Gabarito / 2ª Prova

Turma 12 - Álgebra Linear

1º Se α fosse ortonormal, então teríamos

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot (-3) = 10 - 2 - 9 = -1 \neq 2.$

Logo α <u>não</u> é ortonormal.

2º Note que

$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \langle T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2) \rangle = \langle \vec{v}_1, -\vec{v}_2 \rangle = -\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle.$

$\Rightarrow 2\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0 \therefore \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0$, i.e., $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$.

3º (a) Seja α a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

com relação ao <u>p.i.</u> usual α é uma <u>b.o.n.</u>

Se $[T]_\alpha^\alpha$ for simétrica, então T será auto-adjunto.

Note que

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A.$$

Como $A = A^t$, T é auto-adjunto.

(b) <u>Polinômio Característico</u>

$$P(\lambda) := \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1+\lambda)(2-\lambda^2)$$

<u>Auto-valores</u>: $P(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1;\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = \sqrt{2}$

Auto-vetores

$\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ é auto-vetor de T associado ao auto-valor λ

se: $(A - \lambda I)(\vec{v}) = \vec{0}$.

- $\lambda_1 = -1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = (0, 0, z), \ z \neq 0$$

- $\lambda_2 = -\sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1+\sqrt{2})x + y = 0 \\ x + (-1+\sqrt{2})y = 0 \\ (-1+\sqrt{2})z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -(1+\sqrt{2})x \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = (x, -(1+\sqrt{2})x, 0), \ x \neq 0$$

- $\lambda_3 = \sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (1-\sqrt{2})x + y = 0 \\ x + (-1-\sqrt{2})y = 0 \\ (-1-\sqrt{2})z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = (\sqrt{2}-1)x \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_3 = (x, (\sqrt{2}-1)x, 0), \ x \neq 0$$

(c) Como os auto-valores são distintos, os auto-vetores associados são LI. Uma vez que 3 vetores LI em um espaço de dimensão 3 formam uma base, temos uma base β formada por auto-vetores. Por exemplo:

$\beta = \{(0,0,1), (1,-1-\sqrt{2},0), (1,\sqrt{2}-1,0)\}$.

$$\Rightarrow [T]^{\beta}_{\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

4º) Porque T é auto-adjunto. O Teorema Espectral nos garante que existe uma base ortonormal de $\mathbb{R}$ auto-vetores de T. Logo, T é diagonalizável.

5º) (a) $S = [(2,1,0), (-3,0,1)]$.

base de W: $\beta = \{(2,1,0), (-3,0,1)\}$.

Se $\vec{v} = (a,b,c) \in W^{\perp}$ então

$\langle \vec{v}, (2,1,0) \rangle = 0$ e $\langle \vec{v}, (-3,0,1) \rangle = 0$

$\Rightarrow 2a + b = 0$ e $-3a + c = 0$

$\therefore \vec{v} = (a, -2a, 3a)$

$\Rightarrow S^{\perp} = \{(x, -2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

(b) base de $S^{\perp}$: $\gamma = \{(1,-2,3)\}$.

Usando o método de G-Schmidt é fácil ver que os vetores

$$(2,1,0),\ \left(-\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 1\right)$$

são ortogonais e geram S.

Logo, as bases

$$\tilde{\beta} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right), \left(-\frac{3}{\sqrt{70}}, \frac{6}{\sqrt{70}}, \frac{5}{\sqrt{70}}\right)\}$$

e

$$\tilde{\gamma} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)\right\}$$

são b.o.n de S e $S^{\perp}$, respectivamente.

(c) como $\mathbb{R}^3 = S \oplus S^{\perp}$, então

$\alpha = \tilde{\beta} \cup \tilde{\gamma}$ é b.o.n. de $\mathbb{R}^3$.

$$\Rightarrow \vec{v} = (x,y,z) = a\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right) + b\left(-\frac{3}{\sqrt{70}}, \frac{6}{\sqrt{70}}, \frac{5}{\sqrt{70}}\right) +$$

$$+ c\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$$

$$\Rightarrow P(x,y,z) = a\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right) + b\left(-\frac{3}{\sqrt{70}}, \frac{6}{\sqrt{70}}, \frac{5}{\sqrt{70}}\right),$$

onde $a = \dfrac{2x+y}{\sqrt{5}}$ e $b = \dfrac{-3x+6y+5z}{\sqrt{70}}$.

~~Logo~~ Logo:

~~$P(x,y,z)$~~ $$P(x,y,z) = \left(\frac{13x+2y-3z}{14}, \frac{2x+10y+6z}{14}, \frac{6y-3x+5z}{14}\right)$$