Professor: Felipe Wergete Cruz

Data: 03/05/2012 **Horário**: das 14:00h às 16:00h

Aluno: GABARITO **CPF**: ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

1ª Avaliação de Álgebra Linear

Instruções

◇ Escreva seu nome e o número de seu CPF no lugar indicado desta folha.
◇ Confira que há **4 folhas** no caderno de prova que **não podem ser destacadas**.
◇ Não é permitido qualquer tipo de consulta.
◇ Leia atentamente o enunciado das questões antes de tentar solucioná-las.
◇ As respostas somente serão aceitas com **justificativas**.
◇ Escreva **todos** os detalhes dos cálculos que o levarem a uma solução.

Questões

1. Seja $W = [(-1, 0, 2), (2, 3, 1)]$ um subespaço de $\mathbb{R}^3$. Determine o valor de k para que o vetor $\vec{v} = (5, 6, k) \in W$. (1,0 ponto)

Para que $\vec{v}$ pertença à W, devemos encontrar x e $y \in \mathbb{R}$ tais q

$\vec{v} = x(-1,0,2) + y(2,3,1)$. Neste caso:

$$(5,6,K) = x(-1,0,2) + y(2,3,1) \Rightarrow \begin{cases} -x+2y = 5 \\ 3y = 6 \\ 2x+y = K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ K = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{K=0}$$

2. (a) Mostre que o conjunto $\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de $M_2(\mathbb{R})$. (1,0 ponto)

(b) Encontre as coordenadas de $\vec{v} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ em relação à base α. (1,0 ponto)

(c) Encontre $[I]^{\alpha}_{\beta}$, a matriz de mudança da base α para a base canônica de $M_2(\mathbb{R})$, a saber: $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$. (1,0 ponto)

(a) Como α possui 4 vetores e $\dim(M_2(\mathbb{R})) = 4$, para verificar que α é base de $M_2(\mathbb{R})$ basta checar que α é LI. Para isto, suponha que

$$a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} a + 2c = 0 \\ -a + b = 0 \\ -b + c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = c = d = 0 \Rightarrow \alpha \text{ é LI}.$$

Portanto α é base de $M_2(\mathbb{R})$.

(b) Seja $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Como α é base de $M_2(\mathbb{R})$, podemos escrever $\vec{v}$ como combinação linear dos vetores da base α.

Vamos determinar $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$ e $\underline{t} \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{v} = x\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2z = 7 \\ -x + y = 1 \\ -y + z = 1 \\ t = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \\ t = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ou

$$[\vec{v}]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

continua →

(c) Facilmente mostra-se que

$$[I]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. (a) Considere o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$:

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x - y - z = 0 \text{ e } t = 0\}.$$

Determine uma base e a dimensão de V. $(1,5$ pontos$)$

(b) Mostre que $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y = 1\}$ **não** é um subespaço de $\mathbb{R}^3$. $(1,5$ pontos$)$

(a) $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - y - z = 0 \text{ e } t = 0\}$

$V = \{(x, y, x-y, 0) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$

$V = \{x(1,0,1,0) + y(0,1,-1,0) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$

$V = [(1,0,1,0), (0,1,-1,0)]$

Como os vetores $(1,0,1,0)$ e $(0,1,-1,0)$ são LI (pois um não é múltiplo do outro), segue que

$\gamma = \{(1,0,1,0), (0,1,-1,0)\}$ é uma base de $V \Rightarrow \dim(V) = 2$.

-11- outras possíveis respostas: $\{(1,1,0,0), (0,-1,1,0)\}$

$\{(1,1,0,0), (1,0,1,0)\}$

(b) Como o vetor nulo $(0,0,0) \notin W$, pois $0+0 \neq 1$, segue que W não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

4. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear dada por:

$$T(x, y) = (x - 2y, x, x + y).$$

(a) Determine $[T]_\beta^\alpha$, onde $\alpha = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\beta = \{(1, -1, 2), (0, 1, 0), (2, 0, 1)\}$. (1,0 ponto)

(b) Utilizando a matriz encontrada no item anterior, determine as coordenadas do vetor $T(\vec{v})$ com relação a base β, onde $\vec{v} = (1, 2)$. (0,5 ponto)

(c) Determine Ker(T). A transformação T é *injetiva*? Justifique! (1,0 ponto)

(d) Use o Teorema do Núcleo e da Imagem para mostrar que T **não** é *sobrejetiva*. (0,5 ponto)

(a) Note que

$$T(1,0) = (1,1,1) = \frac{1}{3}(1,-1,2) + \frac{4}{3}(0,1,0) + \frac{1}{3}(2,0,1)$$

$$T(0,1) = (-2,0,1) = \frac{4}{3}(1,-1,2) + \frac{4}{3}(0,1,0) - \frac{5}{3}(2,0,1)$$

$$\Rightarrow [T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

(b) Sabemos que

$$[T(\vec{v})]_\beta = [T]_\beta^\alpha [\vec{v}]_\alpha. \quad (*)$$

Como $\vec{v} = (1,2)$ e α é a base canônica de $\mathbb{R}^2$, então: $[\vec{v}]_\alpha =$

Por $(*)$:

$$[T(\vec{v})]_\beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix},$$

ou seja: $T(\vec{v}) = 3(1,-1,2) + 4(0,1,0) - 3(2,0,1)$.

OBS: Note que $T(\vec{v}) = (-3, 1, 3)$.

continua

(c) Seja $\vec{v} \in Ker(T)$. Então se $\vec{v} = (x, y)$, temos que $T(x,y) = (0,0,0)$, ou seja,

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow \vec{v} = (0,0)$$

$$\Rightarrow Ker(T) = \{(0,0)\}.$$

Logo, T é injetiva, pois o Ker(T) contém apenas o vetor nulo.

(d) Pelo Teo. do núcleo e da Imagem,

$$\dim(\mathbb{R}^2) = \dim(Ker(T)) + \dim(Im(T))$$

$$\Rightarrow 2 = 0 + \dim(Im(T)) \therefore \dim(Im(T)) = 2$$

Como $\dim(Im(T)) = 2 \leq 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, segue que

$Im(T) \neq \mathbb{R}^3 \Rightarrow T$ <u>não</u> é sobrejetora.

Felipe Wergete Cruz

Profº. MSc.Felipe Wergete Cruz
Docente
Matricula 1777387
UNIVASF