UMA PROPRIEDADE DOS POLINÔMIOS CARACTERÍSTICOS DE TRANSFORMAÇÕES ORTOGONAIS

Alberto de Azevedo

Saul Lubkin demonstrou uma propriedade dos polinômios característicos de transformações ortogonais que, aparentemente, não havia sido observada anteriormente na literatura (vide (2)). O objetivo desta nota é apresentar este resultado que, face a seu caráter elementar, cabe perfeitamente em um curso de Álgebra Linear.

Em primeiro lugar uma definição. Seja $p(X)$ um polinômio de grau n, $p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$, $a_n \neq 0$. O *reverso* de $p(X)$ é o polinômio $p^*(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-} + \ldots + a_{n-1} X + a_n$. Dizemos que $p(X)$ é *simétrico* (respectivamente: *anti-simétrico*) se e somente se êle for igual ao seu reverso (respectivamente: ao negativo de seu reverso). Note que, em geral, $p^*(X) = X^n \cdot p(1/X)$.

Com esta terminologia o resultado pode ser enunciado da seguinte maneira:

Teorema. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita com produto interno. O polinômio característico $p_T(X)$ de uma transformação ortogonal $T: V \to V$ é simétrico ou anti-simétrico.

O Teorema resulta da seguinte observação:

Lema 1. Seja $\dim V = n$. Se $T: V \to V$ é uma transformação linear invertível então

$$p_{T^{-1}}(X) = \frac{(-1)^n}{\det(T)} p_T^*(X).$$

Demonstração. Temos: $p_{T^{-1}}(X) = \det(X \cdot I - T^{-1}) = \det(T^{-1}(X \cdot T - I)) =$

$= \det(T^{-1}).\det(X.T - I) = \frac{(-1)^n}{\det(T)} \det(I-X.T) = \frac{(-1)^n}{\det(T)} X^n \det(\frac{1}{X}.I-T) =$

$= \frac{(-1)^n}{\det(T)} X^n.p_T(1/X) = \frac{(-1)^n}{\det(T)}.p_T^*(X).$

Voltemos ao Teorema. Se T é ortogonal então $\det(T) = \pm 1$ e T^{-1} é a adjunta de T de forma que $p_{T^{-1}}(X) = p_T(X)$ (em uma base ortonormal a matriz de T^{-1} é a transposta da matriz de T). Segue-se, do Lema, que $p_T(X) = p_{T^{-1}}(X) = \pm p_T^*(X)$, qed.

O Lema abaixo dá uma caracterização alternativa dos polinômios simétricos ou anti-simétricos:

Lema 2. Um polinômio $p(X)$ (com termo constante $\neq 0$) é simétrico ou anti-simétrico se e somente se a aplicação $\alpha \longmapsto \alpha^{-1}$ é uma bijeção de suas raízes que preserva multiplicidades.

Demonstração. Seja $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ a seqüência de raízes de $p(X)$ (contando multiplicidades). Assim, $p(X) = a_n(X-\alpha_1)\ldots(X-\alpha_n)$ e

$p^*(X) = X^n.p(1/X) = X^n a_n(X^{-1}-\alpha_1)\ldots(X^{-1}-\alpha_n) =$

$= (-1)^n\alpha_1\ldots\alpha_n a_n(X-\alpha_1^{-1})\ldots(X-\alpha_n^{-1}).$

Se as seqüências $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ e $\{\alpha_1^{-1},\ldots,\alpha_n^{-1}\}$ coincidem (salvo por uma permutação) então $p^*(X) = (-1)^n\alpha_1\ldots\alpha_n a_n(X-\alpha_1)\ldots$ $\ldots(X-\alpha_n) = (-1)^n\alpha_1\ldots\alpha_n p(x)$ e $(\alpha_1\ldots\alpha_n)^2 = (\alpha_1\ldots\alpha_n)(\alpha_1^{-1}\ldots\alpha_n^{-1}) = 1$ de forma que $\alpha_1\ldots\alpha_n = \pm 1$. Segue-se que $p^*(X) = \pm p(X)$, i.e., $p(X)$ é simétrico ou anti-simétrico. A recíproca também não oferece dificuldades.

O resultado pode, portanto, ser enunciado da seguinte maneira equivalente:

Corolário. Se $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ é a seqüência das raízes (contando multiplicidades) do polinômio característico de uma transformação ortogonal então $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ e $\{\alpha_1^{-1},\dots,\alpha_n\}$ coincidem, salvo por uma permutação.

Concluimos esta nota com as seguintes observações:

1) Cálculos como os do Lema 2 mostram que se $\{\alpha_1,\dots,\alpha_s\}$ é a seqüência de raízes não nulas (contando multiplicidades) do polinômio $p(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$, $a_n \neq 0$, então $p^*(X) = $ $= a_{n-s}(X-\alpha_1^{-1})\dots(X-\alpha_s^{-1})$. Este fato, juntamente com o Lema 1, mostra que se $T: V \to V$ é uma transformação linear invertível e $p_T(X) = (X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_n)$ então $p_{T^{-1}}(X) = (X-\alpha_1^{-1})\dots(X-\alpha_n^{-1})$. A partir deste resultado, pode-se dar uma demonstração direta do Corolário acima utilizando uma argumentação do mesmo tipo da empregada no Teorema.

2) É fácil ver que se T é uma transformação invertível e $f(X)$ é um polinômio então $f(T) = 0$ se e somente se $f^*(T^{-1}) = 0$. Resulta que se $m_T(X) = X^s + a_{s-1}X^{s-1} + \dots + a_1 X + a_0$ é o polinômio mínimo de T então

$$m_{T^{-1}}(X) = \frac{1}{a_0}\, m_T^*(X).$$

Um argumento análogo ao do Teorema mostra que se T é uma transformação ortogonal então $m_T(X)$ é um polinômio simétrico ou anti-simétrico;

3) É possível dar um tratamento dos resultados apresentadas nesta nota, mais ao sabor da matemática do 2º grau. Com efeito, não é difícil mostrar que se $f(X)$ e $g(X)$ são polinômios e $h(X)=f(X)\cdot g(X)$ então $h^*(X) = g^*(X)\cdot g^*(X)$ (isto só é válido para polinômios a coeficientes em um domínio de integridade(°)). Resulta que o produto

(°) No caso geral, $h^*(X) = X^{d^0 h - d^0 f - d^0 g} f^*(X)\cdot g^*(X)$, onde d^0 indica o grau de um polinômio.

de dois polinômios simétricos (respectivamente anti-simétricos) é um polinômio simétrico e que o produto de um polinômio simétrico por um polinômio anti-simétrico é um polinômio anti-simétrico.

Se T é uma transformação ortogonal, então $p_T(X)$ (respectivamente $m_T(X)$) é um produto de fatores iguais a $X+1$, a $X-1$ ou a um polinômio do tipo X^2+aX+1. Como todos esses polinômios são simétricos ou anti-simétricos, conclui-se, do resultado acima, que $p_T(X)$ (respectivamente $m_T(X)$) é um polinômio simétrico ou anti-simétrico. O argumento mostra, a rigor, que qualquer fator de $p_T(X)$, em $\mathbb{R}[X]$, é um polinômio simétrico ou anti-simétrico.

Quanto ao Corolário basta observarmos que se $f(X)$ é um polinômio a coeficientes reais a aplicação $\alpha \longmapsto \bar{\alpha}$ (conjugado de α) uma bijeção de suas raízes que preserva multiplicidades e que se α é uma raiz de $p_T(X)$ então α tem módulo um e, portanto, $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}^{1}$.

4) Lubkin considerou o caso mais geral em que V é um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo k e T preserva uma forma bilinear não degenerada $B\colon V\times V \to k$. Assim, se $0 \neq v \in V$ existe $w \in V$ tal que $B(v,w) \neq 0$ e $(\forall\, v,\, w \in V)\; B(Tv,Tw) = B(v,w)$. Conclui-se, ainda, que $p_T(X)$ é um polinômio simétrico ou anti-simétrico. As demonstrações indicadas na observação anterior não se estendem, de imediato, a este caso mais geral.

Referências Bibliográficas

1. F. Gantmacher, *The theory of matrices*, volumes 1 e 2, Chelsea, 1959.

2. S. Lubkin, *A result on the Weil zeta function*, Trans. Amer. Math. Soc. 139 (1969), 297-300.

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
Edifício CNPq - Av. W/3 Norte - Q. 507/B
70.740 Brasília DF