$[p]_\beta = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

28. Considere a base ordenada $\gamma = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ do $\mathbb{R}^3$ onde

$$\vec{v}_1 = (1,0,-1),\ \vec{v}_2 = (1,1,1) \text{ e } \vec{v}_3 = (1,0,0).$$

Encontre as coordenadas do elemento $\vec{u} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ com relação à base ordenada γ.

29. Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$. A matriz de mudança da base ordenada $\gamma = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, onde $\vec{u}_1 = (1,1)$ e $\vec{u}_2 = (-2,2)$, para a base ordenada $\alpha = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é dada por:

$$[I]^\gamma_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Determine a base ordenada α. Determine o elemento $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$[\vec{u}]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

30. Considere as bases $\beta = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ e $\gamma = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, relacionadas da seguinte forma:

$$\begin{cases} \vec{w}_1 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 - \vec{u}_3 \\ \vec{w}_2 = 2\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3 \\ \vec{w}_3 = 3\vec{u}_1 + \vec{u}_3 \end{cases}$$

Pede-se:

(a) Determine as matrizes de mudança de base $[I]^\beta_\gamma$ e $[I]^\gamma_\beta$.

(b) Considere que o elemento $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ tem coordenadas

$$[\vec{u}]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Determine as coordenadas do elemento $\vec{u}$ com relação à base γ.

31. Considere a seguinte matriz de mudança de base

$$[I]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Encontre

(a) $[\vec{v}]_{\beta}$, onde $[\vec{v}]_{\alpha} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(b) $[\vec{v}]_{\alpha}$, onde $[\vec{v}]_{\beta} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.