Matemática Universitária Nº 18, junho de 1995, 33-41

Uma Aplicação de Álgebra Linear a um problema elementar em Probabilidade

Artur Lopes

Introdução

O objetivo deste trabalho é o de apresentar um problema simples de probabilidade, que dá margem a interessantes aplicações, como a que veremos adiante, de mutações ocorridas numa colônia de vírus de dois tipos em que um tipo se transforma no outro. O problema matemático é, como se verá, uma valiosa ilustração de aplicações de vários conceitos de Algebra Linear, como auto-vetores e auto-valores, bem como da existência de ponto fixo para uma contração de um espaço métrico completo.

Embora o exemplo de vírus seja o mais interessante, por questão de simplificação vamos formular o problema em termos de "bebedores de cerveja".

Suponhamos uma cidade com população N, em que cada habitante consome um e apenas um tipo de cerveja entre as de tipo A e B. A população dessa cidade é fixa, mas seus habitantes podem mudar de opinião e gosto de um mês para o outro.

Inicialmente havia X_0 pessoas que tomavam cerveja A e Y_0 pessoas tomavam cerveja B. A cada mês é contado o número de pessoas que bebe cada tipo de cerveja. Denotamos por X_n e Y_n o número de pessoas que bebeu cervejas A e B respectivamente no *n–ésimo* mês.

Gostaríamos de analisar a evolução temporal de X_n e Y_n ou equivalentemente das proporções (ou probabilidades).

$$x_n = \frac{X_n}{N} \text{ e } y_n = \frac{Y_n}{N}.$$

A taxa de mudança de um mês para outro é dada por probabilidade de transição.

Com o fim de facilitar a notação vamos associar a A o número 1 e a B o número 2. Com isto em mente vamos definir as taxas de mudanças por

$$a_{ij} = \frac{\text{\# de pessoas que tomam } i \text{ no mês 1 e tomavam } j \text{ no mês 0}}{\text{\# de pessoas que tomavam } j \text{ no mês 0}},$$

$i \in \{1,2\}$, $j \in \{1,2\}$.

Por exemplo:

$$a_{11} = \frac{\text{\# de pessoas que tomam } A \text{ no mês 1 e tomavam } A \text{ no mês 0}}{\text{\# de pessoas que tomavam } A \text{ no mês 0}};$$

e

$$a_{12} = \frac{\text{\# de pessoas que tomam } A \text{ no mês 1 e tomavam } B \text{ no mês 0}}{\text{\# de pessoas que tomavam } B \text{ no mês 0}}.$$

Os valores a_{ij} são também denominados de probabilidades de transição.
Como calcular a partir de a_{ij}, e (x_0, y_0) o consumo (x_1, y_1) no mês 1?
Ora $x_0 = X_0/N$ e $y_0 = Y_0/N$, logo

$$x_1 = \frac{X_1}{N} = \frac{1}{N}(\text{\# de pessoas que tomam A no mês 1}) =$$

$$= \frac{1}{N}[(\# \textit{ de pessoas que tomavam A no mês 0 e continuam tomando A}$$

$$\textit{no mês } 1) + (\# \{\textit{de pessoas que tomavam B no mês 0 e passam a}$$

$$\textit{tomar A no mês } 1)] =$$

$$\frac{\text{\# de pessoas que tomavam } A \text{ no mês 0 e continuam tomando } A \text{ no mês 1}}{X_0} \times$$

$$\times \frac{X_0}{N} + \frac{\text{\# de pessoas que tomavam } B \text{ no mês 0 e tomam } A \text{ no mês 1}}{Y_0} \times \frac{Y_0}{N} =$$

$$= a_{11}\, x_0 + a_{12}\, y_0 .$$

Da mesma maneira,

$$y_1 = \frac{Y_1}{N} = \frac{1}{N}(\textit{\# de pessoas que tomam B no mês } 1) =$$

$$= \frac{1}{N}(\text{\# de pessoas que tomavam A no 0 e tomam B no 1}) +$$

$$+ \frac{1}{N}(\text{\# de pessoas que tomavam B no 0 e tomam B no 1}) =$$

$$= \frac{\text{\# de pessoas que tomavam A no 0 e tomam B no 1}}{X_0} \times \frac{X_0}{N} +$$

$$+ \frac{\text{\# de pessoas que tomavam B no 0 e tomam B no 1}}{Y_0} \times$$

$$\times \frac{Y_0}{N} = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 .$$

Portanto, existe uma matriz de transição (ou de mudança) P dada por

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \text{ tal que } P\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Observe que P é uma matriz coluna estocástica (isto é, a soma dos elementos de cada coluna de P é 1) já que

$$a_{11} + a_{21} = \frac{\text{\# de pessoas que tomavam A no 0 e tomam A no 1}}{X_0} +$$

$$\frac{\text{\# de pessoas que tomavam A no 0 e tomam B no mês 1}}{X_0} =$$

$$\frac{1}{X_0}(\text{\# de pessoas tomam A no mês 0}) = 1$$

e

$$a_{12} + a_{22} = \frac{\text{\# de pessoas tomavam B no 0 e tomam A no 1}}{Y_0} +$$

$$+ \frac{\text{\# de pessoas tomavam B no 0 e tomam B no 1}}{Y_0} =$$

$$\frac{1}{Y_0}(\text{\# de pessoas tomam B no 0}) = 1$$

Sendo assim, $a_{11} + a_{21} = 1 = a_{12} + a_{22}$. Este fato será usado mais tarde em nossas considerações.

O caso de probabilidade constante

A partir de agora faremos a hipótese de que as probabilidades de transição sejam constantes, isto é,

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = P^2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

ou seja, em geral

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = P^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

onde P^n é o produto matricial $P \,.\, P. \ldots P$, com n fatores

Note, no entanto, que as proporções x_n e y_n podem se alterar.

A última expressão afirma que podemos calcular as proporções $(x_n\,,\, y_n)$ ao longo dos meses aplicando P^n ao vetor inicial $(x_0\,,\, y_0)$.

É natural perguntar: (1) Existe o limite $\lim\limits_{n\to\infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$?

(2) Se existe o limite em (1), digamos que seja dado por $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$,

ele depende da condição inicial $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$?

Se houver $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \lim\limits_{n\to\infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ independente de $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$,

então dizemos que o mercado tem um *equilíbrio natural.*

Como obter o vetor $(\bar{x}\,,\, \bar{y})$, tal que

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} P^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}?$$

Observe que como P define uma função contínua,

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = P\left(\lim_{n\to\infty} P^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right) = \lim_{n\to\infty} P^{n+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}.$$

Logo estamos interessados em descobrir o vetor $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ tal que $P\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$.

Em outras palavras, $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ deve ser um autovetor de P associado ao autovalor 1.

Vamos tratar aqui do caso em que $a_{ij} > 0 \ \forall \ i, j$. Neste caso o mercado tem equilíbrio natural, isto é, 1 é de fato autovalor de P, como provaremos adiante.

O conjunto dos autovetores, associados ao autovalor 1, é então uma reta passando pela origem (um subespaço vetorial do $\mathbf{R}^2$). Para determinar o vetor $(\bar{x}, \bar{y})$ devemos determinar a interceção desta reta com a reta $x + y = 1$.

Vamos preceder a demonstração do fato mencionado acima com um exemplo que ilustra a obtenção do vetor de equilíbrio natural de mercado.

Exemplo: Encontre $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ no caso em que $P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.7 & 0.5 \end{pmatrix}$.

Precisamos então resolver o sistema

$$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.7 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} + \bar{y} = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} 0.3\bar{x} + 0.5\bar{y} = \bar{x} \\ 0.7\bar{x} + 0.5\bar{y} = \bar{y} \ \text{ e } \ \bar{x} + \bar{y} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 0.5\bar{y} = 0.7\bar{x} \\ \text{e } \ \bar{x} + \bar{y} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \bar{x} = \frac{5}{12} \ \text{ e } \ \bar{y} = \frac{7}{12}$$

Portanto,

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/12 \\ 7/12 \end{pmatrix}.$$

Observe que uma informação infinita (que é o limite) pode ser obtida através de uma informação finita (que é o autovalor). Em geral, este tipo de informação (os valores para os quais vão convergir as taxas de consumo) é relevante para processos que têm uma evolução muito rápida. Estaremos interessados em saber então apenas qual o valor final do processo. Isto não é bem o caso do consumo da cerveja. De qualquer modo o caso do consumo da cerveja tem a vantagem de ilustrar de maneira simples um exemplo do que se chama em Probabilidade um *Processo Markoviano.* Podemos considerar como melhor exemplo uma colônia de vírus de dois tipos diferentes num ambiente fechado. Um vírus dum tipo tem uma tendência de mudar de tipo com uma certa taxa. Este é um processo que tem velocidade rápida e é tal que a hipótese da taxa de mudança ser constante ao longo do tempo é mais plausível do que no caso de seres humanos.

Retomando a demonstração de que o mercado tem equilíbrio natural, o problema aqui se resume a saber se existe ume apenas um limite $(\bar{x}, \bar{y})$ e se este limite independe da condição inicial (x_0 , y_0). Os passos intermediários, isto é, as proporções x_n e y_n na etapa $\underline{n}$ são dadas através da igualdade (*).

Vamos agora dar um esboço de prova de que existe equilíbrio natural no mercado, convergindo a apenas uma probabilidade ($\bar{x}$, $\bar{y}$) $\in \mathbf{R}^2$ e que este vetor pode ser encontrado resolvendo $P(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, \bar{y})$ e $\bar{x} + \bar{y} = 1$.

Qual o espaço que estamos interessados em analisar aqui? Estamos interessados apenas nos valores x , y tais que $x + y = 1$ e $0 \le x$, y. Sendo assim o conjunto que devemos analisar é o segmento de reta do 1° quadrante dado por $\sum = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ; x, y \ge 0 \text{ e } x + y = 1\}$ (ver figura 1).

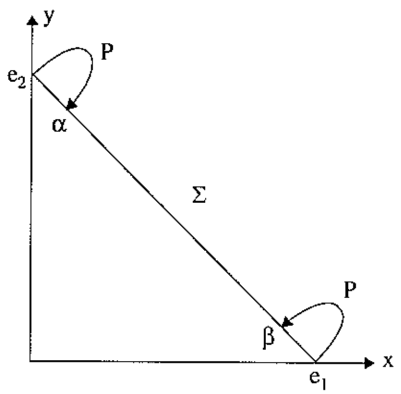

Figura 1

É fácil ver que os vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ estão em $\sum$. Os vetores (a_{11}, a_{21}), (a_{12}, a_{22}) também estão em $\sum$ pois como vimos anteriormente $a_{11} + a_{21} = 1 = a_{12} + a_{22}$ e por hipótese $a_{ij} > 0 \; \forall \; i, j$. Portanto

$$P \,.\, e_1 = P \,.\, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \alpha$$

e

$$P \,.\, e_2 = P \,.\, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \beta$$

são vetores que não estão nos eixos das coordenadas x e y já que $a_{ij} > 0 \; \forall \; i, j$. Observe que

$$P \cdot (te_1 + (1-t)e_2) = t P \cdot e_1 + (1-t) \cdot P \cdot e_2 = t\alpha + (1-t)\beta$$

para todo $t \in [0,1]$. Isto significa que a imagem $P(\sum)$ do segmento de reta $\sum$ é um segmento de reta estritamente contido em $\sum$.

Vamos fazer uma mudança de coordenadas para simplificar o problema.

Escolhemos agora a parametrização x em vez de (x, y). Conseguir um ponto fixo $(\bar{x}, \bar{y})$ na reta $\sum$ do plano significa conseguir um ponto fixo $\bar{x}$ da abscissa x cuja ordenada é $\bar{y}$ e ainda $\bar{x} + \bar{y} = 1$. Assim, em vez da aplicação P podemos pensar na transformação

$$T : [0,1] \to [0,1]$$

$$x \to T(x) = (GPG^{-1})(x)$$

onde $G : (x,y) \to x$ é a projeção na 1ª coordenada e G^{-1} é a sua inversa.

De maneira equivalente dizemos que G,T,P satisfazem a equação $G^{-1}\, T = PG^{-1}$.

G faz o papel da mudança de coordenadas. Note que se

$$\lim_{n\to\infty} T^n(x_0) = \bar{x} \quad \text{e} \quad \bar{y} = 1 - \bar{x}$$

então

$$(\bar{x}, \bar{y}) = G^{-1}(x) = G^{-1} \lim_{n\to\infty} T^n(x_0) = \lim_{n\to\infty} G^{-1}\, T^n(x_0) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P^n(G^{-1}(x_0)) = \lim_{n\to\infty} P^n(x_0, y_0). \qquad (**)$$

A expressão $G^{-1}\, T^n = P^n\, G^{-1}$ usada na terceira igualdade acima segue por indução em n da relação $G^{-1}\, T = PG^{-1}$.

Assim, em vez de analisar a evolução temporal de P^n em $\sum$, vamos analisar a evolução temporal de T^n em $[0,1]$.

Observe que

$$T(x) = (GPG^{-1})(x) = GP(G^{-1}(x)) = GP\begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix} =$$

$$= G\begin{pmatrix} a_{11}\, x + a_{12}\,(1-x) \\ a_{21}\, x + a_{22}\,(1-x) \end{pmatrix} = a_{11}\, x + a_{12}\,(1-x) = (a_{11} - a_{12})x + a_{12}.$$

Sendo assim, a expressão analítica para T é $T(x) = (a_{11} - a_{12})x + a_{12}$.

Portanto, $T(0) = a_{12} \neq 0, 1$ e $T(1) = a_{11} \neq 0, 1$. Observe que T é linear e que a interseção do gráfico de T com a diagonal determina o ponto fixo $\bar{x}$ para T (isto é, o ponto $\bar{x}$ tal que $T(\bar{x}) = \bar{x}$ conforme mostra a figura 2).

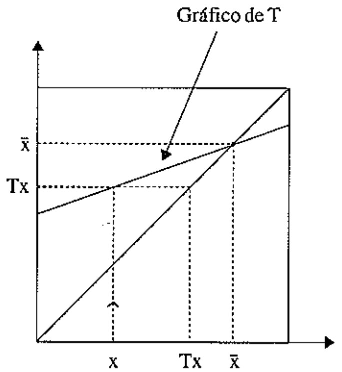

Figura 2

T tem um único ponto fixo já que a inclinação da reta que define o gráfico de T é dada por $|T'(x)| = |a_{11} - a_{12}| < 1$, $\forall x$ pois a_{11}, a_{12} são números entre 0 e 1.

O gráfico de T é uma reta que intercepta a diagonal em um único ponto. Este valor determina o pnto fixo de T.

Pode-se mostrar (ver comentário após as conclusões) que qualquer que seja o ponto inicial $x_0 \in [0,1]$ $T^n(x_0)$ vai convergir para um único $\bar{x}$. Das considerações que fizemos anteriormente (ver (**)) segue-se que para qualquer vetor de condições iniciais (x_0, y_0) (as probabilidades iniciais), $\lim_{n\to\infty} P^n(x_0, y_0) = (\bar{x}, \bar{y})$ como queríamos provar.

Conclusão: $(\bar{x}, \bar{y})$ (onde $\bar{y} = 1 - \bar{x}$) é o ponto fixo para P e é o equilíbrio natural do mercado a longo prazo. O valor $\bar{x}$ é ponto fixo para T e além disso $(\bar{x}, \bar{y})$ é autovetor de P associado ao autovalor 1 sujeito à condição $\bar{x} + \bar{y} = 1$.

Contra-exemplo: Considere a matriz $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Observe que esta matriz aplicada a qualquer ponto fornece como resultado o próprio ponto, ou seja, P deixa todo ponto fixo. Neste caso, o mercado não possui equilíbrio.

Conclusão: Portanto, a hipótese de que $a_{ij} > 0$, $\forall i, j$ no contexto acima, é necessária para que exista equilíbrio natural!

Comentário final: O fato de que $T : [0,1] \to [0,1]$ tem um único ponto fixo $\bar{x}$ e que $\lim_{n\to\infty} T^n(x_0) = \bar{x}$ qualquer que seja o $x_0 \in [0,1]$ escolhido, decorre basicamente da desigualdade:

$| T(x) - T(y) | \leq c \, | x - y |$ onde

$0 < c = | a_{11} - a_{12} | < 1$, e do fato de que toda seqüência de Cauchy em $[0,1]$ é convergente.

Esta é uma situação particular de um resultado mais geral, conhecido como "Teorema do Ponto fixo para Contrações" ou também "Teorema do Ponto Fixo de Banach", fato básico do "método das aproximações sucessivas".

Veja por exemplo, [1].

Referências

[1] E. L. Lima. Espaços Métricos, (3ª Edição) Projeto Euclides, IMPA, 1993, pág. 198.

Instituto de Matemática-UFRGS
Av. Bento Gonçalves, 9500
Prédio A1 - Campus do Vale
91.509-900 - Porto Alegre - RS