UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

CPROD - COLEGIADO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

PROVA SUBSTITUTIVA DE ÁLGEBRA LINEAR - 2012.1 - 01/11/2012

◇ Leia atentamente o enunciado das questões antes de tentar solucioná -las.
◇ As respostas somente serão aceitas com **justificativas**.
◇ Não é permitido qualquer tipo de consulta.

---

1. Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$. Mostre que

(a) (1,0 pt) os subconjuntos

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = z = 0\}$$

e

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = x + z\}$$

são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$;

(b) (1,0 pt) $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

2. (a) (1,5 pts) Determine, explicitamente, a expressão de uma transformação linear, $T : P_2 \to M_{2\times 2}$, satisfazendo, simultâneamente, as seguintes condições:

i) O elemento $p(x) = x^2 \in Ker(T)$.
ii) O elemento $q(x) = 1 \notin Ker(T)$.
iii) O elemento $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in Im(T)$.

(b)(1,5 pts) Seja $\beta = \{3x, x-2, 1+x^2\}$ uma base de P_2. Determine a transformação linear $S : P_2 \to M_{2\times 2}$ tal que $S(3x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $S(x-2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $S(1+x^2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

3. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to M_{2\times 2}$ dada por

$$T(x, y, z) = \begin{bmatrix} z - y & 7y - 3z - 4x \\ 2y - 2x & 2z - x - y \end{bmatrix}.$$

(a)(1,0 pt) Determine uma base para $Ker(T)$ (núcleo da transformação T).
(b)(1,0 pt) Determine uma base para $Im(T)$ (imagem da transformação T).
(c)(0,5 pt) Diga se T é injetiva e se T é sobrejetiva. Justifique.

4. Considere a transformação linear $T : P_2 \to P_1$ dada por:

$$T(p(x)) = ap(0) - p'(x)$$

com

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & b \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix},$$

considerando $\alpha = \{1, cx+1, x^2\}$ a base para P_2 e $\beta = \{1-x, x\}$ a base para P_1.

(a)(1,5 pts) Determine os parâmetros $a, b, c \in \mathbb{R}$.
(b)(1,0 pt) Determine $[T(q(x))]_{\beta}$ e $T(q(x))$, sabendo que

$$[q(x)]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

OBS. $p'(x)$ denota a derivada (primeira) de $p(x)$.