Professor: Felipe Wergete Cruz
Data: 03/05/2012 **Horário**: das 10:00h às 12:00h

Aluno: GABARITO **CPF**: ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

1ª Avaliação de Álgebra Linear

Instruções

◊ Escreva seu nome e o número de seu CPF no lugar indicado desta folha.
◊ Confira que há **4 folhas** no caderno de prova que **não podem ser destacadas**.
◊ Não é permitido qualquer tipo de consulta.
◊ Leia atentamente o enunciado das questões antes de tentar solucioná-las.
◊ As respostas somente serão aceitas com **justificativas**.
◊ Escreva **todos** os detalhes dos cálculos que o levarem a uma solução.

Questões

1. Determine os valores de k para que o vetor $\vec{w} = (3, 4, k) \in \mathbb{R}^3$ **não** seja uma combinação linear dos vetores $\vec{u} = (1, 1, 0)$ e $\vec{v} = (0, 2, 2)$. (1,0 ponto)

Suponha que $\vec{w} \in [\vec{u}, \vec{v}]$. Então existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, ou seja,

$$(3, 4, k) = a(1,1,0) + b(0,2,2) \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a + 2b = 4 \\ 2b = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \frac{1}{2} \\ k = 1 \end{cases}$$

Logo, como não queremos que $\vec{w}$ pertença a $[\vec{u}, \vec{v}]$, devemos ter que $\boxed{k \neq 1}$.

2. (a) Mostre que o conjunto $\beta = \{(1,-1,0),(0,1,-1),(2,0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. (1,0 ponto)

   (b) Encontre as coordenadas de $\vec{v} = (7,-1,2)$ em relação à base β. (1,0 ponto)

   (c) Encontre $[I]_{\varepsilon}^{\beta}$, a matriz de mudança da base β para a base canônica de $\mathbb{R}^3$, a saber: $\varepsilon = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. (1,0 ponto)

(a) Note que β é L.I. De fato, se

$x(1,-1,0) + y(0,1,-1) + z(2,0,1) = (0,0,0)$, então

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = 0 \text{ ; logo } \beta \text{ é L.I.}$$

Como β possui 3 vetores e $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, concluímos que β é uma base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Como β é base de $\mathbb{R}^3$ e $\vec{v} = (7,-1,2) \in \mathbb{R}^3$, podemos escrever $\vec{v}$ como combinação linear dos vetores da base β. Vamos determinar $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $c \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{v} = a(1,-1,0) + b(0,1,-1) + c(2,0,1)$$

$$(7,-1,2) = (a+2c, -a+b, -b+c) \Rightarrow a = \frac{5}{3},\ b = \frac{2}{3},\ c = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow (7,-1,2) = \frac{5}{3}(1,-1,0) + \frac{2}{3}(0,1,-1) + \frac{8}{3}(2,0,1)$$

(c) Facilmente mostra-se que

$$[I]_{\varepsilon}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. (a) Considere o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x - y - z = 0\}.$$

Determine uma base e a dimensão de W. (1,5 pontos)

(b) Mostre que $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x - z = 1\}$ **não** é um subespaço de $\mathbb{R}^4$. (1,5 pontos)

(a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\} = \{(x, y, x-y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$W = \{x(1,0,1) + y(0,1,-1) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = [(1,0,1), (0,1,-1)]$

Como os vetores $(1,0,1)$ e $(0,1,-1)$ são LI (pois um não é múltiplo do outro), segue que

$\alpha = \{(1,0,1), (0,1,-1)\}$ é uma base de $W \Rightarrow \dim(W) = 2$.

—||— outras possíveis respostas: $\{(1,1,0), (1,0,1)\}$ e $\{(1,1,0), (0,-1,$

(b) Se U fosse um subespaço de $\mathbb{R}^4$, o vetor nulo $(0,0,0,0)$ pertenceria à U. O que não é o caso, pois $0 - 0 \neq 1$.

Portanto U não é um subespaço de $\mathbb{R}^4$.

4. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear dada por:

$$T(x, y, z) = (x - 2y, x + y - 3z).$$

(a) Determine $[T]^{\alpha}_{\beta}$, onde $\alpha = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e $\beta = \{(1,1),(0,1)\}$. (1,0 ponto)

(b) Utilizando a matriz encontrada no item anterior, determine as coordenadas do vetor $T(\vec{v})$ com relação a base β, onde $\vec{v} = (1,2,3)$. (0,5 ponto)

(c) Determine Ker(T) e dim(Ker(T)). A transformação T é *injetiva*? Justifique! (1,0 ponto)

(d) Usando o Teorema do Núcleo e da Imagem, conclua que T é *sobrejetiva*. (0,5 ponto)

(a) Note que
$$\begin{cases} T(1,0,0) = (1,1) = 1\cdot(1,1) + 0\cdot(0,1) \\ T(0,1,0) = (-2,1) = -2\cdot(1,1) + 3\cdot(0,1) \\ T(0,0,1) = (0,-3) = 0\cdot(1,1) + (-3)\cdot(0,1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow [T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

(b) sabemos que
$$[T(\vec{v})]_{\beta} = [T]^{\alpha}_{\beta}[\vec{v}]_{\alpha}. \quad (*)$$

Como $\vec{v} = (1,2,3)$ e α é a base canônica de $\mathbb{R}^3$, então
$$[\vec{v}]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Usando $(*)$:
$$[T(\vec{v})]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix},$$

ou seja, $T(\vec{v}) = T(1,2,3) = -3(1,1) - 3(0,1)$.

OBS: Este resultado é fácil de "chequear", pois $T(1,2,3) = (-3, -$

continua

(c) $Ker(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x,y,z) = (0,0)\}$

~~⇒~~ Seja $\vec{v} = (x,y,z) \in Ker(T)$. Então

$$T(x,y,z) = (x-2y,\ x+y-3z) = (0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2y=0 \\ x+y-3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y \\ z=y \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = (2y, y, y),\ y \in \mathbb{R}$$

Logo: $Ker(T) = [(2,1,1)]$. ← outra resposta: $Ker(T) = \left[\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right]$ + são infinitas

$$\Rightarrow \dim(Ker(T)) = 1.$$

Como $\dim(Ker(T)) \neq 0$, segue que T não é injetora.

(d) Pelo Teo. do núcleo e da Imagem:

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(Ker(T)) + \dim(Im(T))$$

$$\Rightarrow \dim(Im(T)) = 3 - 1 = 2.$$

Como $Im(T)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$ e $\dim(Im(T)) = 2 = \dim$ segue que $Im(T) = \mathbb{R}^2$. Portanto T é sobrejetora.

Felipe Wergete Cruz

Profº. MSc. Felipe Wergete Cruz
Docente
Matricula 1777387
UNIVASF