

GABARITO

2ª CHAMADA DA 2ª PROVA

1º (a) Seja $\theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$. Sabemos que

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

Note que:

- $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot \sqrt{3} = 1$
- $\|\vec{u}\|^2 = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$
- $\|\vec{v}\|^2 = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 4$

Logo:

$$\cos(\theta) = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}}$$

(b) Seja $\vec{v} \in W^\perp$, $\vec{v} = (x, y, z)$. Então

$$\langle \vec{v}, (0, 1, 0) \rangle = 0 = \langle \vec{v}, (-1, 0, 1) \rangle.$$

$$\text{Mas: } \langle \vec{v}, (0, 1, 0) \rangle = -x + y$$

$$\langle \vec{v}, (-1, 0, 1) \rangle = -2x + y + z.$$

$$\text{Logo: } \begin{cases} -x + y = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z$$

$$\text{Logo, } \vec{v} = (x, x, x), x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow W^\perp = [(1, 1, 1)].$$

② Seja α a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

Sabemos que, em relação ao produto interno usual, α é uma base ortonormal.

Note que

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = A.$$

(a) Como α é uma b.o.m. e a matriz A é simétrica, então T é auto-adjunto.

(b) É fácil ver que $\det(A) = 4$.

Logo A não é ortogonal.

$\Rightarrow T$ não é ortogonal.

(c) Sim. Segue do Teorema Espectral, uma vez que T é auto-adjunto.

③ Note que

$$V = \{(x, y, x+y) \mid x, y \in \mathbb{R}\};$$

$$\text{ou } V = [(1, 0, 1), (0, 1, 1)].$$

Como os vetores $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$ são LI, temos que

$\alpha = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ é base de V .

Mas α não é uma b.o.m.

Para encontrarmos uma b.o.m. façamos o seguinte:

Fixe o vetor $(1, 0, 1)$ e seja $(a, b, a+b)$ um vetor qualquer de V . Queremos que $\langle (1, 0, 1), (a, b, a+b) \rangle = 0$.

Para isto, devemos ter:

$$a + (a+b) = 0 \Rightarrow b = -2a.$$

$\Rightarrow (a, -2a, -a)$ é ortogonal a $(1, 0, 1)$.

Logo, $\beta = \{(1, 0, 1), (1, -2, -1)\}$ é uma base ortogonal de V .

Note que:

$$\|(1, 0, 1)\| = \sqrt{2} \text{ e } \|(1, -2, -1)\| = \sqrt{6}.$$

Logo:

$$\gamma = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

é uma base ortonormal de V .

4º) Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um operador linear t.q.

$$[T]_c = A,$$

onde $c = \{(1, 0), (0, 1)\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$.

Como A é simétrica, T é diagonalizável.

Vamos encontrar a "forma diagonal" de A .

Polinômio Característico de T

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda-5)$$

Auto-valores de T

$$\lambda_1 = 0 \text{ e } \lambda_2 = 5.$$

Auto-vetores de T

$$\bullet \lambda_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -2y$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = (-2y, y), y \neq 0$$

$$\bullet \lambda_2 = 5 \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 2x$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = (x, 2x), x \neq 0$$

Base de Auto-vetores

$$\alpha = \{(-2, 1), (1, 2)\}$$

Forma diagonal de A

$$D = [T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Sabemos que } [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = [I]_{\mathcal{C}}^{\alpha} \cdot [T]_{\alpha}^{\alpha} \cdot [I]_{\alpha}^{\mathcal{C}} \quad (*)$$

É fácil ver que:

$$[I]_{\mathcal{C}}^{\alpha} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = M$$

Como $[I]_{\alpha}^{\mathcal{C}} = ([I]_{\mathcal{C}}^{\alpha})^{-1}$, então

$$M^{-1} = [I]_{\alpha}^{\mathcal{C}} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Por } (*): \boxed{A = M D M^{-1}}.$$

Logo, temos que $A^{2013} = M D^{2013} M^{-1}$, onde

$$D^{2013} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5^{2013} \end{pmatrix}.$$

Fazendo a multiplicação:

$$A^{2013} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5^{2013} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{2013} = \begin{pmatrix} 0 & 5^{2013} \\ 0 & 2 \cdot 5^{2013} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{2013} = \begin{pmatrix} 5^{2012} & 2 \cdot 5^{2012} \\ 2 \cdot 5^{2012} & 4 \cdot 5^{2012} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{2013} = 5^{2012} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \boxed{A^{2013} = 5^{2012} \cdot A}$$