

GABARITO / 2ª PROVA
TURMA C2

1º) Seja $\vec{u} \in V$ tal que $[\vec{u}]_\alpha = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

Como α é uma base ORTONORMAL, temos que:

(i) $\langle \vec{u}, 2\vec{v}_1 \rangle = 4 \Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{v}_1 \rangle = 2$ (~~o p.i. é linear~~).

Por outro lado: $\langle \vec{u}, 2\vec{v}_1 \rangle = 2\langle \vec{u}, \vec{v}_1 \rangle = 2(a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 0)$

$$\Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

(ii) $\langle \vec{u}, \vec{v}_2 \rangle = -1 \Rightarrow a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 0 = -1 \therefore \boxed{b = -1}$

(iii) $\langle \vec{u}, \vec{v}_3 \rangle = 3 \Rightarrow a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 1 = 3 \therefore \boxed{c = 3}$

Portanto:

$$[\vec{u}]_\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

2º) Seja α a base canônica de $\mathbb{R}^2$.

Como o p.i. é o usual, α é uma b.o.m.

(a) $A = [T]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

Como $A = A^t$ e α é uma b.o.m., segue que T é auto-adjunto.

(b) Polinômio Característico

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = -(1+\lambda)(1-\lambda) - 3 = -(1-\lambda^2) - 3$$

$$\therefore P(\lambda) = \lambda^2 - 4$$

Auto-valores : $P(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2 \text{ e } \lambda_2 = -2$

Auto-vetores :

(i) $\lambda_1 = 2$

$$(A - \lambda I)(\vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x - \sqrt{3}y = 0 \\ -\sqrt{3}x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$$

$$\vec{v}_1 = \left(x, -\frac{\sqrt{3}}{3}x \right), x \neq 0$$

(ii) $\lambda_2 = -2$

$$(A - \lambda I)(\vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a - \sqrt{3}b = 0 \\ -\sqrt{3}a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow b = \sqrt{3}a$$

$$\therefore \vec{v}_2 = (a, \sqrt{3}a), a \neq 0$$

(c) seja $\beta = \{(3, -\sqrt{3}), (1, \sqrt{3})\}$.

Como $\lambda_1 = 2 \neq -2 = \lambda_2$, os auto-vetores $(3, -\sqrt{3})$ e $(1, \sqrt{3})$ são L.I.

Uma vez que 2 vetores L.I. num espaço de dim. 2 formam uma base, segue que β é uma base de autovetores de T . Portanto T é diagonalizável.

Ansim:

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

3º) Seja α a base canônica de $\mathbb{R}^4$.

Como o p.i. é o usual, α é uma b.o.m.

~~Observe~~ Observe que

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

é uma matriz simétrica. Logo T é auto-adjunto, pois α é ortonormal.

Neste caso, o Teorema Espectral garante a existência de uma base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ formada por auto-vetores de T .

4º) Como T é ortogonal: $\langle T\vec{u}, T\vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$,
 ~~$\langle T\vec{u}, T\vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, T\vec{v} \rangle$~~ $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$.

Por hipótese: $T(\vec{v}_1) = \vec{v}_1$ e $T(\vec{v}_2) = -\vec{v}_2$.

Avim:

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \langle T\vec{v}_1, T\vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{v}_1, -\vec{v}_2 \rangle = -\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$$

$$\Rightarrow 2\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0 \therefore \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2.$$

5º) (a) base de W :

$$W = \{ (-2z, y, z) \mid z, y \in \mathbb{R} \} = [(-2, 0, 1), (0, 1, 0)].$$

Note que $(-2, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$ são LI, pois um não é múltiplo do outro.

Logo, $\beta = \{(-2, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ é uma base de W .

Para que $\vec{v} = (x, y, z) \in W^\perp$, devemos ter que

$$\left. \begin{array}{l} \langle \vec{v}, (-2, 0, 1) \rangle = 0 \\ \langle \vec{v}, (0, 1, 0) \rangle = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -2x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Daí, $\vec{v} = (x, 0, 2x)$. Portanto:

$$W^\perp = \{ (x, 0, 2x) \mid x \in \mathbb{R} \}.$$

(b) Uma base para $W^\perp$ é, por exemplo,

$$\gamma = \{(1, 0, 2)\}.$$

Note que β e γ já são ortogonais. Basta normalizar os vetores. É fácil obter

$$\tilde{\beta} = \left\{ \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}} \right), (0, 1, 0) \right\} e$$

$$\tilde{\gamma} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \right\},$$

bases ortonormais de W e $W^\perp$ respectivamente.

(c) Como $\mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp$,

$$X = \left\{ \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}} \right), (0, 1, 0), \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \right\}$$

é uma b.o.n. de $\mathbb{R}^3$. Seja $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Então:

$$\vec{v} = \frac{z-2x}{\sqrt{5}} \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) + y(0, 1, 0) + \frac{x+2z}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}} \right).$$

Calculando $P(\vec{v})$, obtemos:

$$P(x, y, z) = \frac{z-2x}{\sqrt{5}} \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) + y(0, 1, 0)$$

$$\Rightarrow P(x, y, z) = \left(\frac{4x-2z}{5}, y, \frac{z-2x}{5} \right)$$