

EXAME FINAL / GABARITO

(1º) Note que $3-x = (1+x) + 2 \cdot (1-x)$.

Logo, $T(3-x) = T(1+x) + 2T(1-x)$.

$$\Rightarrow T(3-x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(2º) (a) $W = \{(x, x, 0, -3x) + (2y, -y, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$$\Rightarrow W = [(1, 1, 0, -3), (2, -1, 1, 0)]$$

Como os vetores $(1, 1, 0, -3)$ e $(2, -1, 1, 0)$ são LI, pois não são múltiplos, e geram W , segue que $\alpha = \{(1, 1, 0, -3), (2, -1, 1, 0)\}$ é uma base de W .

(b) Seja $\vec{v} \in W \cap U$. Então

$$\vec{v} = (x+2y, x-y, y, -3x) = (2a+3b, -3a-2b, a+2b, 2a+2b)$$

$$\vec{v} = (2a+3b, -3a-2b, a+2b, 2a+2b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -b \\ y = a+2b \\ b = 2a \end{cases}$$

Logo: $\vec{v} = (8a, -7a, 5a, 6a), a \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow W \cap U = [(8, -7, 5, 6)]$$

$$\Rightarrow \dim(W \cap U) = 1$$

3º (a) Seja $\vec{v} = (a, b, c, d, e, f) \in \text{Ker}(T)$.

Então $T(\vec{v}) = \vec{0} \in \mathbb{R}^5$.

$$\begin{cases} e=0 \\ c=0 \\ d+e+f=0 \\ -b+2d+f=0 \\ a+2b+d+3f=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e=0 \\ c=0 \\ f=-d \\ b=d \\ a=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = (0, b, 0, b, 0, -b), b \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \text{Ker}(T) = [(0, 1, 0, 1, 0, -1)].$$

(b) Note que $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$.

Pelo Teo. do Núcleo e da Imagem, temos que

$$\dim(\text{Im}(T)) = \dim(\mathbb{R}^6) - \dim(\text{Ker}(T))$$

$$\Rightarrow \dim(\text{Im}(T)) = 6 - 1 = 5.$$

Sendo $\text{Im}(T)$ um subespaço de $\mathbb{R}^5$ com

$\dim(\text{Im}(T)) = 5$, segue que $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^5$.

Portanto, T é sobrejetora.

4º (a) Vamos escolher 2 vetores LI em $\mathbb{R}^2$,

$\vec{u}$ e $\vec{v}$, tais que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ e $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$.

$$\text{Tomemos } \vec{w}_1 = (1, 1) \text{ e } \vec{w}_2 = \left(\frac{1}{3}, -1\right).$$

$$\text{Então } \langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle = 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot (-1) = 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{w}_1 \perp \vec{w}_2.$$

Também temos que

$$\begin{cases} \|\vec{w}_1\|^2 = 3 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 4 \\ \|\vec{w}_2\|^2 = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + (-1) \cdot (-1) = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|\vec{w}_1\| = 2 \text{ e } \|\vec{w}_2\| = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Sejam } \vec{u} = \frac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|} \text{ e } \vec{v} = \frac{\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|}.$$

É claro que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$.

Logo, $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ é uma b.o.n. de $\mathbb{R}^2$, onde

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ e } \vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$(b) \textcircled{1} \begin{cases} T(1,0) = (0,1) = 0 \cdot (1,0) + 1 \cdot (0,1) \\ T(0,1) = (-1,0) = -1 \cdot (1,0) + 0 \cdot (0,1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow [T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} T\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ T\left(\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{6} \vec{u} + \frac{1}{2} \vec{v} \end{cases}$$

$$\Rightarrow [T]_{\beta}^{\beta} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(c) Note que

$$([T]_{\beta}^{\beta})^t \cdot [T]_{\beta}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} \neq I_2.$$

Logo, $[T]_{\beta}^{\beta}$ não é ortogonal.

Como β é uma base ortonormal, segue que T não é ortogonal.

5° (a) Seja α = base canônica de $\mathbb{R}^3$.

$$\Rightarrow A = [T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

• Autovetores associados a $\lambda_1 = 0$

$$(A - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x + y + 2z = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = (-y - 2z, y, z), \text{ com } (y, z) \neq (0, 0).$$

Por exemplo:

$$\vec{u} = (-1, 1, 0) \text{ e } \vec{v} = (-2, 0, 1)$$

• Autovetores associados a $\lambda_2 = 6$

$$(A - \lambda_2 I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = (x, x, 2x), x \neq 0, \Rightarrow \vec{w} = (1, 1, 2)$$

(b) Considere os vetores

$$\vec{u} = (-1, 1, 0) \text{ e } \vec{w} = (1, 1, 2).$$

Vamos encontrar um vetor $\vec{u}'$ tal que

$$T(\vec{u}') = (0, 0, 0) \text{ e } \vec{u}' \perp \vec{u}.$$

$$\Rightarrow \vec{u}' = (-y - 2z, y, z).$$

Para que $\vec{u}' \perp \vec{u}$, devemos ter

$$y + 2z + y = 0 \Rightarrow y = -2z$$

$$\therefore \vec{u}' = (-z, -2z, z), z \neq 0$$

$$\text{Tomemos } \vec{\tilde{u}} = (-1, -2, 1).$$

Logo $\gamma = \{\vec{u}, \vec{w}, \vec{\tilde{u}}\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

Note que $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{w}\| = \sqrt{6}$ e $\|\vec{\tilde{u}}\| = \sqrt{3}$.

$$\text{Logo, } \beta = \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\}$$

é uma b.o.m. de autovetores de T .

(c) É fácil ver que

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$