

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

CPROD - COLEGIADO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

EXAME FINAL DE ÁLGEBRA LINEAR - 2012.1 - 20/11/2012

-
- Lembre que você será avaliado pelo que tiver escrito, não pelo que tiver pensado. Resolva as questões com calma e atenção, explicando/justificando sua resolução.
 - Leia atentamente o enunciado das questões antes de tentar solucioná-las.
 - Não é permitido qualquer tipo de consulta.
-

1. (1,0 pt) Seja $T : P_1(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que

$$T(1+x) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad T(1-x) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine a matriz $T(3-x) \in M_2(\mathbb{R})$.

2. Sejam W e U os subespaços de $\mathbb{R}^4$ dados por

$$W = \{(x+2y, x-y, y, -3x) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \text{ e } U = [(2, -3, 1, 2), (3, -2, 2, 2)].$$

- (a) (0,5 pt) Determine uma base para W .
(b) (1,0 pt) Determine $W \cap U$ e $\dim(W \cap U)$.

3. Seja $T : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^5$ a transformação linear definida por

$$T(a, b, c, d, e, f) = (e, c, d+e+f, -b+2d+f, a+2b+d+3f).$$

- (a) (1,0 pt) Encontre o núcleo de T .
(b) (1,0 pt) Mostre que T é sobrejetora.

4. Seja $V = \mathbb{R}^2$ munido do produto interno $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 3x_1x_2 + y_1y_2$ e seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear dado por $T(x, y) = (-y, x)$.

- (a) (0,5 pt) Determine uma base ortonormal β de V com respeito a esse produto interno.
(b) (0,5 pt) Considerando α como sendo a base canônica de $\mathbb{R}^2$, encontre $[T]_\alpha^\alpha$ e $[T]_\beta^\beta$.
(c) (1,0 pt) O operador T é ortogonal com respeito ao produto interno acima? Justifique!

5. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear dado por

$$T(x, y, z) = (x+y+2z, x+y+2z, 2x+2y+4z).$$

- (a) (1,5 pts) Sabendo que $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 6$ são os autovalores de T , encontre os autovetores associados respectivamente a λ_1 e λ_2 .
(b) (1,0 pt) Determine uma base ortonormal β de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T .
(c) (1,0 pt) Calcule $[T]_\beta^\beta$.