

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CCEN - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROVA EXTRA DE ÁLGEBRA LINEAR L1 - 2010.2 - 06/12/2010

-
- ◇ Leia atentamente o enunciado das questões antes de tentar solucioná-las.
◇ As respostas somente serão aceitas com **justificativas**.
◇ Não é permitido qualquer tipo de consulta.
-

1. (a) (2,0 pts) Determine, explicitamente, a expressão de uma transformação linear, $T : P_2 \rightarrow M_{2 \times 2}$, satisfazendo, simultaneamente, as seguintes condições:

- i) O elemento $p(x) = x^2 \in \text{Ker}(T)$.
ii) O elemento $q(x) = 1 \notin \text{Ker}(T)$.
iii) O elemento $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{Im}(T)$.

- (b)(2,0 pts) Seja $\beta = \{3x, x-2, 1+x^2\}$ uma base de P_2 . Determine a transformação linear

$$S : P_2 \rightarrow M_{2 \times 2} \text{ tal que } S(3x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, S(x-2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } S(1+x^2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_{2 \times 2}$ dada por

$$T(x, y, z) = \begin{bmatrix} z - y & 7y - 3z - 4x \\ 2y - 2x & 2z - x - y \end{bmatrix}.$$

- (a)(1,0 pt) Determine uma base para $\text{Ker}(T)$ (núcleo da transformação T).
(b)(1,0 pt) Determine uma base para $\text{Im}(T)$ (imagem da transformação T).
(c)(1,0 pt) Diga se T é injetiva e se T é sobrejetiva. Justifique.

3. Considere a transformação linear $T : P_2 \rightarrow P_1$ dada por:

$$T(p(x)) = ap(0) - p'(x)$$

com

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & b \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix},$$

considerando $\alpha = \{1, cx + 1, x^2\}$ a base para P_2 e $\beta = \{1 - x, x\}$ a base para P_1 .

- (a)(1,5 pts) Determine os parâmetros $a, b, c \in \mathbb{R}$.
(b)(1,5 pts) Determine $[T(q(x))]_{\beta}$ e $T(q(x))$, sabendo que

$$[q(x)]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

OBS. $p'(x)$ denota a derivada (primeira) de $p(x)$.