

UFPE – ÁREA 2 – CCEN – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
ÁLGEBRA LINEAR - SEGUNDO SEMESTRE DE 2010
SEGUNDA AVALIAÇÃO

Nome legível:

Turma:

1. Sejam $\alpha = \{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0)\}$ e $\beta = \{(-1, -1, 0), (-1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$.

(a)(1,0 pt) Determine $[I]_{\alpha}^{\beta}$ e $[I]_{\beta}^{\alpha}$.

(b)(1,0 pt) Dada $[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ determine $[T]_{\alpha}^{\alpha}$.

2.(a) (1,0 pt) Determine explicitamente a expressão de uma transformação linear $T : P_2 \rightarrow M_{2 \times 2}$ satisfazendo simultaneamente as seguintes condições:

i) O elemento $p(x) = x^2 \in \text{Ker}(T)$.

ii) O elemento $q(x) = 1 \notin \text{Ker}(T)$.

iii) O elemento $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{Im}(T)$.

(b)(1,0 pt) Seja $\beta = \{3x, x-2, 1+x^2\}$ uma base de P_2 . Determine a transformação linear

$S : P_2 \rightarrow M_{2 \times 2}$ tal que $S(3x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $S(x-2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $S(1+x^2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

3. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_{2 \times 2}$ dada por

$$T(x, y, z) = \begin{bmatrix} z - y & 7y - 3z - 4x \\ 2y - 2x & 2z - x - y \end{bmatrix}$$

(a)(1,0 pt) Determine uma base para $\text{Ker}(T)$ (núcleo da transformação T).

(b)(1,0 pt) Determine uma base para $\text{Im}(T)$ (imagem da transformação T).

(c)(0,5 pt) Diga se T é injetiva e se T é sobrejetiva. Justifique.

4.(1,0 pt) Seja V e W espaços vetoriais de dimensão finita em que $\dim V = \dim W$. Existe transformação linear $T : V \rightarrow W$ injetiva e não sobrejetiva? Justifique.

5. Considere a transformação linear $T : P_2 \rightarrow P_1$ dada por:

$$T(p(x)) = ap(0) - p'(x)$$

com

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & b \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix},$$

considerando $\alpha = \{1, cx + 1, x^2\}$ a base para P_2 e $\beta = \{1 - x, x\}$ a base para P_1 .

(a)(1,5 pts) Determine os parâmetros $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(b)(1,0 pt) Determine $[T(q(x))]_{\beta}$ e $T(q(x))$, sabendo que

$$[q(x)]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

OBS. $p'(x)$ denota a derivada (primeira) de $p(x)$.

OBS: ENTENDER O ENUNCIADO DAS QUESTÕES É PARTE INTEGRAL DA PROVA; NÃO FAÇA CONSULTAS AO FISCAL. NÃO É PERMITIDO DESTACAR AS FOLHAS DA PROVA NEM USAR FOLHAS ADICIONAIS. NÃO É PERMITIDO USO DE CELULAR E CALCULADORA. USE O VERSO DESTA FOLHA APENAS PARA BORRÃO.